

**М.В. Федорюк**

**Асимптотические методы для линейных  
обыкновенных дифференциальных уравнений**

*М.В. Федорюк*

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

В книге содержатся асимптотические методы решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрен ряд важных физических приложений к задачам квантовой механики, распространения волн и др.

Для математиков, физиков, инженеров, а также для студентов и аспирантов университетов и инженерно-физических вузов.

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
<b>Глава I. Аналитическая теория дифференциальных уравнений</b>	<b>7</b>
§ 1. Аналитичность решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений	7
§ 2. Регулярные особые точки	10
§ 3. Иррегулярные особые точки	21
<b>Глава II. Уравнения второго порядка на вещественной оси</b>	<b>30</b>
§ 1. Преобразования уравнений второго порядка	30
§ 2. ВКБ-оценки	34
§ 3. Асимптотика решений уравнения второго порядка при больших значениях параметра	37
§ 4. Системы из двух уравнений, содержащие большой параметр	48
§ 5. Системы уравнений, близкие к диагональным	50
§ 6. Асимптотика решений при больших значениях аргумента	55
§ 7. Двойные асимптотики	61
§ 8. Контрпримеры	67
§ 9. Корни постоянной кратности	69
§ 10. Задачи на собственные значения	71
§ 11. Задача о рассеянии	75
<b>Глава III. Уравнения второго порядка в комплексной плоскости</b>	<b>82</b>
§ 1. Линии Стокса и области, ими ограниченные	82
§ 2. ВКБ-оценки в комплексной плоскости	90
§ 3. Уравнения с полиномиальными коэффициентами. Асимптотика решений в большом	94
§ 4. Уравнения с целыми и мероморфными коэффициентами	109
§ 5. Асимптотика собственных значений оператора $-d^2/dx^2 + \lambda^2 q(x)$ . Самосопряженные задачи	112
§ 6. Асимптотика дискретного спектра оператора $-y'' + \lambda^2 q(x)y$ . Несамосопряженные задачи	126
§ 7. Задача на собственные значения с регулярными особыми точками	133
§ 8. Квазиклассическое приближение в задачах рассеяния	142
§ 9. Уравнении Штурма — Лиувилля с периодическим потенциалом	159
<b>Глава IV. Уравнения второго порядка с точками поворота</b>	<b>167</b>

§ 1. Простая точка поворота. Вещественный случай	167
§ 2. Простая точка поворота. Комплексный случай	180
§ 3. Некоторые эталонные уравнения	186
§ 4. Кратные и дробные точки поворота	188
§ 5. Слияние точки поворота и регулярной особой точки	201
§ 6. Кратная точка поворота. Комплексный случай	204
§ 7. Две близкие точки поворота	208
§ 8. Слияние нескольких точек поворота	213
<b>Глава V. Уравнения и системы <math>n</math>-го порядка</b>	<b>223</b>
§ 1. Уравнения и системы на конечном интервале	223
§ 2. Системы уравнений на конечном интервале	235
§ 3. Уравнения на бесконечном интервале	245
§ 4. Системы уравнений на бесконечном интервале	262
§ 5. Уравнения и системы в комплексной плоскости	282
§ 6. Точки поворота	291
§ 7. Задача о рассеянии, адиабатические инварианты и задача на собственные значения	323
§ 8. Примеры	332
Литература	343
Предметный указатель	349
Список сокращений	252

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей книге изложены основные результаты асимптотической теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и систем, относящиеся к поведению решений с малыми параметрами при старших производных и к поведению решений при больших значениях аргумента. Литература по этим вопросам велика и разрознена, но методы доказательств довольно однотипны, так что этот материал хорошо укладывается в монографию справочного типа. Мы ограничились только однородными уравнениями. Асимптотику решений неоднородного уравнения можно получить из асимптотики фундаментальной системы решений, применяя методы асимптотических оценок интегралов.

С понятием асимптотического разложения, которое систематически используется в данной книге, читатель может ознакомиться по монографиям [4, 20]. Под «формальным асимптотическим решением» (ФАР) понимается функция, удовлетворяющая уравнению с некоторой степенью точности. Хотя это понятие четко не определено, смысл его всегда ясен из контекста. Отметим также, что термин «линия Стокса» (ЛС), употребляемый в данной книге, эквивалентен термину «антистоксова линия», принятому в физической литературе.

В главе I кратко изложены основные сведения из аналитической теории дифференциальных уравнений. В § 2, п. 4 и в § 3, п. 3 приведены полученные в последние годы результаты об отгоне краевого условия из особой точки уравнения в неособую.

В главе II рассматриваются уравнения второго порядка на конечном интервале и на полуоси. Приведены асимптотические формулы для решений уравнений с малым параметром при старшей производной в случае, когда уравнение не имеет точек поворота. Приведены асимптотические формулы для решений при больших значениях независимой переменной, а также формулы, пригодные и при больших значениях параметра, и при больших значениях независимой переменной (двойные асимптотики). В § 5 аналогичные результаты приведены для систем уравнений любого порядка, которые близки к диагональным. В § 8 приведены примеры, которые показывают, что из существования формальной асимптотики не всегда следует существование решений, имеющих такую асимптотику.

В главе III рассматриваются уравнения второго порядка, содержащие большой параметр, в комплексной области. Этот раздел асимптотической теории слабо освещен в существующих монографиях. Асимптотические формулы для решений приведены в областях, не содержащих точек поворота и их малых окрестностей. Указаны максимальные области применимости асимптотических формул для решений и приведены асимптотические формулы для матриц перехода, позволяющие построить асимптотику решений в большом. Рассмотрен ряд приложений: асимптотика собственных значений уравнений с аналитическими коэффициентами, в том числе несамосопряженных или имеющих регулярные особые точки, асимптотика матрицы рассеяния в квазиклассическом приближении, асимптотика ширины лакун в спектре оператора Штурма — Лиувилля с периодическим потенциалом.

В главе IV приведены асимптотические формулы для решений уравнений второго порядка в вещественной или комплексной окрестности точки поворота. Рассмотрены случаи слияния точек поворота или точек поворота и особых точек уравнения.

В главе V приведены результаты того же типа, что и в главах II—IV, но для уравнений и систем порядка выше второго. В § 6 сформулированы результаты, полученные с помощью канонического оператора Маслова. В § 8 рассмотрена задача рассеяния для системы Штюккельберга.

В настоящий справочник не вошли результаты, относящиеся к уравнению Орра—Зоммерфельда, и метод осреднения для уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. Несмотря на неполноту справочника, мы надеемся, что он окажется полезным математикам, механикам и физикам, использующим в своей работе асимптотические методы теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

*М. В. Федорюк*

Г Л А В А 1

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

В этой главе рассматриваются линейные уравнения и системы с голоморфными или мероморфными коэффициентами. Приведены основные факты аналитической теории дифференциальных уравнений о локальной структуре решений. Более подробные сведения читатель может найти в монографиях [1, 4, 6, 8, 9, 31].

**§ 1. Аналитичность решений систем  
обыкновенных дифференциальных уравнений**

**1. Теорема Коши.** Сформулируем некоторые понятия из теории аналитических функций. Пусть  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ ,  $\zeta_j$  — комплексные переменные. Функция  $\varphi(\zeta)$  называется *голоморфной* в точке  $\zeta^0 = (\zeta_1^0, \dots, \zeta_m^0)$ , если она разлагается в степенной ряд

$$\varphi(\zeta) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \varphi_{\alpha} (\zeta - \zeta^0)^{\alpha},$$

сходящийся в некоторой окрестности точки  $\zeta^0$ . Здесь приняты обозначения:  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  — мультииндекс,  $\alpha_j \geq 0$  — целые числа,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ ,  $(\zeta - \zeta^0)^{\alpha} = (\zeta_1 - \zeta_1^0)^{\alpha_1} \times \dots \times (\zeta_m - \zeta_m^0)^{\alpha_m}$ , так что ряд для функции  $\varphi(\zeta)$  имеет вид

$$\varphi(\zeta_1, \dots, \zeta_m) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m=0}^{\infty} \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_m} (\zeta_1 - \zeta_1^0)^{\alpha_1} \dots (\zeta_m - \zeta_m^0)^{\alpha_m}.$$

Вектор-функция (или матричная функция) называется *голоморфной* в точке  $\zeta^0$ , если все ее компоненты (элементы) голоморфны в этой точке. Голоморфная в точке  $\zeta^0$  функция будет голоморфной также в некоторой окрестности этой точки.

Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dw_j}{dz} = f_j(z, w_1, \dots, w_n), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Введем вектор-функцию  $w(z) = (w_1(z), \dots, w_n(z))^T$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)^T$  (все векторы-столбцы); тогда система примет вид

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w). \quad (1)$$

Поставим задачу Коши:

$$w(z_0) = w^0, \quad (2)$$

где  $w^0 = (w_1^0, \dots, w_n^0)^T$  — заданный вектор. Справедлива классическая

**Теорема Коши.** Пусть вектор-функция  $f(z, w)$  голоморфна в точке  $(z_0, w^0)$ . Тогда существует, и притом единственное, решение задачи Коши (1), (2), голоморфное в точке  $z_0$ .

Эта теорема носит локальный характер: голоморфное решение существует, вообще говоря, лишь в малой окрестности  $U$  точки  $z_0$ . Продолжив аналитически это решение по всем путям с началом в точке  $z_0$ , по которым это продолжение возможно, получим полную аналитическую вектор-функцию  $\tilde{w}(z)$ . Эта функция может оказаться неоднозначной и иметь особые точки. Для линейных систем особенности  $\tilde{w}(z)$  рассмотрены в §§ 2, 3.

Теорема Коши без всяких изменений переносится на уравнения высших порядков:

$$w^{(n)} = f(z, w, w', \dots, w^{(n-1)}). \quad (3)$$

Поставим задачу Коши:

$$w(z_0) = w_0, \quad w'(z_0) = w_1, \dots, w^{(n-1)}(z_0) = w_{n-1}. \quad (4)$$

Если функция  $f(z, \zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$  голоморфна в точке

$$z = z_0, \quad \zeta_0 = w_0, \dots, \zeta_{n-1} = w_{n-1}$$

по совокупности переменных  $(z, \zeta_0, \dots, \zeta_{n-1})$ , то существует голоморфное в некоторой окрестности точки  $z_0$  решение  $w(z)$  задачи Коши (3), (4), и такое решение единственно.

**2. Линейные уравнения и системы.** Рассмотрим систему из  $n$  линейных уравнений

$$\frac{d(w)}{dz} = A(z)w + f(z). \quad (5)$$

Здесь  $w(z)$ ,  $f(z)$  — вектор-функции,  $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)^T$  и  $A(z)$  есть  $(n \times n)$ -матрица с элементами  $a_{jk}(z)$ . В покомпонентной записи система (5) имеет вид

$$\frac{dw_j}{dz} = \sum_{k=1}^n a_{jk}(z)w_k + f_j(z), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (5')$$

Пусть матрица-функция  $A(z)$  и вектор-функция  $f(z)$  голоморфны в односвязной ограниченной области  $D$ . Тогда решение задачи Коши (5), (2) существует, единственно и голоморфно в области  $D$ .



Если же область  $D$  неодносвязна, то решение  $w(z)$  задачи Коши (5), (2) является аналитической в области  $D$  вектор-функцией, которая, как правило, неоднозначна.

Точно такими же свойствами обладают решения линейных уравнений  $n$ -го порядка

$$w^{(n)} + q_1(z)w^{(n-1)} + \dots + q_n(z)w = f(z). \quad (6)$$

Если все коэффициенты  $q_1(z), \dots, q_n(z)$  и правая часть  $f(z)$  голоморфны в односвязной области  $D$ , то решение задачи Коши (6), (4) голоморфно в области  $D$ . Если же область  $D$  неодносвязна, то всякое решение уравнения (6) будет аналитической в области  $D$  функцией.

**3. Особые точки линейных уравнений.** Рассмотрим линейную однородную систему

$$\frac{dw}{dz} = A(z)w \quad (7)$$

с матрицей-функцией  $A(z)$ , голоморфной в проколотой окрестности точки  $z = a$  (т. е. при  $z \in U \setminus a$ , где  $U$  — окрестность точки  $a$ ). Если точка  $a$  является особой хотя бы для одного из элементов матрицы  $A(z)$ , то  $a$  называется *особой точкой* матрицы  $A(z)$ .

Точка  $z = a$  называется *особой точкой* системы (7), если она является особой точкой матрицы  $A(z)$ .

Иначе определяется *бесконечно удаленная особая точка*  $z = \infty$ . Сделаем замену переменных  $z = 1/\zeta$ ; тогда система (7) примет вид

$$\frac{d\tilde{w}}{d\zeta} = -\zeta^{-2}A(\zeta^{-1})\tilde{w}, \quad (8)$$

где  $\tilde{w}(\zeta) = w(\zeta^{-1})$ . Если точка  $\zeta = 0$  — особая для системы (8), то точка  $z = \infty$  называется *особой* для системы (7).

Структура решений системы (7) в окрестности особой точки следующая.

Если  $a \neq \infty$  — особая точка системы (7), то существует фундаментальная матрица (ФМ)  $W(z)$  этой системы вида

$$W(z) = \Phi(z)(z - a)^P. \quad (9)$$

Здесь  $P$  — постоянная матрица, матрица-функция  $\Phi(z)$  разлагается в ряд Лорана

$$\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Phi_k(z - a)^k,$$

сходящийся в некотором кольце  $0 < |z - a| < \rho$ ,  $\Phi_k$  — постоянные  $(n \times n)$ -матрицы.

Если  $z = \infty$  — особая точка системы (7), то существует ФМ этой системы вида

$$W(z) = \Phi(z)z^P. \quad (10)$$

Здесь  $P$  — постоянная матрица, матрица-функция  $\Phi(z)$  разлагается в ряд Лорана

$$\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Phi_k z^{-k},$$

сходящийся в некотором кольце  $|z| > R$ .

Аналогичные результаты справедливы для линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка.

Если матрица  $P$  (см. (9), (10)) не приводится к диагональному виду, то  $W(z)$  может содержать логарифмические члены. Пример:  $J$  — жорданов блок порядка  $k \times k$ :

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}, \quad z^J = \begin{bmatrix} z^\lambda & z^\lambda \ln z & \frac{z^\lambda (\ln z)^{k-1}}{(k-1)!} & \\ & z^\lambda & \ddots & \\ & & \ddots & z^\lambda \ln z \\ 0 & & & z^\lambda \end{bmatrix}.$$

Формулы (9), (10) дают лишь общее представление о структуре ФМ вблизи особой точки, так как эффективное вычисление матриц  $P$  и  $\Phi(z)$  по матрице системы  $A(z)$  в общем случае невозможно (см. § 3).

В аналитической теории дифференциальных уравнений исследуется задача о структуре ФМ в окрестности полюса матрицы-функции  $A(z)$ . Введена следующая классификация особых точек.

Точка  $a$  называется *регулярной особой точкой* системы (7), если матрица-функция  $\Phi(z)$  (см. (9), (10)) имеет в точке  $a$  полюс (или голоморфна в этой точке). В противном случае особая точка  $a$  называется *иррегулярной*.

Эта классификация — непрямая; определение не позволяет по матрице системы  $A(z)$  установить характер особой точки. Аналогично классифицируются особые точки линейных однородных уравнений  $n$ -го порядка с мероморфными коэффициентами.

Одна из основных задач аналитической теории линейных дифференциальных уравнений — исследование структуры ФМ (или фундаментальной системы решений (ФСР) в случае скалярного уравнения) по матрице системы (соответственно по коэффициентам уравнения). Основные результаты, полученные в этом направлении, сформулированы в §§ 2, 3.

## § 2. Регулярные особые точки

**1. Скалярное уравнение.** Рассмотрим однородное линейное уравнение  $n$ -го порядка

$$lw \equiv w^{(n)} + q_1(z)w^{(n-1)} + \dots + q_n(z)w = 0. \quad (1)$$

Коэффициенты этого уравнения либо имеют полюс, либо голоморфны в точке  $a$ .

**1.1. К р и т е р и й р е г у л я р н о й о с о б о й т о ч к и.** Для того чтобы точка  $a \neq \infty$  была регулярной особой для уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы коэффициент  $q_k(z)$  имел полюс порядка не выше  $k$  в точке  $a$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Хотя бы одна из функций  $q_k(z)$  должна иметь полюс в точке  $a$  — иначе эта точка не будет особой.

Если  $a$  — регулярная особая точка, то уравнение (1) имеет вид

$$lw \equiv w^{(n)} + (z - a)^{-1}p_1(z) w^{(n-1)} + \dots + (z - a)^{-n}p_n(z) w = 0, \quad (2)$$

где  $p_k(z)$  — голоморфные в точке  $a$  функции.

Для того чтобы точка  $z = \infty$  была регулярной особой для уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы коэффициент  $q_k(z)$  имел нуль кратности не больше  $k$  в точке  $z = \infty$ . В этом случае уравнение (1) имеет вид

$$lw \equiv w^{(n)} + z^{-1}p_1(z) w^{(n-1)} + \dots + z^{-n}p_n(z) w = 0, \quad (3)$$

где  $p_k(z)$  — голоморфные в точке  $z = \infty$  функции.

**1.2. Структура решений в окрестности регулярной особой точки.** Рассмотрим пример. Уравнение Эйлера

$$z^n w^{(n)} + a_1 z^{n-1} w^{(n-1)} + \dots + a_n w = 0,$$

где  $a_1, \dots, a_n$  — постоянные, имеет две особые точки  $0, \infty$ , обе регулярные. Это уравнение интегрируется. Будем искать решение в виде  $w = z^\rho$ . Подставляя это решение в уравнение и сокращая на  $z^\rho$ , получаем *определяющее уравнение*

$$f(\rho) \equiv \rho(\rho - 1) \dots (\rho - n + 1) + \\ + a_1 \rho(\rho - 1) \dots (\rho - n + 2) + \dots + a_n = 0.$$

Если  $\rho_0$  — корень кратности  $k$  этого уравнения, то функции  $z^{\rho_0}, z^{\rho_0} \ln z, \dots, z^{\rho_0} (\ln z)^{k-1}$  являются решениями уравнения Эйлера. Набор всех таких решений образует ФСР.

Аналогично устроены решения уравнения (1) в окрестности регулярной особой точки. Уравнению (2) отвечает определяющее уравнение

$$f(\rho) \equiv \rho(\rho - 1) \dots (\rho - n + 1) + \\ + p_1(a) \rho(\rho - 1) \dots (\rho - n + 2) + \dots + p_n(a) = 0. \quad (4)$$

Пусть  $\rho_1, \dots, \rho_n$  — корни этого уравнения. Фиксируем  $\rho_k$ . Если все разности  $\rho_k - \rho_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , при  $j \neq k$  не являются неотрицательными целыми числами, то уравнение (2) имеет решение вида

$$w_k(z) = (z - a)^{\rho_k} \varphi_k(z), \quad (5)$$

где  $\varphi_k(z)$  — голоморфная в точке  $z = a$  функция, причем  $\varphi_k(a) \neq 0$ .

Если все разности  $\rho_j - \rho_k$  при  $j \neq k$ ,  $1 \leq j, k \leq n$  не являются целыми числами, то уравнение (2) имеет ФСР  $\{w_1(z), \dots, w_n(z)\}$ , состоящую из решений вида (5).

Аналогично устроены решения уравнения (3) в окрестности регулярной особой точки  $z = \infty$ . Определяющее уравнение имеет вид

$$f(\rho) \equiv \rho(\rho - 1) \dots (\rho - n + 1) + p_1(\infty)\rho(\rho - 1) \dots (\rho - n + 2) + \dots + p_n(\infty) = 0. \quad (6)$$

Пусть  $\rho_1, \dots, \rho_n$  — корни этого уравнения. Фиксируем  $\rho_k$ . Если все разности  $\rho_j - \rho_k$ ,  $1 \leq j \leq n$ , при  $j \neq k$  не являются целыми числами, то уравнение (3) имеет решение вида

$$w_k(z) = z^{\rho_k} \varphi_k(z), \quad (7)$$

где  $\varphi_k(z)$  — голоморфная в точке  $z = \infty$  функция,  $\varphi_k(\infty) \neq 0$ .

Если среди разностей  $\rho_j - \rho_k$ ,  $j \neq k$ , есть целые числа, то решения уравнения (2) могут содержать  $\ln^m(z - a)$ ,  $m > 0$  — целое. Формулы для ФСР известны и в этом случае [8, 9], но громоздки. Проще и удобнее привести алгоритм их получения.

1.3. М е т о д Ф р о б е н и у с а. Пусть  $z = 0$  — регулярная особая точка уравнения (2) ( $a = 0$ ). Будем искать формальный ряд вида

$$w(z) = z^\rho \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \quad a_0 = 1, \quad (8)$$

такой, что

$$lw = f(\rho) z^\rho. \quad (9)$$

Имеем

$$lw = f(\rho) z^\rho + [a_1 f(\rho + 1) - g_1] z^{\rho+1} + \dots + [a_j f(\rho + j) - g_j] z^{\rho+j} + \dots,$$

где  $g_j = \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk}(\rho) a_k$  и  $g_{jk}(\rho)$  — полиномы. Из рекуррентной системы уравнений

$$a_j f(\rho + j) = g_j \quad (10)$$

можно последовательно найти коэффициенты  $a_1, a_2, \dots$  как функции  $\rho$ . Все они будут рациональными функциями  $\rho$ . Фиксируем  $\rho = \rho_1$ . Возможны следующие варианты:

1)  $\rho_1$  — корень определяющего уравнения, и ни одна из разностей  $\rho_1 - \rho_2, \dots, \rho_1 - \rho_n$  не является целым положительным числом. Тогда ряд (8) при  $\rho = \rho_1$  — решение уравнения (2), так как из системы (10) можно последовательно найти  $a_1, a_2, \dots$

2) Пусть условия п. 1) выполнены и  $\rho_1$  — корень кратности  $m > 1$ . Тогда функции

$$w(z, \rho), \frac{\partial w(z, \rho)}{\partial \rho}, \dots, \frac{\partial^{m-1} w(z, \rho)}{\partial \rho^{m-1}}, \quad \rho = \rho_1,$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (2). Эти решения — полиномы от  $\ln z$  степени  $0, 1, \dots, m-1$ .

3) Пусть уравнение (4) имеет корень  $\rho_2$  такой, что  $\rho_1 - \rho_2 = k > 0$  — целое число, и пусть  $f(\rho_1 + j) \neq 0$  при  $1 \leq j < k$  и при  $j > k$ . Пусть  $m$  — кратность корня  $\rho_1$ . Решение уравнения (2) ищется в виде ряда (8), где  $a_0 = (\rho - \rho_2)^m$ . Имеем

$$lw = f(\rho) (\rho - \rho_2)^m z^\rho.$$

Из системы (10) находим, что коэффициенты  $a_1, \dots, a_{k-1}$  содержат множитель  $(\rho - \rho_2)^m$ , а из уравнения

$$f(\rho + k) a_k = g_k$$

следует, что  $a_k$  не имеет полюса в точке  $\rho = \rho_2$ , так как  $f(\rho + k)$  и  $g_k$  делятся на  $(\rho - \rho_2)^m$ . Поэтому точка  $\rho = \rho_2$  не является полюсом ни для одного из коэффициентов  $a_k$ .

Ряд (8) при  $\rho = \rho_2$  — решение уравнения (2), пропорциональное найденному в п. 1). Решение, отвечающее корню  $\rho_2$ , имеет вид  $\partial^m w / \partial \rho^m |_{\rho=\rho_2}$ . Если  $\rho_2$  — кратный корень, то дальнейшие решения могут быть получены последующим дифференцированием, как и в п. 2).

Аналогично рассматривается случай, когда несколько разностей  $\rho_j - \rho_k$  являются целыми числами. ФСР уравнения (2) состоит из решений вида

$$w = z^\rho \sum_{k=0}^m \varphi_k(z) (\ln z)^k,$$

где  $\rho$  — корень определяющего уравнения,  $\varphi_k(z)$  — голоморфные в точке  $z = 0$  функции.

1.4. Уравнение второго порядка. Рассмотрим уравнение

$$z^2 w'' + zp(z)w' + q(z)w = 0, \quad (11)$$

где  $p(z)$ ,  $q(z)$  — голоморфные в круге  $|z| < R$  функции. Точка  $z = 0$  — регулярная особая для уравнения (11). Построим ФСР уравнения (11) в круге  $|z| < R$ . Имеем

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k.$$

Решение будем искать в виде

$$w = z^\rho \sum_{k=0}^{\infty} w_k z^k, \quad w_0 = 1. \quad (12)$$



Здесь  $\rho_1^{(m)}$ ,  $\rho_2^{(m)}$  — характеристические показатели, отвечающие особой точке  $z = a_m$ , штрих означает, что  $j \neq m$ ,  $Q_{l-2}(z)$  — полином степени  $l-2$ , если  $z = \infty$  — особая точка, и степени  $l-4$ , если  $z = \infty$  — неособая точка.

При  $l = 1, 2, 3$  (и только при таких  $l$ ) коэффициенты уравнения второго порядка класса Фукса выражаются через особые точки и их характеристические показатели. При  $l = 1$  уравнение приводится к виду  $w'' = 0$ , при  $l = 2$  — к уравнению Эйлера, при  $l = 3$  — к уравнению Папперитца (или Римана).

Основные линейные обыкновенные дифференциальные уравнения, возникающие в задачах математической физики, могут быть получены из уравнения второго порядка с пятью регулярными особыми точками [1]. В этом уравнении разность характеристических показателей равна  $1/2$  для любой особой точки. Слияние двух таких особых точек образует регулярную особенность с произвольной разностью характеристических показателей. Слияние трех или более особых точек приводит к иррегулярной особенности.

**2. Система уравнений.** Рассмотрим систему

$$w' = (z - a)^{-m-1} A(z) w, \quad (14)$$

где  $w = (w_1(z), \dots, w_n(z))^T$ ,  $A(z)$  есть матрица-функция порядка  $n \times n$ , голоморфная в точке  $a$ ,  $A(a) \neq 0$ ,  $m \geq 0$  — целое число.

2.1. Особая точка первого рода. Число  $m$  называется рангом особенности  $z = a$ . Если  $m = 0$  ( $m \geq 1$ ), то  $a$  называется особой точкой первого (второго) рода.

Особая точка первого рода является регулярной (§ 1), т. е. система (14) имеет ФМ вида

$$W(z) = \Phi(z) (z - a)^P. \quad (15)$$

Здесь  $P$  — постоянная матрица, матрица-функция  $\Phi(z)$  голоморфна или имеет полюс в точке  $z = a$ .

Для систем, в отличие от скалярных уравнений, неизвестны критерии регулярной особой точки. Особая точка второго рода может быть как иррегулярной, так и регулярной. Например, ранг особой точки  $z = 0$  для системы

$$w_1' = w_2, \quad w_2' = z^{-2} w_1$$

равен 1, так что  $z = 0$  — особая точка второго рода. Эта система эквивалентна уравнению Эйлера  $z^2 w'' - w = 0$ , для которого (а потому и для системы) точка  $z = 0$  — регулярная особая. Имеется ряд работ, где получены достаточные условия, при которых точка  $z = a$  является регулярной особой для системы (14).

Пусть  $m = 0$  и среди разностей собственных значений матрицы  $A(a)$  нет целых неотрицательных чисел. Тогда система (14) имеет ФМ вида

$$W(z) = \Phi(z) (z - a)^{A(a)}, \quad (16)$$

где  $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(z-a)^k$ ,  $\Phi_0 = I$  — голоморфная в точке  $z = a$  матрица-функция.

Приведем алгоритм построения решения. Пусть  $a = 0$ ; тогда  $A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j z^j$ . Подставляя (16) в (14), получаем после умножения справа на  $z^{-A_0}$  систему

$$z \Phi'(z) + \Phi(z) A_0 = A(z) \Phi(z).$$

Приравнявая коэффициенты при степенях  $z$  в этой системе, получаем рекуррентную систему уравнений

$$k\Phi_k + [\Phi_k, A_0] = \sum_{j=0}^{k-1} A_j \Phi_{k-j}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $[\Phi_k, A_0] = \Phi_k A_0 - A_0 \Phi_k$  (коммутатор матриц  $\Phi_k, A_0$ ). Рассмотрим матричное уравнение

$$\mu X + [X, A] = B,$$

где  $\mu$  — число,  $X, A, B$  — квадратные матрицы одного порядка. Из линейной алгебры известно, что если  $\mu \neq \lambda_j - \lambda_k$  ни при каких  $j, k$ , где  $\lambda_j$  — собственные значения матрицы  $A$ , то это уравнение разрешимо для любой матрицы  $B$ . Поэтому из рекуррентной системы можно последовательно найти матрицы  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ . Если же среди разностей собственных значений матрицы  $A_0$  есть целые неотрицательные числа, то система (14) имеет ФМ вида (15), где  $\Phi(z)$  — голоморфная в точке  $z = a$  матрица-функция и  $P$  — постоянная матрица такая, что среди разностей ее собственных значений нет неотрицательных целых чисел.

Аналогично исследуется особая точка  $z = \infty$ . Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$w' = z^{m+1} A(z) w,$$

где  $A(z)$  — голоморфная в точке  $z = \infty$  матрица-функция,  $A(\infty) \neq 0$  и  $m \geq 0$  — целое число. Рангом системы называется число  $m+1$ ; при  $m=0$  ( $m \geq 1$ ) точка  $z = \infty$  называется *особой точкой первого (второго) рода*. Приведенные выше результаты для конечной особой точки справедливы и для точки  $z = \infty$ ; в этом случае в формулах (15), (16), следует заменить  $z-a$  на  $z$ .

**2.2. Системы класса Фукса.** Система из  $n$  уравнений

$$w' = A(z) w \tag{17}$$

называется *системой класса Фукса*, если на римановой сфере она имеет только регулярные особые точки. Если, кроме того, все эти особенности первого рода, то система имеет вид

$$w' = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{z-a_k} w.$$



Здесь  $A_k \neq 0$  — постоянные  $(n \times n)$ -матрицы, точки  $a_1, \dots, a_m, \infty$  — регулярные особые.

**3. Группа монодромии.** Пусть коэффициенты уравнения (1) голоморфны в односвязной области  $D$  на римановой сфере, за исключением точек  $a_1, \dots, a_m$ , которые могут быть полюсами коэффициентов. Особые точки могут быть регулярными или иррегулярными. Фиксируем точку  $a_0$ , отличную от указанных, и ее малую односвязную окрестность  $U$ . В области  $U$  существует голоморфная ФСР  $w(z) = (w_1(z), \dots, w_n(z))$  уравнения (1). Пусть  $\gamma_j$  — простая замкнутая кривая с началом и концом в точке  $a_0$ , которая обходит точку  $a_j$  в положительном направлении (т. е.  $\gamma_j$  ориентирована против часовой стрелки,  $a_j$  лежит внутри  $\gamma_j$ , остальные особые точки лежат вне  $\gamma_j$ ). Аналитически продолжив ФСР  $w(z)$  вдоль  $\gamma_j$ , получим ФСР

$$\gamma_j w(z) \equiv w^j(z) = w(z) T_j,$$

где  $T_j$  — постоянная невырожденная матрица порядка  $n \times n$ . Если аналитически продолжить ФСР  $w(z)$  вдоль пути  $\gamma_j^{-1}$  (т. е. вдоль  $\gamma_j$  в обратном направлении), то получим ФСР

$$\gamma_j^{-1} w(z) = w(z) T_j^{-1}.$$

Если аналитически продолжить ФСР  $w(z)$  вначале вдоль пути  $\gamma_j$ , а затем вдоль пути  $\gamma_k$ , то получим ФСР

$$\gamma_k \gamma_j w(z) = w(z) T_j T_k.$$

*Группой монодромии* уравнения (1) (или просто *группой уравнения*) в области  $D$  называется группа  $G$  матриц с образующими  $T_1, \dots, T_m$ . Всякий элемент группы  $G$  имеет вид  $T_{i_1}^{k_1} \dots T_{i_s}^{k_s}$ , где  $i_\alpha \in \{1, 2, \dots, m\}$  и  $k_1, \dots, k_s$  — целые числа.

Группа монодромии зависит от выбора точки  $a_0$ :  $G = G(a_0)$ . Если  $b_0 \in D$  — неособая точка,  $b_0 \neq a_0$ , то группы  $G(a_0)$  и  $G(b_0)$  подобны: существует постоянная невырожденная  $(n \times n)$ -матрица  $T = T(a_0, b_0)$  такая, что

$$G(b_0) = T^{-1}G(a_0)T.$$

Точно так же определяется группа монодромии для системы вида (17).

Группу монодромии удается построить в явном виде лишь для небольшого числа классов дифференциальных уравнений: для гипергеометрического уравнения, для уравнений Похгаммера, Бесселя и некоторых других. В гл. III, § 4, приведены примеры, в которых уравнение содержит большой параметр и удается найти асимптотику образующих группы  $G$  по параметру.

**4. Многообразие решений.** Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$tw' = A(t)w. \quad (18)$$

Введем условие

$$A(t) \in C^\infty, \quad 0 \leq t \leq a, \quad A(0) \neq 0. \quad (18')$$

По аналогии с аналитическим случаем назовем  $t = 0$  *регулярной особой*. Все приведенные в п. 2.1 результаты сохраняются и в этом случае, с той лишь разницей, что все ряды (например, ряд для  $\Phi(t)$  из (16)) будут не сходящимися, а асимптотическими при  $t \rightarrow +0$ .

4.1. Многообразии ограниченных решений. Пусть матрица  $A(0)$  не имеет чисто мнимых собственных значений. Тогда с помощью линейной замены вида  $w = T\tilde{w}$ , где  $T$  — постоянная невырожденная матрица, систему (18) можно привести к такому виду, что матрица  $A(0)$  будет блочно-диагональной:

$$A(0) = \begin{bmatrix} A_- & 0 \\ 0 & A_+ \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Здесь  $A_-$ ,  $A_+$  — квадратные матрицы порядков  $k$  и  $n - k$ , собственные значения матрицы  $A_-$  ( $A_+$ ) лежат в левой (правой) полуплоскости:

$$\operatorname{Re} \lambda_1 < 0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_k < 0, \operatorname{Re} \lambda_{k+1} > 0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_n > 0. \quad (20)$$

ФСР системы (18) состоит из  $k$  решений  $w_1, \dots, w_k$  неограниченных при  $t \in (0, a] = I$ , и  $n - k$  решений  $w_{k+1}, \dots, w_n$ , ограниченных при  $t \in I$ . Обозначим через  $M^{n-k}$  множество всех решений, ограниченных при  $t \in I$ ; тогда  $M^{n-k}$  — линейное пространство ( $n - k$ -мерное) над полем комплексных чисел. Его элементы имеют вид  $w = \sum_{j=1}^{n-k} c_j w_{j+k}$ , где  $c_j$  — произвольные постоянные.

Асимптотика ограниченных решений при  $t \rightarrow 0$  — такая же, как и в аналитическом случае. Видно, что она довольно сложна и, кроме того, существенно зависит как от жордановой нормальной формы матрицы  $A(0)$ , так и от того, имеются ли среди разностей  $\lambda_j - \lambda_k$  целые числа или нет. Поэтому эти формулы крайне неудобны при численном расчете задач, связанных с системой (18) или неоднородной системой

$$tw' = A(t)w + f(t), \quad (21)$$

если краевое условие поставлено в особой точке  $t = 0$ .

В то время как структура индивидуальных ограниченных решений достаточно сложна, структура многообразия  $M^{n-k}$  всех ограниченных решений проста [34, 35]. Положим

$$w = \begin{bmatrix} w_- \\ w_+ \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_- \\ f_+ \end{bmatrix}, \quad V(t) = A(t) - A(0) = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}.$$

Вектор  $w_-$  ( $w_+$ ) имеет  $k$  ( $n - k$ ) компонент, порядки матриц  $V_{jk}$  также ясны. Будем искать уравнение, определяющее  $M^{n-k}$ ,

в виде

$$w_-(t) = \alpha(t)w_+(t), \quad (22)$$

где  $\alpha(t)$  — неизвестная матрица порядка  $k \times (n - k)$ . Подставляя (22) в (18), получаем систему

$$\begin{aligned} tw'_+ &= (A_+\alpha + V_{11}\alpha + V_{12})w_+, \\ taw'_+ &= (A_-\alpha + V_{21}\alpha + V_{22} - t\alpha')w_+. \end{aligned}$$

Отсюда находим уравнение для  $\alpha$ :

$$t\alpha' = A_-\alpha - \alpha A_+ + V_{11}\alpha - \alpha V_{22} - \alpha V_{21}\alpha + V_{12}, \quad (23)$$

которое является матричным уравнением Риккати. Краевое условие для  $\alpha(t)$  таково:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0. \quad (24)$$

Решение задачи Коши (23), (24) при малых  $t > 0$  существует, единственно, и  $\alpha(t)$  разлагается в ряд

$$\alpha(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j t^j. \quad (25)$$

Этот ряд является сходящимся, если матрица-функция  $A(t)$  голоморфна в точке  $t = 0$ , и асимптотическим при условии (18'). Матрицы  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  находятся подстановкой (25) в (23) и приравнованием нулю коэффициентов по степеням  $t$ . Для  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  получается рекуррентная система линейных алгебраических уравнений.

Итак, при малых  $t > 0$  всякое ограниченное решение системы (18) является решением системы (22) и всякое решение системы (22) является ограниченным при  $t \rightarrow 0$  решением системы (18).

Этот метод применим и к неоднородной системе (21). Пусть  $f(t) \in C^\infty$  при  $0 \leq t \leq a$ , условия на матрицу  $A(0)$  те же, что и выше, и ищутся ограниченные при  $t \rightarrow 0$  решения. Эти решения ищутся в виде

$$w_- = \alpha(t)w_+ + \beta(t),$$

где  $\alpha(t)$  — построенная выше матрица, вектор-функция  $\beta(t)$  является единственным решением задачи Коши

$$t\beta' = A_-\beta + (V_{11} - \alpha V_{21})\beta + f_- - \alpha f_+, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \beta(t) = -A_+^{-1}f_-(0).$$

При малых  $t > 0$  справедливо разложение

$$\beta(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j t^j, \quad (26)$$

обладающее теми же свойствами, что и (25). Векторы  $\beta_0, \beta_1, \dots$  определяются из рекуррентной системы линейных алгебраических уравнений.

4.2. Система второго порядка. Рассмотрим однородную систему

$$t^2 w'' = A(t) w. \quad (27)$$

Эту систему можно свести к системе первого порядка вида (18), но удобнее исследовать ее непосредственно.

Будем искать решение в виде

$$w(t) = t^\rho \varphi(t), \quad \varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k,$$

где ряд  $\varphi(t)$  обладает теми же свойствами, что и в п. 4.1. Подставляя это решение в (27) и приравнивая коэффициенты при степенях  $t$ , получаем рекуррентную систему уравнений, первое из которых имеет вид

$$[(\rho^2 - \rho) I - A_0] \varphi_0 = 0.$$

Следовательно, число  $\rho$  должно быть корнем определяющего уравнения

$$\det [(\rho^2 - \rho) I - A_0] = 0,$$

а вектор  $\varphi_0$  должен быть собственным вектором матрицы  $A_0$ , отвечающим собственному значению  $\lambda = \rho^2 - \rho$ . Пусть все собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  матрицы  $A_0$  лежат во внешности параболы  $\Pi$ :  $\operatorname{Re} \lambda + (\operatorname{Im} \lambda)^2 = 0$  в комплексной плоскости  $\lambda$ . Тогда имеется  $n$  корней  $\rho_j$  таких, что  $\operatorname{Re} \rho_j > 0$ , и  $n$  таких, что  $\operatorname{Re} \rho_j < 0$ . ФСР системы (27) содержит  $n$  линейно независимых решений, ограниченных при  $t \rightarrow 0$ , и  $n$  неограниченных. Уравнение многообразия  $M^n$  ограниченных решений можно получить, факторизуя дифференциальный оператор, отвечающий (27). Будем искать такие  $(n \times n)$ -матрицы  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ , чтобы выполнялось тождество

$$t^2 \frac{d^2}{dt^2} - A(t) = \left( t \frac{d}{dt} - \beta(t) \right) \left( t \frac{d}{dt} - \alpha(t) \right).$$

Отсюда находим  $\beta(t) = I - \alpha(t)$  и для  $\alpha(t)$  получаем матричное уравнение Риккати

$$t \alpha' + \alpha^2 - \alpha = A(t).$$

Очевидно, что если  $w$  — решение системы

$$t w'(t) = \alpha(t) w(t), \quad (28)$$

то  $w$  — решение системы (27). Выберем матрицу  $\alpha(t)$  так, чтобы отношение (28) описывало многообразие  $M^n$ , поставив задачу Коши:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = \frac{1}{2} (I + \sqrt{I + 4A_0}).$$

Здесь  $\sqrt{I + 4A_0}$  выбран так, что все собственные значения этой матрицы лежат в полуплоскости  $\operatorname{Re} \rho > 0$ , что возможно в силу условий на матрицу  $A_0$ . Решение полученной задачи Коши для  $\alpha(t)$  существует при малых  $t > 0$  и единственно. Для матрицы  $\alpha(t)$  справедливо разложение (25), причем  $\alpha_j$  определяются из рекуррентных соотношений.

Рассмотрим неоднородную систему

$$t^2 w'' = A(t)w + f(t), \quad (29)$$

где  $A(t)$  удовлетворяет сформулированным выше условиям,  $f(t) \in C^\infty$  при  $0 \leq t \leq a$ . Тогда имеется  $n$ -мерное многообразие  $M^n$  решений, ограниченных при  $t \rightarrow 0$ , которое описывается уравнением

$$tw' = \alpha(t)w + \beta(t). \quad (30)$$

Здесь матрица  $\alpha(t)$  описана выше, вектор-функция  $\beta(t)$  — решение задачи Коши

$$t\beta' + \alpha\beta - \beta = f(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \beta(t) = [\alpha(0) - I]^{-1} f(0). \quad (31)$$

Вектор-функция  $\beta(t)$  при малых  $t \geq 0$  разлагается в ряд (26), причем  $\beta_j$  определяются из рекуррентных соотношений.

Этот метод широко применяется в вычислительной математике [35]. Рассмотрим краевую задачу на отрезке  $[0, a]$  для системы (29):

$$\begin{aligned} w(t) \text{ ограничено при } t \rightarrow 0, \\ w(a) = w_0. \end{aligned}$$

Краевое условие при  $t = 0$  эквивалентно краевому условию

$$t_0 w'(t_0) = \alpha(t_0) w(t_0) + \beta(t_0)$$

при малых  $t_0$ . Приближенные значения  $\alpha(t_0)$ ,  $\beta(t_0)$  можно найти, взяв несколько первых членов разложений (25), (26), для отыскания которых необходимо решить соответствующие системы линейных алгебраических уравнений. После этого получаем краевую задачу для системы (2) на отрезке  $[t_0, a]$ , не содержащем особых точек.

Этот метод развит и для иррегулярных особенностей (§ 3).

### § 3. Иррегулярные особые точки

**1. Скалярное уравнение.** Рассмотрим уравнение

$$w^{(n)} + q_1(z)w^{(n-1)} + \dots + q_n(z)w = 0, \quad (1)$$

коэффициенты которого голоморфны или имеют полюс в точке  $z = \infty$ . Имеем

$$q_j(z) = \sum_{-\infty}^{n_j} q_{jm} z^{-m}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (2)$$

Эти ряды сходятся при  $|z| > R$ . Здесь  $q_j, n_j$  — первый отличный от нуля коэффициент ряда; если  $q_j(z) \equiv 0$ , то полагаем  $n_j = -\infty$ .

1.1. К р и т е р и й и р р е г у л я р н о й о с о б о й т о ч к и. Пусть

$$k = \max_{1 \leq j \leq n} n_j/j, \quad r = k + 1. \quad (3)$$

Число  $r$  называется *рангом*, число  $k$  — *подрангом* особой точки  $z = \infty$ . Если  $r = 0$  ( $r \geq 1$ ), то точка  $z = \infty$  — регулярная (иррегулярная) особая.

Пусть  $s \geq 1$  — целое число,

$$Q(\zeta) = q_0 \zeta^p + \dots + q_{p-1} \zeta, \quad \Psi(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m \zeta^{-m}, \quad (4)$$

где  $\Psi(\zeta)$  — формальный ряд. Ряд

$$w(z) = z^{\rho} e^{Q(z^{1/s})} \Psi(z^{1/s}) \quad (5)$$

называется *нормальным* (*поднормальным*) порядка  $p/s$ , если  $s = 1$  ( $s \geq 2$ ).

Подранг  $k$  — целое или дробное число, так что  $k = p/q$ , где  $k \geq 0$  — целое число,  $p, q$  — взаимно простые натуральные числа. Если  $r$  — целое число, то уравнение (1) имеет по крайней мере одно формальное решение вида (5) порядка  $r$  и  $s = 1$ . Если  $q \geq 2$ , то уравнение (1) имеет не менее  $q$  формальных решений вида (5) порядка  $r$ , где  $s = q$ . Ряды вида (5) обрываются лишь в исключительных случаях и, как правило, расходятся. Об их асимптотическом характере будет сказано ниже. Кроме того, решения уравнения (1) не исчерпываются рядами вида (5).

Понятия ранга и подранга очевидным образом переносятся на случай конечной особой точки.

1.2. Л о к а л ь н а я с т р у к т у р а р е ш е н и й; о с н о в н о й с л у ч а й. Если  $z = \infty$  — регулярная особая точка уравнения (1), то все решения имеют, грубо говоря, одинаковую структуру в окрестности этой точки. Именно, существует ФСР  $\{w_1, \dots, w_n\}$  такая, что

$$w_j(z) \sim z^{\rho_j} (\ln z)^{m_j}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Иррегулярная особая точка представляет собой сложный конгломерат особенностей. Например, уравнение

$$w'' - (q(z) + 1)w' + q(z)w = 0, \quad q(z) = \frac{\rho(\rho - z - 1)}{z(\rho - z)},$$

имеет решения  $w_1 = z^{\rho}$ ,  $w_2 = e^z$ . Первое из них имеет особенность того же типа, что и в случае регулярной особой точки, для второго  $z = \infty$  есть существенно особая точка.

Рассмотрим случай, когда структуру ФСР можно описать полностью. Пусть в уравнении (1)

$$q_j(z) = z^{jk} p_j(z), \quad 1 \leq j \leq n,$$

функции  $p_j(z)$  голоморфны в точке  $z = \infty$ . Пусть корни  $\rho_1, \dots, \rho_n$  уравнения

$$\rho^n + p_1(\infty)\rho^{n-1} + \dots + p_n(\infty) = 0 \quad (6)$$

различны и отличны от нуля. Ранг уравнения (1) в этом случае равен  $r = k + 1$ . Тогда уравнение (1) имеет  $n$  формальных решений вида (5):

$$w_j(z) = z^{\rho_j} \exp \left\{ \sum_{m=1}^{k+1} a_{jm} z^m \right\} \sum_{m=0}^{\infty} w_{jm} z^{-m}, \quad (7)$$

$$a_{j0} = \rho_j / (k + 1), \quad w_{j0} = 1.$$

Эти формальные ряды являются асимптотическими в некоторых секторах комплексной плоскости  $z$ . Фиксируем  $j, l$  и рассмотрим уравнение

$$\operatorname{Re} [(\lambda_j - \lambda_l)z^{k+1}] = 0. \quad (8)$$

Оно определяет конечное число лучей, которые называются *линиями Стокса*.

Если  $S: \alpha \leq \arg z \leq \beta, |z| > 0$ , — такой сектор, что для данного  $j$  он не содержит ни одного из направлений (8), то существует решение  $w_j(z)$  уравнения (1), для которого при  $z \rightarrow \infty, z \in S$ , справедливо асимптотическое разложение (AP) (7). Более того, один из граничных лучей сектора  $S$  может совпадать с одним из лучей (8).

Если эти условия выполнены при всех  $j$ , то уравнение (1) имеет в секторе  $S$  ФСР, для которой справедливо AP (5) при  $z \rightarrow \infty, z \in S$ . Вся комплексная плоскость  $z$  покрывается конечным числом  $S_1, \dots, S_N$  таких секторов; их можно выбрать так, чтобы пересечение двух соседних секторов было непусто. В каждом из них существует ФСР с асимптотическим разложением вида (7); обозначим их  $w_1(z), \dots, w_N(z)$ . Имеем

$$w_j(z) \equiv C_{jk} w_k(z),$$

где  $C_{jk}$  — постоянная матрица порядка  $n \times n$ .

Матрицы  $C_{jk}$  называются *матрицами* (или *множителями*) *Стокса*. Если известны все множители Стокса  $C_{j,j+1}$  (при  $j = N$  берем матрицу  $C_{N1}$ ), то это позволяет найти асимптотику некоторой ФСР уравнения (1) при  $z \rightarrow \infty$  по любому направлению. Однако найти все эти множители удается лишь в ограниченном числе случаев. Их отыскание по существу эквивалентно интегрированию уравнения.

**1.3. Локальная структура решений; общий случай.** Рассмотрим уравнение (1) с иррегулярной особой точкой  $z = \infty$ . Пусть  $h \geq 1, l_j \geq 1, m_j \geq 0$  — целые

числа,

$$Q_j(z) = \sum_{k=0}^{l_j} a_{jk} z^{k/h}, \quad \Phi_j(z) = \sum_{k=0}^{m_j} \Psi_{jk}(z) (\ln z)^k, \quad (9)$$

$$\Psi_{jk}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \psi_{jkl} z^{-l}, \quad \psi_{jkl} = 1,$$

и положим

$$w_j(z) = z^{\rho_j} e^{Q_j(z)} \Phi_j(z). \quad (10)$$

Уравнение (1) имеет формальную ФСР  $\{w_1(z), \dots, w_n(z)\}$ , состоящую из решений вида (10). В некоторых секторах вида  $S: \alpha \leq \arg z \leq \beta$  существует ФСР уравнения (1), для которой ряды (10) являются асимптотическими при  $z \rightarrow \infty, z \in S$  [9]. Алгоритм построения формальных решений и секторов  $S$  в общем случае весьма сложен.

Заметим, что если  $Q_j(z) \equiv 0$ , то соответствующее решение  $w_j(z)$  имеет ту же структуру, что и решение в окрестности регулярной особой точки  $z = \infty$ .

**2. Система уравнений.** Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$w' = z^r A(z) w, \quad (11)$$

где  $r \geq 0$  — целое число, матрица-функция  $A(z)$  голоморфна в точке  $z = \infty, A(\infty) \neq 0$ . В этом случае особая точка  $z = \infty$  может быть как иррегулярной, так и регулярной (§ 2).

Имеем

$$A(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^{-m}.$$

Этот ряд сходится при  $|z| > R$ . Пусть собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  матрицы  $A_0 = A(\infty)$  различны и отличны от нуля и  $S$  — сектор в комплексной плоскости  $z$ , не содержащий линий Стокса (8), где  $j$  фиксировано. Тогда система (11) имеет решение вида (7); в этой формуле  $w_{jm}$  — постоянные векторы, причем  $w_{j0}$  — собственный вектор матрицы  $A_0$ , т. е.  $A_0 w_{j0} = \lambda_j w_{j0}$ . Ряд (7) — асимптотический для решения  $w_j(z)$  при  $z \rightarrow \infty, z \in S$ . ФСР из таких решений существует в секторе  $S$  при тех же условиях, что и в п. 2.3. ФМ системы (11) имеет вид

$$W(z) = \Phi(z) z^{RQ(z)},$$

где  $R$  — постоянная  $(n \times n)$ -матрица,  $Q(z)$  — диагональная матрица, диагональные элементы которой — полиномы степени  $r + 1$ , и  $\Phi(z)$  — асимптотический ряд:

$$\Phi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m z^{-m}.$$



В общем случае система (11) имеет формальную ФСР, состоящую из решений вида (9), (10), где  $\psi_{jkl}$  — векторы, и в некоторых секторах комплексной плоскости  $z$  эти ряды являются асимптотическими.

Отметим, что даже для скалярного уравнения (4) и даже в основном случае построение АР решения в виде (7) затруднительно уже при  $n = 2$ . Более эффективными являются асимптотические методы (гл. V).

### 3. Многообразие решений.

3.1. Система первого порядка. Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$t^{-r}w' = A(t)w + f(t) \quad (12)$$

на полусоси  $I = [a, \infty)$ ,  $a > 0$ , где  $r \geq 0$  — целое число,  $A(t)$ ,  $f(t) \in C^\infty(I)$  и при  $t \rightarrow \infty$  справедливы асимптотические разложения

$$A(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m t^{-m}, \quad f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m t^{-m},$$

причем  $A_0 \neq 0$ . Пусть матрица  $A_0$  не имеет чисто мнимых собственных значений. Можно считать, что  $A_0$  — блочно-диагональная матрица, диагональные блоки которой — квадратные матрицы  $A_-$ ,  $A_+$  порядков  $m$  и  $n - m$  соответственно, причем  $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$  ( $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$ ) для всех собственных значений матрицы  $A_-$  ( $A_+$ ). Этого можно добиться с помощью преобразования  $w = Tw$ , где  $T$  — невырожденная постоянная матрица. Введем согласованные разбиения на блоки

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_- & 0 \\ 0 & A_+ \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_- \\ w_+ \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_- \\ f_+ \end{bmatrix}, \quad A(t) - A_0 = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}.$$

Множество  $M^m$  решений системы (11), ограниченных при  $t \in I$ , есть линейное многообразие размерности  $m$ . Однородная система (12) при  $f(t) \equiv 0$  имеет  $m$  линейно независимых решений, экспоненциально убывающих при  $t \rightarrow \infty$ , и  $n - m$  линейно независимых решений, экспоненциально растущих при  $t \rightarrow \infty$ . Многообразие  $M^m$  можно описать уравнением [35]

$$w_+ = \alpha(t) w_- + \beta(t) \quad (13)$$

при  $t \geq T \gg 1$ . Здесь  $\alpha(t)$  — решение матричного уравнения типа Риккати

$$t^{-r}\alpha' = A_+\alpha - \alpha A_- + V_{22}\alpha - \alpha V_{11} - \alpha V_{12}\alpha + V_{21}, \quad t \geq T, \quad (14)$$

с данными Коши на бесконечности:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0, \quad (15)$$

При  $T \gg 1$  такое решение существует и единственно. Матрица  $\alpha(t)$  разлагается при  $t \rightarrow \infty$  в асимптотический ряд

$$\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{t^k}. \quad (16)$$

Подставив (16) в (13) и приравняв коэффициенты при степенях  $t$ , получим рекуррентную систему линейных алгебраических уравнений, из которой можно последовательно найти  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ . Эти уравнения имеют вид

$$A_+ \alpha_1 - \alpha_1 A_- = - \lim_{t \rightarrow \infty} t V_{21}(t),$$

$$A_+ \alpha_j - \alpha_j A_- = \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}), \quad j = 2, 3, \dots$$

Вектор-функция  $\beta(t)$  является решением задачи Коши

$$t^{-r} \beta' = A_+ \beta + (V_{22} - \alpha V_{12}) \beta + f_+ - \alpha f_-,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = -A_+^{-1} f_+(0),$$

которое существует и единственно при  $t \geq T \gg 1$ . При  $t \rightarrow \infty$  справедливо асимптотическое разложение

$$\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{t^k}.$$

Этот метод широко применяется в вычислительной математике для переноса граничного условия из бесконечности в конечную точку [35, 48]. !

3.2. Система второго порядка. Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$w'' = t^r A(t) w \quad (17)$$

на полуоси  $I$ , где  $r \geq 0$  — целое число, матрица  $A(t) \in C^\infty(I)$  и разлагается в асимптотический ряд. Пусть собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  матрицы  $A_0 = A(\infty)$  не лежат на полуоси  $(-\infty, 0]$  в комплексной плоскости  $\lambda$ . Тогда множество  $M^n$  ограниченных на бесконечности решений системы (12) есть  $n$ -мерное линейное пространство. Получим его уравнение, факторизуя дифференциальный оператор из (17). Будем искать матрицы-функции  $\alpha(t), \beta(t)$  такие, что

$$\left(\frac{d}{dt} - \beta\right)\left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) = \frac{d^2}{dt^2} - t^r A(t). \quad (18)$$

Отсюда находим, что  $\beta = -\alpha$ , и получаем матричное уравнение Риккати

$$\alpha' + \alpha^2 = t^r A(t), \quad T \leq t < \infty. \quad (19)$$

Поставим данные Коши на бесконечности:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-r/2} \alpha(t) = -\sqrt{A_0}. \quad (20)$$

Здесь  $\sqrt{A_0}$  — матрица, собственные значения которой лежат в полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , и  $(\sqrt{A_0})^2 = A_0$ . Решение задачи (19), (20) при  $T \gg 1$  существует и единственно.

Матрица-функция  $\alpha(t)$  разлагается в асимптотический ряд

$$\alpha(t) = t^{r/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{t^{k/2}} \quad (21)$$

по полупелым степеням  $t^{-1}$ . Если  $r$  — четное число, то  $\alpha(t)$  разлагается в ряд по целым степеням  $t^{-1}$ . Здесь  $\alpha_0 = -\sqrt{A_0}$ , и подстановка ряда (21) в систему (17) приводит к рекуррентной системе уравнений, из которой можно последовательно найти  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

Из (18) следует, что если

$$w'(t) = \alpha(t) w(t), \quad (2)$$

где  $\alpha(t)$  — решение уравнения (19), то  $w(t)$  — решение системы (17). Если  $\alpha(t)$  удовлетворяет данным Коши (20), то  $w(t) \equiv M^n$ .

Рассмотрим неоднородную систему.

$$w'' = t^r [A(t)w + f(t)],$$

где  $A(t)$  удовлетворяет тем же условиям, что и выше,  $f(t)$  — условиям п. 3.1. Тогда множество  $M^n$  решений этой системы, ограниченных при  $t \rightarrow \infty$ , есть линейное многообразие размерности  $n$ .

В силу (18) эту систему можно записать в виде

$$\left(\frac{d}{dt} + \alpha\right) \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) w + t^r f(t) = 0. \quad (23)$$

Будем искать уравнение  $M^n$  в виде

$$\left(\frac{d}{dt} - \alpha(t)\right) w = \beta(t). \quad (24)$$

Подставляя это соотношение в (23), получаем уравнение для  $\beta$ :

$$\beta' + \alpha(t) \beta = t^r f(t).$$

Зададим данные Коши на бесконечности:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-r/2} \beta(t) = -(\sqrt{A_0})^{-1} f_0.$$

Решение этой задачи Коши существует и единственно при  $t \gg T \gg 1$ , и  $\beta(t)$  разлагается в асимптотический ряд

$$\beta(t) = t^{r/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{t^{k/2}}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Если  $r$  — четное число, то этот ряд содержит только целые степени  $t^{-1}$ . Для коэффициентов  $\beta_1, \beta_2, \dots$  можно получить рекуррентную систему линейных алгебраических уравнений.

3.3. Н е л и н е й н ы е с и с т е м ы. Метод переноса граничного условия из особой точки в неособую, приведенный выше для линейных систем, развит в [35] и для нелинейных систем. Приведем один из этих результатов. Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$w'' = f(t, w) \quad (25)$$

на полуоси  $I$ . Пусть

$$j(t, w) = A(t)w + g(t, w),$$

где  $A(t) \in C^\infty$  и разлагается в асимптотический ряд вида (12), вектор-функция  $g(t, w)$  — полином по переменным  $w$ , т. е.

$$g(t, w) = \sum_{|\alpha|=2}^N g_\alpha(t) w^\alpha,$$

вектор-функции  $g_\alpha(t)$  разлагаются в асимптотические ряды

$$g_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{\alpha k} t^{-k}$$

при  $t \rightarrow \infty$ ,  $g_\alpha(t) \in C^\infty(I)$  при всех  $\alpha$ . Здесь

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad w^\alpha = w_1^{\alpha_1} \dots w_n^{\alpha_n}.$$

Пусть собственные значения матрицы  $A_0$  не лежат на полуоси  $(-\infty, 0]$ . Поставим граничное условие на бесконечности:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0. \quad (26)$$

При сделанных предположениях решения системы (25), удовлетворяющие условию (26), при каждом фиксированном  $t$  заполняют в пространстве  $(w, w')$  нелинейное многообразие  $M^n$  размерности  $n$ . Будем искать уравнение  $M^n$  в виде

$$w' = \alpha(t, w). \quad (27)$$

Решение этой системы будет решением системы (25), если вектор-функция  $\alpha$  удовлетворяет нелинейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial w} \alpha = f(t, w), \quad t \geq T. \quad (28)$$

Это уравнение рассматривается в области  $T \leq t < \infty$ ,  $|w| \leq \varepsilon$ , где  $T \geq 1$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . В качестве  $\alpha$  в (27) берется голоморфное по  $w$  решение задачи Коши на бесконечности:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t, w) = \gamma(w), \quad |w| \leq \varepsilon. \quad (29)$$

Здесь  $\gamma(w)$  — решение уравнения

$$\frac{\partial \gamma}{\partial w} \gamma = A_0 w + \sum_{|\beta|=2}^N g_{\beta} w^{\beta}$$

такое, что

$$\gamma(w) = -\sqrt{A_0} w + O(|w|^2), \quad |w| \rightarrow 0.$$

Значение  $\sqrt{A_0}$  то же, что и в п. 3.2.

Решение задачи Коши (28), (29) при  $\varepsilon \ll 1$ ,  $T \gg 1$  существует, единственно и разлагается при  $|w| \ll \varepsilon$ ,  $t \geq T$  в сходящийся ряд

$$\alpha(t, w) = -\sqrt{A_0} w + \sum_{|\beta|=1}^{\infty} \alpha_{\beta}(t) w^{\beta},$$

вектор-функции  $\alpha_{\beta}(t)$  разлагаются при  $t \rightarrow \infty$  в асимптотические ряды

$$\alpha_{\beta}(t) = \sum_{l \geq 0, |\beta|+l \geq 2} \frac{\alpha_{\beta}^{(l)}}{t^l}, \quad |\beta| \geq 1.$$

Для векторов  $\alpha_{\beta}^{(l)}$  получена рекуррентная система алгебраических уравнений, решение которой на каждом этапе сводится к решению линейной системы алгебраических уравнений.

Более подробное изложение результатов, полученных в этом направлении, см. в [35].

ГЛАВА II  
УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА  
НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

В этой главе рассматриваются уравнения вида

$$y'' + p(x, \lambda) y' + q(x, \lambda) y = 0$$

и системы из двух уравнений первого порядка при вещественных  $x$ . Приведены асимптотические формулы для решений в предположении, что уравнения не имеют точек поворота. Коэффициенты уравнений предполагаются достаточно гладкими. Асимптотические формулы, приведенные в этой главе, носят названия: ВКБ-приближение (или ВКБ-асимптотика), квазиклассическое приближение, коротковолновое приближение, высокочастотное приближение и т. д.

§ 1. Преобразования уравнений второго порядка

Приведем некоторые преобразования, которые применяются при исследовании уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (1)$$

1. Подстановка

$$y = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_a^x p(t) dt \right\} z$$

приводит уравнение (1) к виду

$$z'' + (q - p^2/4 - p'/2) z = 0.$$

Рассмотрим двучленное уравнение

$$y'' + Q(x)y = 0. \quad (2)$$

2. Подстановка  $y'/y = w$  приводит уравнение (2) к уравнению Риккати

$$w' + w^2 + Q(x) = 0.$$

## 3. Подстановка

$$y = [\varphi'(\xi)]^{1/2} z, \quad x = \varphi(\xi)$$

приводит уравнение (2) к виду

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + \left[ Q(\varphi(\xi))[\varphi'(\xi)]^2 + \frac{\varphi'''(\xi)}{2\varphi'(\xi)} - \frac{3}{4} \left( \frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'(\xi)} \right)^2 \right] z = 0.$$

При таком преобразовании уравнение остается двучленным. Выражение

$$\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{2} \left( \frac{\varphi''}{\varphi'} \right)^2 = \{ \varphi, \xi \}$$

называется *производной Шварца*.

## 4. Рассмотрим уравнение

$$(P(x)y')' \pm Q(x)y = 0, \quad (3)$$

где  $P(x) > 0$ ,  $Q(x) > 0$ . Подстановка

$$\xi = \int_a^x \sqrt{\frac{Q(t)}{P(t)}} dt, \quad y = (P(x)Q(x))^{-1/4} z \quad (4)$$

приводит уравнение (3) к виду

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} \pm z + q(\xi)z = 0, \\ q = P^{-1/4} Q^{-3/4} \frac{d}{dx} P \frac{d}{dx} (PQ)^{-1/4}.$$

Преобразование (4) называется *преобразованием Лиувилля*. В частности, уравнение

$$y'' \pm Q(x)y = 0 \quad (5)$$

приводится к виду

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} \pm z + qz = 0, \quad q = -\frac{1}{4} \frac{Q''_{xx}}{Q^2} + \frac{5}{16} \frac{Q_x'^2}{Q^3}.$$

Уравнение

$$P(x)y'' + R(x)y' + Q(x)y = 0$$

с помощью преобразования Лиувилля

$$z = \varphi(x)y, \quad \xi = \int_a^x \sqrt{\frac{Q(t)}{P(t)}} dt, \\ \varphi(x) = \left[ \frac{Q(x)}{P(x)} \right]^{-1/4} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_a^x \frac{R(t)}{P(t)} dt \right\}$$

приводится к виду

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{Q}{P} \right)' \left( \frac{P}{Q} \right)^2 \frac{\varphi'_{xx}}{\varphi} - \frac{P\varphi''_{xxx}}{Q\varphi} \right] z = 0.$$

Преобразование Лиувилля приводит уравнения с коэффициентами, правильно (в определенном смысле) растущими на бесконечности, к уравнениям с почти постоянными коэффициентами.

Пример. Пусть  $Q(x) \sim ax^\alpha$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\alpha > -2$ ,  $a > 0$ , и эту асимптотику можно дважды дифференцировать, т. е.  $Q'(x) \sim \alpha ax^{\alpha-1}$ ,  $Q''(x) \sim \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ . Тогда

$$\xi(+\infty) = +\infty, \quad q = O(\xi^{-1-2/(\alpha+2)}),$$

т. е.  $q(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ ,  $q \in L_1(0, \infty)$ .

5. Система

$$u' = a_{11}(x)u + a_{12}(x)v, \quad v' = a_{21}(x)u + a_{22}(x)v$$

с помощью замены

$$u = \rho \cos \theta, \quad v = \rho \sin \theta \quad (6)$$

приводится к виду

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}) + \frac{1}{2}r \cos(2\theta + \psi), \\ \frac{\rho'}{\rho} &= \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) + \frac{1}{2}r \sin(2\theta + \psi). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} r^2 &= (a_{11} - a_{22})^2 + (a_{12} + a_{21})^2, \\ \cos \psi &= (a_{21} + a_{12})/r, \quad \sin \psi = (a_{11} - a_{22})/r. \end{aligned}$$

Преобразование (6) называется *преобразованием Прюфера*.

В частности, уравнение (3) со знаком + с помощью замены

$$y = (PQ)^{-1/4} \rho \sin \theta, \quad Py' = \rho \cos \theta$$

приводится к системе

$$\begin{aligned} \theta' &= \sqrt{\frac{Q}{P}} + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \frac{d}{dx} \ln(PQ), \\ \frac{\rho'}{\rho} &= -\frac{1}{2} \sin^2 \theta \frac{d}{dx} \ln(PQ). \end{aligned}$$

6. Подстановка

$$y = u_1 + u_2,$$

$$y' = \left( \sqrt{PQ} - \frac{P(PQ)'}{4PQ} \right) u_1 - \left( \sqrt{PQ} + \frac{P(PQ)'}{4PQ} \right) u_2 \quad (7)$$



приводит уравнение (3) (со знаком —) к системе

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \left[ \sqrt{\frac{Q}{P}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \frac{(PQ)'}{4PQ} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{8(PQ)^{5/2}} \left[ (P(\sqrt{PQ})')' \sqrt{PQ} - \frac{5}{4} P ((\sqrt{PQ})')^2 \right]. \quad (9)$$

Это преобразование обладает теми же свойствами, что и преобразование Лиувилля. В частности,  $\alpha_1 \in L_1(b, \infty)$  при некотором  $b$ , если  $P \equiv 1$ , а функция  $Q(x)$  имеет тот же вид, что и в примере. Но оно удобнее тем, что не требует замены независимой переменной и потому его можно применять для уравнений с комплекснозначными коэффициентами.

7. Будем искать решение уравнения (2), где  $Q(x) > 0$ , в виде

$$y = Q^{-1/4}(x) [A(x) e^{iS(x)} + B(x) e^{-iS(x)}], \quad S(x) = \int_a^x \sqrt{Q(t)} dt. \quad (10)$$

Выберем  $A, B$  так, чтобы

$$y' = iQ^{1/4}(x) [A(x) e^{iS(x)} - B(x) e^{-iS(x)}].$$

При дифференцировании решения  $y(x)$  вида (10) дифференцируются только экспоненты. Тогда  $A, B$  обязаны удовлетворять системе уравнений

$$A' = \frac{1}{4} \frac{Q'}{Q} e^{-2iS} B, \quad B' = \frac{1}{4} \frac{Q'}{Q} e^{2iS} A. \quad (11)$$

Если функция  $Q(x)$  медленно меняется при  $x \gg 1$  (например,  $Q(x) \rightarrow Q_0 > 0, Q'(x) \rightarrow 0$ ), то коэффициенты в правых частях (11) малы при  $x \gg 1$ . Введем функцию  $R(x) = B(x)/A(x)$ , которая в задачах распространения волн играет роль коэффициента отражения. Тогда  $R(x)$  удовлетворяет уравнению Риккати

$$R' = \frac{Q'}{4Q} (e^{2iS} - R^2 e^{-2iS}).$$

8. Рассмотрим систему типа Дирака:

$$Jy' + \begin{bmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) \end{bmatrix} y = \lambda y, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

с вещественными коэффициентами,  $q_{12}(x) = q_{21}(x)$ . Преобразование  $y = T(x)z$ , где

$$T(x) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi(x) = -\frac{1}{2} \int_a^x (q_{11}(t) + q_{22}(t)) dt,$$

приводит систему (12) к виду

$$\begin{aligned} Jy' + \begin{bmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{bmatrix} y &= \lambda y, \\ q(x) &= q_{12} \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(q_{22} - q_{11}) \sin 2\varphi, \\ p(x) &= \frac{1}{2}(q_{11} - q_{22}) \cos 2\varphi + q_{12} \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

## § 2. ВКБ-оценки

Рассмотрим уравнение

$$y'' - Q(x)y = 0 \quad (1)$$

на интервале  $I: a < x < b$ , который может быть конечным или бесконечным. Функция  $Q(x) \in C^2(I)$  — комплекснозначная и удовлетворяет условиям:

- 1)  $Q(x) \neq 0, x \in I$ ;
- 2) существует ветвь  $\sqrt{Q(x)}$  класса  $C^2(I)$  такая, что  $\operatorname{Re} \sqrt{Q(x)} \geq 0, x \in I$ .

Во всех формулах берется эта ветвь  $\sqrt{Q(x)}$ .

Поясним условие 2). Если функция  $Q(x)$  вещественна, то оно следует из 1). Пусть  $Q(x)$  — комплекснозначная функция; тогда уравнение  $z = Q(x), x \in I$ , определяет кривую  $\gamma$  в комплексной плоскости  $z$ . Ветвь функции  $w = \sqrt{z}$  — такая, что  $w(1) = 1$ , взаимно однозначно отображает плоскость  $z$  с разрезом по полуоси  $(-\infty, 0]$  на правую полуплоскость  $\operatorname{Re} w > 0$ . Следовательно, кривая  $\gamma$  не может пересекать полуось  $(-\infty, 0]$ .

1. ВКБ-оценки. Введем обозначения

$$S(x_0, x) = \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt, \quad (2)$$

$$\rho(x_0, x) = \left| \int_{x_0}^x |\alpha_1(t)| dt \right|, \quad (3)$$

где  $\alpha_1(x)$  имеет вид (9) § 1 при  $P(x) \equiv 1$ .

1.1. Решение  $y_1$ . Положим

$$\tilde{y}_1(x) = Q^{-1/4}(x) \exp\{S(x_0, x)\}. \quad (4)$$

Если выполнено условие

$$\rho(a, x) < \infty, \quad x \in I, \quad (5)$$

то уравнение (1) имеет решение  $y_1$  такое, что при  $x \in I$

$$\left| \frac{y_1(x)}{\tilde{y}_1(x)} - 1 \right| \leq 2(e^{2\rho(a, x)} - 1), \quad (6)$$

Оценки вида (6), (8), (11) называются *ВКБ-оценками*. В случае  $Q(x) \equiv (ax + b)^{-4}$  оценка (6) точна.

Решение  $y_1$  удовлетворяет краевому условию

$$\lim_{x \rightarrow a} y_1'(x) / \left[ \left( \sqrt{Q(x)} - \frac{Q'(x)}{4Q(x)} \right) y_1(x) \right] = 0. \quad (7)$$

Для производной  $y_1'(x)$  при  $x \in I$  справедлива оценка

$$\left| \frac{y_1'(x)}{\sqrt{Q(x)} \tilde{y}_1(x)} - 1 \right| \leq \frac{1}{4} \left| \frac{Q'(x)}{Q^{3/2}(x)} \right| + 4 \left( 1 + \frac{1}{4} \left| \frac{Q'(x)}{Q^{3/2}(x)} \right| \right) (e^{2\rho(a, x)} - 1). \quad (8)$$

1.2. Решение  $y_2$ . Положим

$$\tilde{y}_2(x) = Q^{-1/4}(x) e^{-S(x_0, x)} \quad (9)$$

и пусть выполнено условие

$$\rho(x, ) < \infty, \quad x \in I. \quad (10)$$

Тогда уравнение (1) имеет решение  $y_2$  такое, что при  $x \in I$  выполняются оценки

$$\left| \frac{y_2(x)}{\tilde{y}_2(x)} - 1 \right| \leq 2 (e^{2\rho(x, b)} - 1), \quad (11)$$

$$\left| \frac{y_2'(x)}{\sqrt{Q(x)} \tilde{y}_2(x)} + 1 \right| \leq \frac{1}{4} \left| \frac{Q'(x)}{Q^{3/2}(x)} \right| + 4 \left( 1 + \frac{1}{4} \left| \frac{Q'(x)}{Q^{3/2}(x)} \right| \right) (e^{2\rho(x, b)} - 1).$$

Решение  $y_2$  удовлетворяет краевому условию

$$\lim_{x \rightarrow b} y_2'(x) / \left[ \left( \sqrt{Q(x)} + \frac{Q'(x)}{4Q(x)} \right) y_2(x) \right] = -1. \quad (12)$$

Из ВКБ-оценок немедленно вытекают асимптотические формулы для решений:

$$y_1(x) \sim \tilde{y}_1(x), \quad x \rightarrow a; \quad y_2(x) \sim \tilde{y}_2(x), \quad x \rightarrow b.$$

**2. Интегральные уравнения для решений.** Построим решение  $y_1$ , сведя уравнение (1) к системе интегральных уравнений. Подстановка

$$y = \tilde{y}_1(x)(u_1 + u_2), \quad (13)$$

$$y' = \tilde{y}_1(x) \left[ \left( \sqrt{Q} - \frac{Q'}{4Q} \right) u_1 - \left( \sqrt{Q} + \frac{Q'}{4Q} \right) u_2 \right],$$

как показано в § 1, сводит уравнение (1) к системе

$$u_1' = \alpha_1(x)(u_1 + u_2), \quad u_2' = 2\sqrt{Q(x)} u_2 = -\alpha_1(x)(u_1 + u_2).$$

Эта система эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u_1(x) &= c_1 + \int_a^x \alpha_1(t) (u_1(t) + u_2(t)) dt, \\ u_2(x) &= c_2 - \int_a^x e^{2S(x,t)} \alpha_1(t) (u_1(t) + u_2(t)) dt, \end{aligned} \quad (14)$$

или, в операторной форме,

$$u = u^0 + Ku, \quad u = (u_1, u_2)^T,$$

где  $K$  — интегральный оператор из (14). Так как  $a \leq t \leq x$ , то из условия 2) следует, что  $\operatorname{Re} S(x, t) \leq 0$ , и потому

$$|\exp \{2S(x, t)\}| \leq 1. \quad (15)$$

Это приводит к оценкам

$$|(Ku)_j(x)| \leq \int_a^x |\alpha_1(t)| (|u_1(t)| + |u_2(t)|) dt, \quad j = 1, 2.$$

Положим  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$  и применим к системе (14) метод последовательных приближений:

$$u^{n+1} = u^0 + Ku^n.$$

Этот метод сходится и дает решение  $u(x)$  такое, что

$$|u_j(x) - c_j| \leq \exp \{2\rho(a, x)\} - 1, \quad j = 1, 2.$$

Из этой оценки и из (13) следуют ВКБ-оценки (6), (8). Кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow a} u_1(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a} u_2(x) = 0,$$

что доказывает (7). Решение  $y_2$  строится аналогично.

Если функция  $Q(x)$  вещественна, то ВКБ-оценки можно получить, применив к уравнению (1) преобразование Лиувилля (§ 1) и сведя полученное уравнение к интегральному.

**3. Уравнение в самосопряженной форме.** Рассмотрим уравнение

$$(P(x) y')' - Q(x) y = 0. \quad (16)$$

Пусть  $P(x), Q(x) \in C^2(I)$  и выполнены условия:

- 1)  $P(x) \neq 0, Q(x) \neq 0, x \in I$ ;
- 2) существует ветвь  $\sqrt{Q(x)/P(x)}$  класса  $C^2(I)$  такая, что  $\operatorname{Re} \sqrt{Q(x)/P(x)} \geq 0, x \in I$ .

Введем обозначения

$$S(x_0, x) = \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{Q(t)}{P(t)}} dt,$$

$$\tilde{y}_1(x) = [P(x)Q(x)]^{-1/4} \exp\{S(x_0, x)\},$$

$$\rho(x_0, x) = \left| \int_{x_0}^x |\alpha_1(t)| dt \right|,$$

где  $\alpha_1(x)$  имеет вид (9) § 1. Уравнение (16) имеет решение  $y_1(x)$ , для которого при  $x \in I$  справедлива оценка (6). Оценки, аналогичные (8), (11), также имеют место.

### § 3. Асимптотика решений уравнения второго порядка при больших значениях параметра

1. Двучленное уравнение. Рассмотрим уравнение

$$y'' - \lambda^2 q(x) y = 0 \quad (1)$$

на отрезке  $I = [a, b]$ . Здесь  $\lambda > 0$  — большой параметр,  $q(x)$  — комплекснозначная функция,  $q(x) \in C^\infty(I)$ .

Уравнение (1) — это уравнение с малым параметром  $\varepsilon = \lambda^{-1}$  при старшей производной:

$$\varepsilon^2 y'' - q(x) y = 0,$$

причем зависимость коэффициентов уравнения от  $\varepsilon$  имеет простейший вид. В этом параграфе вначале все результаты об асимптотике решений будут сформулированы для уравнения (1), а затем уже для случая более сложной зависимости коэффициентов от параметра.

1. Формальные асимптотические решения (ФАР). Если  $q \neq 0$  — постоянная, то уравнение (1) имеет два линейно независимых решения  $y_{1,2} = \exp\{\pm \lambda \sqrt{q} x\}$ . Если  $q(x) \neq \text{const}$ , то будем искать решение уравнения (1) в виде асимптотического ряда

$$y = e^{\lambda S(x)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \lambda^{-k}.$$

Удобно представить этот ряд в виде

$$y = \exp\left\{ \int_{x_0}^x \sum_{k=-1}^{\infty} \lambda^{-k} \alpha_k(t) dt \right\}. \quad (2)$$

Подстановка  $y'/y = w$  приводит уравнение (1) к уравнению Риккати

$$w' + w^2 - \lambda^2 q(x) = 0.$$

Подставив в это уравнение выражение (2), получим тождество

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \lambda^{-k} \alpha'_k(x) + \left( \sum_{k=-1}^{\infty} \lambda^{-k} \alpha_k(x) \right)^2 - \lambda^2 q(x) = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при степенях  $\lambda^{-1}$ , получаем рекуррентную систему для неизвестных функций  $\alpha_{-1}(x)$ ,  $\alpha_0(x)$ ,  $\dots$ . Все выкладки носят формальный характер.

Первое из этих уравнений есть  $\alpha_{-1}^2 = q$ , так что  $\alpha_{-1} = \pm \sqrt{q}$ . При  $\alpha_{-1} = \sqrt{q}$  (выбор ветви корня будет указан в п. 2) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_{-1}(x) &= \sqrt{q(x)}, & \alpha_0(x) &= -\frac{q'(x)}{4q(x)}, \\ \alpha_1(x) &= \frac{1}{8} \frac{q''(x)}{q^{3/2}(x)} - \frac{5}{32} \frac{q'^2(x)}{q^{5/2}(x)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Обратите внимание, что функция  $\alpha_1(x)$  та же, что и в § 1, (9).

Для последующих функций  $\alpha_k(x)$  получаем рекуррентные соотношения

$$\alpha_{k+1}(x) = -\frac{1}{2\sqrt{q(x)}} \left( \alpha'_k(x) + \sum_{j=0}^k \alpha_j(x) \alpha_{k-j}(x) \right). \quad (4)$$

Если же  $\alpha_{-1}(x) = -\sqrt{q(x)}$ , то в формулах (2), (3) следует всюду заменить  $\sqrt{q}$  на  $-\sqrt{q}$ .

Уравнение (4) имеет, таким образом, два формальных асимптотических решения (ФАР):

$$\begin{aligned} y_1(x, \lambda) &= q^{-1/4}(x) \exp \left\{ \lambda \int^x \sqrt{q(t)} dt + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \int^x \alpha_k(t) dt \right\}, \\ y_2(x, \lambda) &= q^{-1/4}(x) \exp \left\{ -\lambda \int^x \sqrt{q(t)} dx + \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda)^{-k} \int^x \alpha_k(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Эти асимптотические ряды в двух случаях обрываются.

А. Если  $q(x) = (ax + b)^{-1}$ , то  $\alpha_k(x) \equiv 0$  при  $k \geq 1$ . Тогда формулы (5) дают точные решения уравнения (1):

$$y_{1,2} = q^{-1/4}(x) \exp \left\{ \pm \lambda \int^x \sqrt{q(t)} dt \right\}.$$

Б. Если  $q(x) = (ax^2 + bx + c)^{-2}$ , то  $\alpha_k(x) \equiv 0$  при  $k \geq 2$ . Уравнение (1) в этом случае также интегрируется в квадратурах, но формулы (5) не дают точных решений, если  $a \neq 0$ .

Формулы (5), очевидно, непригодны в точках, в которых функция  $q(x)$  обращается в нуль. Действительно, если  $q(x_0) = 0$ , то правые части в формуле (5) обращаются в бесконечность при  $x = x_0$ , в то время как все решения уравнения (1) — гладкие функции.

Нули функции  $q(x)$  называются *точками поворота* (или *точками перехода* — transition points) уравнения (1). В точке поворота совпадают корни характеристического уравнения  $p^2 - q(x) = 0$ .

1.2. **Главный член асимптотики.** Будем предполагать, что  $q(x) \in C^2(I)$ , и введем условия:

1) уравнение (1) не имеет точек поворота, т. е.  $q(x) \neq 0$ ,  $x \in I$ ;

2) существует ветвь  $\sqrt{q(x)}$  класса  $C^2(I)$  такая, что  $\operatorname{Re} \sqrt{q(x)} \geq 0$ ,  $x \in I$ .

ФАР, как следует из п. 1.1, существуют и тогда, когда условие 2) не выполняется. Это условие не является необходимым для существования решений, имеющих АР вида (5). Однако его нарушение может привести к тому, что такие решения не существуют, даже если  $q(x)$  — аналитическая функция (§ 8).

Введем обозначение

$$S(x_0, x) = \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt. \quad (6)$$

Уравнение (1) имеет два решения  $y_1, y_2$  вида

$$y_{1,2}(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \exp\{\pm \lambda S(x_0, x)\} [1 + O(\lambda^{-1})], \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Оценка остаточного члена равномерна по  $x \in I$ , т. е.  $|O(\lambda^{-1})| \leq C\lambda^{-1}$  при  $\lambda \geq 1$ , где  $C$  не зависит от  $x$ .

Асимптотическую формулу (7) можно два раза дифференцировать по  $x$ , т. е.

$$y_{1,2}^{(j)}(x, \lambda) = (\pm \lambda \sqrt{q(x)})^j q^{-1/4}(x) \exp\{\pm \lambda S(x_0, x)\} [1 + O(\lambda^{-1})], \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad j = 1, 2. \quad (8)$$

Оценка остаточного члена равномерна по  $x \in I$ . Решения  $y_1, y_2$  линейно независимы при  $\lambda \gg 1$ .

Асимптотическая формула (7) носит названия: *ВКБ-приближение*, *квазиклассическое приближение*, *коротковолновое приближение*, *высокочастотное приближение* и т. д.

Отметим, что в качестве  $y_1, y_2$  можно взять решения, удовлетворяющие данным Коши:

$$\begin{aligned} y_1(a, \lambda) &= A, & y_1'(a, \lambda) &= A[\lambda \sqrt{q(a)} - q'(a)/(4q(a))], \\ y_2(b, \lambda) &= B, & y_2'(b, \lambda) &= -B[\lambda \sqrt{q(b)} + q'(b)/(4q(b))], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $A, B$  — постоянные.

Все утверждения п. 1, 2 вытекают из ВКБ-оценок (§ 2). Действительно, сравнивая уравнения (1) из § 2 и 3, получаем

$$\begin{aligned} Q(x) &= \lambda^2 q(x), & \alpha_1(x; Q) &= \lambda^{-1} \alpha_1(x; q), \\ o(x_0, x; Q) &= \lambda^{-1} o(x_0, x; q). \end{aligned}$$

Здесь функция  $\alpha_1(x; q)$  вычислена по функции  $q(x)$  (см. (3)), а функция  $\alpha_1(x; Q)$  — по функции  $Q(x)$ . Из формулы (6) § 2 получаем оценку

$$\left| \frac{y_1(x, \lambda)}{\bar{y}_1(x, \lambda; a)} - 1 \right| \leq 2 \left( \exp \left\{ \frac{2}{\lambda} \rho(a, x; q) \right\} - 1 \right).$$

Правая часть этой оценки имеет порядок  $O(\lambda^{-1})$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Из формул (7), (8), (11), (12) § 2 следуют формулы (7) — (9).

1.3. Структура решений при вещественных  $q(x)$ . Поведение решений существенно зависит от знака функции  $q(x)$ .

А. Неосциллирующие решения:  $q(x) > 0$ . Возьмем ВКБ-приближения в виде

$$\begin{aligned} y_1(x, \lambda) &\sim q^{-1/4}(x) \exp \{ \lambda S(a, x) \}, \\ y_2(x, \lambda) &\sim q^{-1/4}(x) \exp \{ -\lambda S(x, b) \} \end{aligned}$$

и фиксируем  $\lambda \gg 1$ . Решение  $y_1$  равно  $q^{-1/4}(a) + O(\lambda^{-1})$  при  $x = a$ , строго монотонно возрастает и экспоненциально велико при  $x = b$ . Решение  $y_2$  обладает теми же свойствами, если поменять местами  $a$  и  $b$ .

Б. Осциллирующие решения:  $q(x) < 0$ . Удобно вместо уравнения (1) рассмотреть уравнение

$$y'' + \lambda^2 q(x) y = 0, \quad (10)$$

где  $q(x) > 0$ . Это уравнение имеет ФСР вида

$$y_{1,2}(x, \lambda) \sim q^{-1/4} \exp \{ \pm i \lambda S(x_0, x) \},$$

которые можно выбрать комплексно сопряженными:  $y_2 \equiv \bar{y}_1$ . Вещественные решения  $y_3 = \operatorname{Re} y_1$ ,  $y_4 = \operatorname{Im} y_1$  образуют ФСР и имеют вид

$$\begin{aligned} y_3(x, \lambda) &= q^{-1/4}(x) \cos [\lambda S(x_0, x)] + O(\lambda^{-1}), \\ y_4(x, \lambda) &= q^{-1/4}(x) \sin [\lambda S(x_0, x)] + O(\lambda^{-1}), \end{aligned}$$

т. е. являются сильно осциллирующими функциями.

1.4. Асимптотические разложения. Пусть  $q(x) \in C^\infty(I)$  и условия 1), 2) выполнены. Тогда уравнение (1) имеет два решения вида

$$\begin{aligned} y_{1,2}(x, \lambda) &= q^{-1/4}(x) \exp \{ \pm \lambda S(x_0, x) \} \times \\ &\times \left[ 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-k} a_k^\pm(x) + O(\lambda^{-N}) \right], \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (11) \end{aligned}$$

Здесь  $N \geq 1$  — любое, оценка остаточного члена равномерна по  $x \in I$ . Асимптотические формулы (10) можно дифференцировать по  $x$  и по  $\lambda$  любое число раз, с сохранением равномерной по  $x$  оценки остаточного члена,



Коэффициенты  $a_k^\pm(x)$  определяются из формальных тождеств

$$\exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\pm \lambda)^{-k} \int_{x_0}^x \alpha_k(t) dt \right\} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} a_k^\pm(x).$$

Разложив экспоненты в формальные ряды по степеням  $\lambda^{-1}$ , получим функции  $a_k^\pm(x)$ . Выпишем АР с точностью до  $O(\lambda^{-2})$ :

$$y_{1,2}(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \exp \left\{ \pm \lambda \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt \right\} \times \\ \times \left[ 1 \pm \lambda^{-1} \int_{x_0}^x \left( \frac{1}{8} \frac{q''(t)}{q^{3/2}(t)} - \frac{5}{32} \frac{q'^2(t)}{q^{5/2}(t)} \right) dt + O(\lambda^{-2}) \right].$$

В качестве  $y_{1,2}$  можно взять решения, удовлетворяющие данным Коши:

$$y_1(a) = A, \quad y_1'(a) = A \left[ \lambda \sqrt{q(a)} - \frac{q'(a)}{4q(a)} + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-k} \alpha_k(a) \right], \quad (12)$$

$$y_2(b) = B, \quad y_2'(b) = B \left[ -\lambda \sqrt{q(b)} - \frac{q'(b)}{4q(b)} + \sum_{k=1}^{N-1} (-\lambda)^{-k} \alpha_k(b) \right].$$

1.5. Дополнительные параметры и комплексные  $\lambda$ . Сформулируем теорему об аналитической зависимости решений линейных дифференциальных уравнений от параметров. Пусть  $I$  — отрезок оси  $x$ ,  $D$  — область в комплексной плоскости. Рассмотрим задачу Коши для системы из  $n$  уравнений:

$$y' = A(x, \mu) y, \quad y(x_0, \mu) = y_0(\mu). \quad (13)$$

**Теорема.** Пусть матрица-функция  $A(x, \mu)$  непрерывна при  $(x, \mu) \in I \times D$  и голоморфна по  $\mu$  в области  $D$  при каждом фиксированном  $x \in I$ . Пусть вектор-функция  $y_0(\mu)$  голоморфна в области  $D$ . Тогда решение  $y(x, \mu)$  задачи Коши (13) голоморфно по  $\mu$  в области  $D$  при каждом фиксированном  $x \in I$ .

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка:

$$y^{(n)} + q_1(x, \mu) y^{(n-1)} + \dots + q_n(x, \mu) y = 0, \\ y(x_0, \mu) = y_0(\mu), \quad y'(x_0, \mu) = y_1(\mu), \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0, \mu) = \\ = y_{n-1}(\mu).$$

Если коэффициенты  $q_j(x, \mu)$  и начальные данные  $y_j(\mu)$  обладают теми же свойствами, что и  $A(x, \mu)$ ,  $y_0(\mu)$ , то решение задачи Коши  $y(x, \mu)$  голоморфно по  $\mu$  в области  $D$  при каждом фиксированном  $x \in I$ .

В частности, решения  $y_{1,2}(x, \lambda)$ , удовлетворяющие данным Коши (12), — целые функции  $\lambda$  при каждом фиксированном  $x \in I$ , если  $A = B = 1$ .

Рассмотрим уравнение

$$y'' - \lambda^2 q(x, \mu) y = 0. \quad (14)$$

А.  $\mu$  — вещественный параметр,  $D$  — интервал вещественной оси. В этом случае предполагается, что  $q(x, \mu) \in C^\infty(I \times D)$ .

Б.  $\mu$  — комплексный параметр,  $D$  — область на комплексной плоскости  $\mu$ . В этом случае дополнительно предполагается, что функция  $q(x, \mu)$  голоморфна по  $\mu$  в области  $D$  при каждом фиксированном  $x \in I$ .

Все результаты, сформулированные выше для уравнения (1), полностью переносятся на уравнение (14), если все необходимые условия выполняются равномерно по  $\mu$ . Введем условия:

1)  $|q(x, \mu)| \geq \delta > 0$  при  $(x, \mu) \in I \times D$ , где  $\delta$  не зависит от  $x, \mu$ ;

2)  $\operatorname{Re} \sqrt{q(x, \mu)} \geq 0$  при  $(x, \mu) \in I \times D$ ;

3) все производные функции  $q(x, \mu)$  равномерно ограничены по  $x, \mu$ , т. е.

$$\left| \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial \mu^n} q(x, \mu) \right| \leq C_{mn},$$

при  $(x, \mu) \in I \times D$ , где постоянные  $C_{mn}$  не зависят от  $x, \mu$ .

Тогда существуют решения  $y_{1,2}(x, \lambda, \mu)$  вида (11); во всех формулах, разумеется, следует заменить  $q(x)$  на  $q(x, \mu)$ . Формулы (11) можно дифференцировать по  $x, \lambda, \mu$  любое число раз, с сохранением равномерной по  $x, \mu$  оценки остаточного члена. Пусть  $\mu$  — комплексный параметр; тогда решения  $y_{1,2}$ , удовлетворяющие данным Коши (12), при каждом фиксированном  $x \in I$  являются голоморфными функциями от  $\lambda, \mu$  при всех  $\lambda$  и при  $\mu \in D$ .

Пусть  $G$  — неограниченная область в комплексной плоскости  $\lambda$ . Асимптотические формулы (11) для решений остаются справедливыми при  $\lambda \rightarrow \infty, \lambda \in G$ , если условие 2) заменить условием

2\*)  $\operatorname{Re}(\lambda \sqrt{q(x, \mu)})$  не меняет знак при  $\lambda \in G, |\lambda| \geq \lambda_0 > 0, \mu \in D$ .

**Примеры.** 1. Пусть  $q(x) > 0$  при  $x \in I$  и  $y_1(x, \lambda)$  — решение уравнения (1), удовлетворяющее данным Коши (12), где  $A = B = 1$ . Тогда  $\operatorname{Re}(\lambda \sqrt{q(x)}) \geq 0$  при  $x \in I, \operatorname{Re} \lambda \geq 0$ , так что асимптотическая формула (11) пригодна при  $|\lambda| \rightarrow \infty, \operatorname{Re} \lambda \geq 0$ . Покажем, что эта формула пригодна при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  и при любом  $\arg \lambda$ . Функция  $y_1(x, \lambda)$  вещественна при вещественных  $\lambda$ ; поэтому  $y_1(x, \bar{\lambda}) = \overline{y_1(x, \lambda)}$ . Все коэффициенты при степенях  $\lambda^{-1}$  в разложении (11) также вещественны при вещественных  $\lambda$ , что и доказывает высказанное утверждение. Все это верно и для решения  $y_2(x, \lambda)$ .

2. Пусть  $q(x) > 0$  и  $y_1(x, \lambda)$  — решение уравнения (10), для которого справедливо АР (11). Так как  $\operatorname{Re}(i\lambda\sqrt{q(x)}) > 0$  при  $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$ , то эта асимптотика справедлива при  $|\lambda| \rightarrow \infty, \operatorname{Im} \lambda \geq 0$ .

В качестве  $y_2$  можно взять решение  $y_2(x, \lambda) = y_1(x, \bar{\lambda})$ . Обозначим эту ФСР  $\{y_1^+(x, \lambda), y_2^+(x, \lambda)\}$ . Аналогично, существует ФСР  $\{y_1^-(x, \lambda), y_2^-(x, \lambda)\}$  уравнения (10), для которой АР (11) справедливо при  $|\lambda| \rightarrow \infty, \operatorname{Im} \lambda \leq 0$ . Эти ФСР, вообще говоря, не совпадают.

1.6. Более сложная зависимость от  $\lambda$ . Двучленное уравнение с малым параметром при второй производной имеет вид

$$\varepsilon^2 y'' - q(x, \varepsilon) y = 0, \quad (15)$$

где  $\varepsilon = \lambda^{-1}$ . Стандартные предположения относительно зависимости функции  $q$  от параметра  $\varepsilon$  таковы. Пусть  $S$  — сектор в комплексной плоскости  $\varepsilon$  вида  $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0, -\alpha < \arg \varepsilon < \beta$ , где  $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$ .

1.  $q(x, \varepsilon) \in C^r(I \times S)$ .

2. Функция  $q(x, \varepsilon)$  голоморфна по  $\varepsilon$  в секторе  $S$  при каждом фиксированном  $x \in I$ .

3. Справедливо асимптотическое разложение

$$q(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} q_k(x) \varepsilon^k, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \in S,$$

равномерно по  $x \in I$  в каждом собственном подсекторе  $S'$  сектора  $S$  (т. е. при  $-\alpha < -\alpha' \leq \arg \varepsilon \leq \beta' < \beta$ ).

Если параметр  $\varepsilon$  принимает только вещественные значения, то вместо  $S$  берется интервал  $J: 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  и условие 2 отпадает. Условия 1), 2) принимают вид:

1)  $q_0(x) \neq 0, x \in J$ ;

2)  $\operatorname{Re}(\varepsilon^{-1}\sqrt{q_0(x)}) > 0, x \in I, \varepsilon \in S$ .

Тогда уравнение (15) имеет ФСР  $y_1(x, \varepsilon), y_2(x, \varepsilon)$ , для которых справедливо АР вида (11) при  $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \in S$ . Это АР равномерно по  $x \in I$ , если  $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \in S'$ . Главный член асимптотики имеет вид

$$y_{1,2}(x, \varepsilon) = q_0^{-1/4}(x) \exp \left\{ \pm \varepsilon^{-1} \int_{x_0}^x \sqrt{q_0(t)} dt + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{q_1(t)}{\sqrt{q_0(t)}} dt \right\} [1 + O(\varepsilon)].$$

Асимптотику решений уравнения (15) можно вычислять тремя способами.

1. ФАР ищутся в виде (2), т. е.

$$y = \exp \left\{ \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k \int \beta_j(t) dt \right\}.$$

Функции  $\beta_j(x)$  определяются, как и в п. 1, из рекуррентных соотношений.

2. Можно воспользоваться формулами (11) и переразложить входящие в них функции  $\alpha_j(x, \varepsilon)$  в АР по степеням  $\varepsilon$ .

В силу единственности АР формулы, полученные этими способами, совпадут.

Если не делать переразложения, то эти подходы приводят соответственно к АР вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \varepsilon^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x, \varepsilon) \varepsilon^k,$$

т. е. к АР в смысле Пуанкаре и в смысле Эрдейи. Второе из этих разложений, вообще говоря, предпочтительнее, так как формулы для функций  $\psi_k$  проще, чем для функций  $\varphi_k$ . По этой причине получение АР решения именно по степеням  $\varepsilon$  не всегда оправдано.

АР по асимптотическим последовательностям вида  $\{\varepsilon^k \psi_k(x, \varepsilon)\}$ , где функции  $\psi_k$  заранее не заданы, неоднозначно. Можно улучшить ВКБ-приближение за счет удачного выбора функций  $\psi_k$ .

3. Для решений уравнения (1) главный член асимптотики дается формулой (7) с остаточным членом  $O(\lambda^{-1})$ . Если заменить  $q(x)$  на функцию вида  $\tilde{q}(x) = q(x)[1 + \lambda^{-2}\beta(x)]$ , где  $\beta(x)$  — любая гладкая функция, то главный член асимптотики не изменится. Выберем функцию  $\beta(x)$  так, чтобы

$$y_{1,2}(x, \lambda) = \tilde{q}^{-1/4}(x) \exp\left\{\pm \lambda \int_{x_0}^x \sqrt{\tilde{q}(t)} dt\right\} [1 + O(\lambda^{-2})].$$

Для этого должно выполняться соотношение

$$\pm \lambda \sqrt{q} - \frac{q'}{4q} \pm \frac{\alpha_1}{\lambda} = \pm \lambda \sqrt{\tilde{q}} - \frac{\tilde{q}'}{4\tilde{q}} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

откуда находим  $\beta = 2\alpha_1/\sqrt{q}$ . Следовательно, уравнение (1) имеет решения вида

$$y_{1,2}(x, \lambda) = [\tilde{q}(x, \lambda)]^{-1/4} \exp\left\{\pm \lambda \int_{x_0}^x \sqrt{\tilde{q}(t, \lambda)} dt\right\} [1 + O(\lambda^{-2})].$$

Главный член АР (7) точно удовлетворяет уравнению (1) только при  $q(x) = (ax + b)^{-4}$ . Главный член полученного разложения точно удовлетворяет уравнению (1), также и при  $q(x) = (ax^2 + bx + c)^{-4}$ . При этом  $\beta(x) \equiv \text{const}$ .

Можно, очевидно, так подобрать  $\tilde{q}$ , что «главный» член асимптотики давал бы АР с точностью до  $O(\lambda^{-N})$  при любом  $N$ .

## 2. Общее уравнение второго порядка.

2.1. Асимптотика решений. Рассмотрим уравнение

$$y'' + \lambda p(x) y' + \lambda^2 q(x) y = 0 \quad (16)$$

на отрезке  $I = [a, b]$ , где  $p(x), q(x) \in C^\infty(I)$ . Корни характеристического уравнения равны

$$p_{1,2}(x) = \frac{1}{2}(-p(x) \pm \sqrt{D(x)}), \quad D(x) = p^2(x) - 4q(x).$$

Точка  $x_0 \in I$  называется *точкой поворота* уравнения (16), если при  $x = x_0$  совпадают корни характеристического уравнения. Следовательно, точки поворота — корни уравнения

$$D(x) \equiv p^2(x) - 4q(x) = 0. \quad (17)$$

Введем условия:

1) Уравнение (16) не имеет точек поворота, т. е.  $D(x) \neq 0$  при  $x \in I$ .

2) Существует ветвь  $\sqrt{D(x)}$  такая, что  $\operatorname{Re} \sqrt{D(x)} \geq 0, x \in I$ . Тогда существуют решения  $y_{1,2}(x, \lambda)$  уравнения (16) такие, что

$$y_{1,2}(x, \lambda) = (D(x))^{-1/4} \exp \left\{ \pm \frac{\lambda}{2} \int_{x_0}^x \sqrt{D(t)} dt - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{p'(t)}{\sqrt{D(t)}} dt \right\} [1 + O(\lambda^{-1})], \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (18)$$

Свойства этой асимптотики те же, что и в п. 1.4. Существуют АР с точностью до  $O(\lambda^{-N})$ , т. е. в (18) выражение в квадратных скобках можно заменить суммой

$$1 + \sum_{k=1}^{N-1} a_{kj}(x) \lambda^{-j} + O(\lambda^{-N}), \quad j=1, 2.$$

В качестве  $y_{1,2}$  можно взять решения, удовлетворяющие данным Коши вида (12).

Уравнение второго порядка

$$y'' + 2\lambda a(x, \mu) y' + \lambda^2 b(x, \mu) y = 0 \quad (19)$$

с помощью подстановки  $y = \exp \left\{ -\lambda \int^x a dt \right\} z$  сводится к двухчленному уравнению

$$z'' + \lambda^2 [b(x, \mu) - a^2(x, \mu) - \lambda^{-1} a'(x, \mu)] z = 0, \quad (20)$$

к которому применимы все приведенные в п. 1 результаты. Мы не будем их повторять; отметим только, что точки поворота уравнений (16) и (20) не совпадают, но близки при  $\lambda \gg 1$ . Пусть, для простоты, коэффициенты  $a, b$  не зависят от  $\mu$ . Точки поворота уравнения (20) — корни уравнения

$$D(x) - \lambda^{-1} a'(x) = 0.$$

Если  $x_0$  — точка поворота уравнения (1), то уравнение (20) имеет точку поворота  $x_0(\lambda)$  вида  $x_0(\lambda) = x_0 + O(\lambda^{-1})$ . Этот факт носит

общий характер: точки поворота не инвариантны относительно замены переменной и неизвестной функции, но асимптотически инвариантны.

2.2 Уравнение в самосопряженной форме. Рассмотрим уравнение

$$(P(x)y')' - \lambda^2 Q(x)y = 0, \quad (21)$$

где  $P, Q \in C^\infty(I)$ ,  $P(x) \neq 0$ . Уравнение

$$P(x)p^2 - Q(x) = 0$$

называется *характеристическим*, так что точки поворота уравнения (21) — нули функции  $Q(x)$ . Условия 1), 2) принимают вид

$$Q(x) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \sqrt{Q(x)/P(x)} \geq 0, \quad x \in I.$$

Выпишем главные члены асимптотики решений:

$$y_{1,2}(x, \lambda) = [P(x)Q(x)]^{-1/4} \exp \left\{ \pm \lambda \int_x^x \sqrt{\frac{Q(t)}{P(t)}} dt \right\} [1 + O(\lambda^{-1})]. \quad (22)$$

3. Замечание об асимптотических рядах. В формуле (11) приведено конечное число членов АР решений. В то же время во многих работах по асимптотическим методам приводятся асимптотические ряды для решений. Применительно к уравнению (1), в условиях п. 1.4, эти результаты формулируются следующим образом.

*Существует решение  $y_1(x, \lambda)$  уравнения (1), которое разлагается в асимптотический ряд (5) при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , равномерно по  $x \in I$ .*

К сожалению, такое решение строится неконструктивно. В конечном счете доказательство существования такого решения опирается на следующий факт.

**Т е о р е м а** (Нёрлунд). Пусть даны произвольный формальный ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  и сектор  $S$  вида  $0 < |z| < r$ ,  $\alpha < \arg z < \beta$ ,  $0 < \beta - \alpha < 2\pi$ . Тогда существует функция  $f(z)$ , голоморфная в секторе  $S$  и имеющая этот ряд своим асимптотическим разложением:

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \rightarrow 0, \quad z \in S.$$

Решение  $y_1(x, \lambda)$ , для которого справедливо АР (11), строится конструктивно: это решение задачи Коши (12) для уравнения (1). Можно получить интегральное уравнение для этого решения. Сделаем подстановку

$$y = u_1 + u_2,$$

$$y' = \left[ \sum_{j=-1}^{N-1} \lambda^{-j} \alpha_j(x) u_1 + \sum_{j=-1}^{N-1} (-\lambda^{-j} \alpha_j(x) u_2) \right],$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \left[ \sum_{j=1}^{N-1} \lambda^{-j} \Lambda_j(x) + \lambda^{-N} Q_N(x, \lambda^{-1}) \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\Lambda_j(x) = \text{diag}(\alpha_j(x), (-1)^j \alpha_j(x))$ , элементы матрицы-функции  $Q_N$  ограничены при  $x \in I$ ,  $|\lambda| \geq \lambda_0 > 0$ . Полученная система сводится к системе интегральных уравнений тем же способом, что и в § 2, п. 2. Заметим, что и эта система, и данные Коши (12) зависят от  $N$ , так что решение  $y_1(x, \lambda)$  зависит от номера  $N$ . Обозначим это решение  $y_{1N}(x, \lambda)$ .

Решение  $y_{1N}(x, \lambda)$  не разлагается в асимптотический ряд вида (5) на отрезке  $I$ . Точнее, такое АР существует, но оно не является равномерным по  $x$ : вблизи точки  $x = a$  АР имеет характер пограничного слоя.

Покажем это при  $N = 1$ . Рассмотрим систему интегральных уравнений (14) § 2, где  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$ . Нулевое приближение возьмем в виде  $u_1^0(x) \equiv 1$ ,  $u_2^0(x) \equiv 0$ ; тогда первое приближение имеет вид

$$u_1^1(x) = 1 + \lambda^{-1} \int_a^x \alpha_1(t) dt,$$

$$u_2^1(x) = -\lambda^{-1} \int_a^x \alpha_1(t) \exp\{2\lambda S(x, t)\} dt.$$

Пусть  $q(x) > 0$  для простоты; тогда функция  $S(x, t)$  как функция  $t$  достигает наибольшего значения на пути интегрирования в точке  $t = a$ . Интегрирование по частям приводит к равномерному по  $x \in I$  асимптотическому разложению

$$u_2^1(x) = - \sum_{k=1}^N \lambda^{-k-1} L^{k-1} \left( \frac{\alpha_1(x)}{2\sqrt{q(x)}} \right) +$$

$$+ \exp\{2\lambda S(x, a)\} \sum_{k=1}^N \lambda^{-k-1} \left[ L^{k-1} \left( \frac{\alpha_1(x)}{2\sqrt{q(x)}} \right) \right] \Big|_{x=a} + O(\lambda^{-N-1}), \quad (23)$$

$$L = - \frac{1}{2\sqrt{q(x)}} \frac{d}{dx}.$$

Функция  $F = \exp\{2\lambda S(x, a)\}$  — типичная функция типа пограничного слоя, так как

$$F(a, \lambda) = 1; \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(x, \lambda) = 0, \quad x \neq a,$$

и заметно отлична от нуля только в малой, порядка  $\lambda^{-1}$ , окрестности точки  $a$ .

Мы ограничились исследованием первого приближения, но можно показать, что для решений  $u_1, u_2$  интегральных уравнений справедливы асимптотические разложения вида (23).

#### § 4. Системы из двух уравнений, содержащие большой параметр

**1. Формальные асимптотические решения.** Рассмотрим систему

$y_1' = \lambda [a_{11}(x) y_1 + a_{12}(x) y_2], \quad y_2' = \lambda [a_{21}(x) y_1 + a_{22}(x) y_2]$   
с комплекснозначными коэффициентами  $a_{jk}(x)$ . Запишем ее в матричной форме:

$$y' = \lambda A(x) y, \quad (1)$$

где  $A(x) = (a_{jk}(x))$ . Пусть  $I = [a, b]$  — конечный отрезок,  $a_{jk}(x) \in C^\infty(I)$ .

Систему (1) можно свести к уравнению второго порядка, исключив одну из неизвестных функций, но при построении ФАР удобнее оперировать непосредственно с самой системой. Будем предполагать, что собственные значения  $p_1(x), p_2(x)$  матрицы  $A(x)$  различны при всех  $x \in I$ . Тогда  $p_{1,2}(x) \in C^\infty(I)$  и существуют линейно независимые собственные векторы  $e_1(x), e_2(x)$  матрицы  $A(x)$  класса  $C^\infty(I)$ . Матрица  $T(x) = (e_1(x), e_2(x))$  приводит матрицу  $A(x)$  к диагональному виду, т. е.

$$T^{-1}(x) A(x) T(x) = \Lambda(x) = \text{diag}(p_1(x), p_2(x)).$$

Пусть  $e_1^*(x), e_2^*(x)$  — строки матрицы  $T^{-1}(x)$ ; тогда

$$e_j^*(x) e_k(x) \equiv \delta_{jk}, \quad e_j^*(x) A(x) = p_j(x) e_j^*(x). \quad (2)$$

Будем искать ФАР системы (1) в виде асимптотического ряда

$$y = e^{\lambda S(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} f_k(x). \quad (3)$$

Подставляя это разложение в систему (1), получаем рекуррентную систему уравнений

$$\begin{aligned} (A(x) - S'(x)I) f_0(x) &= 0, \\ (A(x) - S'(x)I) f_{k+1}(x) &= -f_k'(x), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Из первого уравнения следует, что  $S'(x)$  — собственное значение,  $f_0(x)$  — собственный вектор матрицы  $A(x)$ . Положим  $S'(x) = p_1(x)$ ; тогда

$$f_0(x) = \alpha(x) e_1(x),$$

где  $\alpha(x)$  — некоторая функция. Функция  $\alpha(x)$  определится из следующего уравнения:

$$(A(x) - p_1(x)I) f_1(x) = -f_0'(x) \quad (5)$$

системы (1). Умножая обе части этого уравнения слева на вектор-строку  $e_1^*(x)$  и учитывая тождества (2), получаем

$$e_1^*(x) f_0'(x) \equiv 0, \quad x \in I.$$



Следовательно,

$$\alpha(x) = \exp \left\{ - \int_{x_0}^x e_1^*(t) e_1(t) dt \right\}.$$

Найдем вектор-функцию  $f_1(x)$ . Имеем  $f_1(x) = \alpha_1(x) e_1(x) + \alpha_2(x) e_2(x)$ ; подставляя в систему (5), получаем

$$(p_2(x) - p_1(x)) \alpha_2(x) e_2(x) = -f_0'(x).$$

Умножая это тождество слева на вектор  $e_2^*(x)$ , находим

$$\alpha_2(x) = \frac{\alpha(x) e_2^*(x) e_1'(x)}{p_1(x) - p_2(x)}.$$

Функция  $\alpha_1(x)$  при этом остается неопределенной; она находится из следующего уравнения системы (3).

Продолжив эти построения, можно получить все члены разложения (2). Положив  $S'(x) = p_2(x)$ , аналогично найдем второе ФАР.

## 2. Достаточные условия существования асимптотики решений.

Точка  $x_0 \in I$  называется *точкой поворота* системы (1), если собственные значения матрицы  $A(x_0)$  совпадают. Введем условия:

1) Система (1) не имеет точек поворота, т. е.  $p_1(x) \neq p_2(x)$  при  $x \in I$ .

2) Функция  $\operatorname{Re}(p_1(x) - p_2(x))$  не меняет знак при  $x \in I$ .

Условие 2) будет обсуждаться в § 8. Введем обозначения

$$\tilde{y}_j(x, \lambda) = \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t) dt - \int_{x_0}^x e_j^*(t) e_j'(t) dt \right\}. \quad (6)$$

Напомним, что  $e_j(x)$  — собственные векторы класса  $C^\infty(I)$  матрицы  $A(x)$ :  $A(x) e_j(x) = p_j(x) e_j(x)$ , а векторы  $e_j^*(x)$  — строки матрицы  $(e_1(x), e_2(x))^{-1}$  (см. (2)).

Система (1) имеет два решения вида

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda) \left[ e_j(x) + \sum_{k=1}^{N-1} f_{jk}(x) \lambda^{-k} + O(\lambda^{-N}) \right], \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Здесь  $N \geq 1$  — любое, асимптотика (7) равномерна по  $x \in I$  и формулу (7) можно дифференцировать по  $x$  и по  $\lambda$  любое число раз, с сохранением равномерной по  $x \in I$  оценки остаточного члена. Решения  $y_1(x, \lambda)$ ,  $y_2(x, \lambda)$  линейно независимы при  $\lambda \gg 1$ .

П р и м е р. Рассмотрим систему (1) с эрмитовой матрицей

$$A(x) = \begin{bmatrix} a(x) & c(x) \\ c(x) & b(x) \end{bmatrix}.$$

Здесь  $a(x)$ ,  $b(x)$  — вещественнозначные функции,  $c(x)$  — комплекснозначная функция. Собственные значения матрицы  $A(x)$

равны

$$p_{1,2}(x) = \frac{1}{2} [a(x) + b(x) \pm \sqrt{D(x)}], \quad D = (a - b)^2 + 4|c|^2,$$

и система (1) не имеет точек поворота, если при  $x \in I$  выполнено одно из условий:

$$a(x) \neq b(x), \quad c(x) \neq 0.$$

Имеем (здесь верхний знак берется при  $j = 1$ )

$$e_j(x) = \left[ b(x) - a(x) \pm \sqrt{D(x)} \right], \quad e_j^*(x) = \frac{\bar{e}_j^T(x)}{|e_j(x)|^2},$$

откуда следует, что система (1) имеет решение вид.

$$y_1(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{c(x)}} \frac{1}{\sqrt{D(x)}} \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_1(t) dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{c(t)}{\sqrt{D(t)}} \left( \frac{a(t) - b(t)}{c(t)} \right)' dt \right\} [e_j(x) + O(\lambda^{-1})].$$

Заменяв  $\sqrt{D}$  на  $-\sqrt{D}$ , получим решение  $y_2(x, \lambda)$ .

**3. Дополнительные параметры и комплексные  $\lambda$ .** Рассмотрим систему

$$y' = \lambda A(x, \mu) y. \quad (8)$$

Все утверждения, сформулированные в § 3, п. 1.5, для скалярного уравнения второго порядка, справедливы для системы (8), если в условиях 1), 2) заменить  $\sqrt{q(x, \mu)}$  на  $p_1(x, \mu) - p_2(x, \mu)$ .

### § 5. Системы уравнений, близкие к диагональным

Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$y' = (\Lambda(x) + B(x)) y \quad (1)$$

на полуоси  $R^+$ :  $x \geq 0$ . Здесь  $\Lambda(x)$ ,  $B(x)$  — квадратные матрицы порядка  $n$ ,  $y$  есть  $n$ -вектор, матрица  $\Lambda(x)$  — диагональная, с диагональными элементами  $p_1(x), \dots, p_n(x)$ . Будем предполагать, что  $\Lambda(x)$ ,  $B(x) \in C(R^+)$ .

Основные результаты об асимптотике решений систем вида (1) при  $x \rightarrow \infty$  удобно формулировать не при  $n = 2$ , а сразу для произвольного  $n$ .

Если  $B(x) \equiv 0$ , то система (1) распадается и имеет ФСР

$$\tilde{y}_j(x) = \exp \left\{ \int_{x_0}^x p_j(t) dt \right\} f_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где  $f_j$  — вектор с компонентами  $\delta_{jj}$ . Естественно предполагать, что если элементы матрицы-функции  $B(x)$  малы при  $x \gg 1$ , то решения системы (1) близки к вектор-функциям  $\tilde{y}_j(x)$ . Приведем соответствующие достаточные условия.

**1. Почти диагональные системы.** Система (1) называется почти диагональной, если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|B(x)\| = 0. \quad (2)$$

Однако этого условия недостаточно для того, чтобы решения системы (1) были близки к решениям диагональной системы. Введем условие:

1) при некотором  $j$  и при  $k \neq j$

$$\operatorname{Re}(p_k(x) - p_j(x)) \geq c > 0, \quad x \geq a \geq 0. \quad (3)$$

**Т е о р е м а** (Перрон). Почти диагональная система (1) имеет решение  $y_j(x)$  такое, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y_{jk}(x)}{y_{kk}(x)} = 0, \quad j \neq k, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{y'_{jj}(x)}{y_{jj}(x)} - p_k(x) \right) = 0.$$

Это решение представимо в виде

$$y_j(x) = \exp \left\{ \int_{x_0}^x p_j(t) dt + \int_{x_0}^x p_j^{(1)}(t) dt \right\} [f_j + u_j(x)], \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_j^{(1)}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \|u_j(x)\| = 0.$$

Если  $\operatorname{Re}(p_{j+1}(x) - p_j(x)) \geq c > 0$  при всех  $j$ , то система (1) имеет фундаментальную матрицу  $Y(x)$  вида

$$Y(x) = [I + U(x)] \exp \left\{ \int_{x_0}^x \Lambda(t) dt + \int_{x_0}^x \Lambda_1(t) dt \right\}. \quad (5)$$

Здесь  $\Lambda_1(x)$  — диагональная матрица и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|\Lambda_1(x)\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \|U(x)\| = 0. \quad (6)$$

Асимптотические формулы (4), (5) — довольно грубые. Действительно,

$$y_{jj}(x) \exp \left\{ - \int_{x_0}^x p_k(t) dt \right\} = \exp \{o(x)\}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Правая часть этой формулы может, например, стремиться к бесконечности при  $x \rightarrow \infty$ . Уточнить этот результат без дополнительных предположений относительно поведения матрицы-функции  $B(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  нельзя, даже при  $n = 1$ .

Приведем результаты, аналогичные теореме Перрона. Пусть при некотором  $j$  и при всех  $k \neq j$  выполняется условие

$$\|B(x)\| = o(\operatorname{Re}(p_j(x) - p_k(x))), \quad x \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Тогда система (1) имеет решение  $y_j(x)$ , для которого справедливы оценки при  $x \geq x_0 \gg 1$ :

$$\begin{aligned} 0 < c_1 \exp\left\{\operatorname{Re} S_j(x_0, x) - (1 + \delta) \int_{x_0}^x \|B(t)\| dt\right\} &\leq \\ &\leq \|y_j(x)\| \leq c_2 \exp\left\{\operatorname{Re} S_j(x_0, x) + (1 + \delta) \int_{x_0}^x \|B(t)\| dt\right\}, \\ S_j(x_0, x) &= \int_{x_0}^x p_j(t) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\delta > 0$  может быть выбрано сколь угодно малым за счет увеличения  $x_0$ , а постоянные  $c_k$  можно выбрать не зависящими от  $x_0$ .

Из (8) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \|y_j(x)\|}{\operatorname{Re} S_j(x_0, x)} = 1.$$

Если условие (7) выполнено при всех  $j$ , то решения  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  образуют ФСР.

Пусть  $\Lambda(x) \equiv \operatorname{const}$ ,  $B(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Тогда оценки (8) справедливы при всех  $j = 1, \dots, n$ ; собственные значения матрицы  $\Lambda$  могут быть произвольными. В частности,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \|y_j(x)\|}{x} = \operatorname{Re} \lambda_j.$$

**2.  $L$ -диагональные системы.** Система (1) называется  $L$ -диагональной, если  $\|B(x)\| \in L^1[0, \infty)$ , т. е.

$$\int_0^{\infty} \|B(x)\| dx < \infty. \quad (9)$$

Введем условие, аналогичное условию 1):

2) при  $x \gg 1$  разности  $\operatorname{Re}(p_j(x) - p_k(x))$  не меняют знак при  $j$  фиксированном и при всех  $k$ .

**Т е о р е м а** (Н. Левинсон).  $L$ -диагональная система (1) имеет решение  $y_j(x)$  такое, что

$$y_j(x) = \exp\left\{\int_{x_0}^x p_j(t) dt\right\} [f_j + u_j(x)], \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \|u_j(x)\| = 0. \quad (10)$$

Напомним, что  $f_j$  — вектор с компонентами  $\delta_{jk}$ . Если условие 2) выполнено при всех  $j$ , то система (1) имеет фундаментальную

матрицу  $Y(x)$  вида

$$Y(x) = [I + U(x)] \exp \left\{ \int_x^x \Lambda(t) dt \right\}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \|U(x)\| = 0. \quad (11)$$

Условие 2) будет обсуждаться в § 8.

Теорема Левинсона допускает следующее уточнение. Будем говорить, что  $k$  принадлежит классу  $H_1(j)$ , если при  $0 \leq t \leq x < \infty$  выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} S_{kj}(t, x) \leq c_{kj} < \infty,$$

где обозначено

$$S_{kj}(t, x) = \int_t^x [p_k(t) - p_j(t)] dt.$$

Далее,  $k \in H_2(j)$ , если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Re} S_{kj}(0, x) = -\infty.$$

Пусть каждое  $k = 1, \dots, n$  принадлежит к одному из классов  $H_1(j)$ ,  $H_2(j)$ . Тогда  $L$ -диагональная система (1) имеет решение  $y_j(x)$  вида (10). Для остаточного члена  $u_j(x)$  справедлива оценка

$$\|u_j(x)\| \leq C \left[ \int_x^\infty \|B(t)\| dt \right] + \sum_{k \in H_2(j)} \int_x^\infty |\exp \{S_{kj}(t, x)\}| \|B(t)\| dt. \quad (12)$$

Если имеется более точная информация о функциях  $\|B(x)\|$  и  $p_k(t)$ , то оценку (12) можно уточнить, применяя метод Лапласа асимптотической оценки интегралов.

**Примеры.** 1. Пусть все собственные значения  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  — чисто мнимые. Тогда

$$\|U(x)\| \leq C \int_x^\infty \|B(t)\| dt,$$

где  $U(x)$  — матрица-функция из (11). Действительно, в этом случае условие 2) выполняется при всех  $j$ , и  $k \in H_1(j)$  при всех  $k, j$ .

2. Пусть  $j$  таково, что

$$\operatorname{Re} p_j(x) \leq \operatorname{Re} p_k(x)$$

при  $x \gg 1$  и при всех  $k$ . Тогда

$$\|u_j(x)\| \leq C \int_x^\infty \|B(t)\| dt.$$

Некоторые результаты об асимптотике решений систем уравнений будут приведены в гл. V.

3. **Двойная асимптотика.** Рассмотрим систему

$$y' = [\lambda \Lambda(x) + \Lambda_1(x) + \lambda^{-1} B(x, \lambda^{-1})] y. \quad (13)$$

Здесь матрица  $\Lambda(x)$  та же, что и в системе (1),  $\Lambda_1(x) = \text{diag}(p_1^{(1)}(x), \dots, p_n^{(1)}(x))$  и

$$\|B(x, \lambda^{-1})\| \leq Cb(x), \quad \int_0^\infty b(t) dt < \infty \quad (14)$$

при  $x \geq x_0$ ,  $\lambda \geq \lambda_0$ . В этом случае, при некоторых условиях относительно матриц-функций  $\Lambda$ ,  $\Lambda_1$ , можно получить асимптотические формулы для решений, пригодные и при  $x \rightarrow \infty$ ,  $\lambda > 0$  фиксированном, и при  $\lambda \rightarrow +\infty$ ,  $x$  фиксированном. Именно, пусть при некотором  $j$  и при всех  $k \neq j$  выполнены условия

$$\int_0^\infty |\text{Re}(p_j(x) - p_k(x))| dx = \infty, \quad (15)$$

$$\text{Re}(p_j^{(1)}(x) - p_k^{(1)}(x)) = o(\text{Re}(p_j(x) - p_k(x))), \quad x \rightarrow \infty.$$

Тогда система (13) имеет решение вида

$$y_j(x, \lambda) = \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t) dt + \int_{x_0}^x p_j^{(1)}(t) dt \right\} [1 + \lambda^{-1} u_j(x, \lambda^{-1})]. \quad (16)$$

При этом для любого  $\lambda_1 \geq \lambda_0 > 0$  существует  $x(\lambda_1) < \infty$  такое, что при  $\lambda \geq \lambda_1$ ,  $x \geq x(\lambda_1)$  выполняется оценка

$$\|u_j(x, \lambda^{-1})\| \leq k_j(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} k_j(x) = 0. \quad (17)$$

Если эти условия выполнены при всех  $j$ , то система (13) имеет ФМ вида

$$Y(x, \lambda) = [I + \lambda^{-1} U(x, \lambda^{-1})] \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x \Lambda(t) dt + \int_{x_0}^x \Lambda_1(t) dt \right\},$$

$$\|U(x, \lambda^{-1})\| \leq k(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = 0.$$

4. **Скалярные уравнения.** Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^n q_k(x) y^{(n-k)} = 0 \quad (18)$$

на полуоси  $R^+$ , где  $q_k(x)$  — комплекснозначные функции,  $q_k(x) \in C(R^+)$ . Пусть

$$q_k(x) = a_k + r_k(x), \quad \int_0^\infty |r_k(x)| dx < \infty$$

и  $p_1, \dots, p_n$  — корни уравнения

$$p_n + \sum_{k=1}^n a_k p^{n-k} = 0.$$

По теореме Левинсона уравнение (18) имеет ФСР вида

$$y_j^{(k)}(x) = a_j^k e^{p_k x} [1 + o(1)], \quad x \rightarrow \infty,$$

где  $j, k = 1, \dots, n$ .

Пример. Уравнение Шрёдингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + [V(x) - E] \psi = 0$$

при условиях  $E > 0$ ,  $V(x) \in L_1(-\infty, \infty)$  имеет две ФСР такие, что

$$\psi_{1,2}^+(x) = e^{\pm ikx} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$\psi_{1,2}^-(x) = e^{\pm ikx} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty,$$

где  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ .

## § 6. Асимптотика решений при больших значениях аргумента

1. ВКБ-приближение. Рассмотрим уравнение

$$y'' - q(x)y = 0 \quad (1)$$

на полуоси  $R^+$ , где  $q(x) \in C^\infty(R^+)$ . Будем предполагать, что условия 1), 2) из § 3, п. 1, 2, выполнены при больших  $x$ , т. е.

$$q(x) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \sqrt{q(x)} \geq 0, \quad x \gg 1.$$

Введем обозначения

$$S(x_0, x) = \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt, \quad \alpha_1(x) = \frac{1}{8} \frac{q'(x)}{q^{3/2}(x)} - \frac{5}{32} \frac{q''(x)}{q^{5/2}(x)}, \quad (2)$$

$$\rho(x) = \int_x^\infty |\alpha_1(t)| dt.$$

1.1. Главный член асимптотики. Пусть  $q(x) \in C^2(R^+)$ . Если сходится интеграл

$$\int_x^\infty |\alpha_1(t)| dt < \infty, \quad (3)$$

то уравнение (1) имеет ФСР вида

$$y_{1,2}(x) = q^{-1/4}(x) \exp\{\pm S(x_0, x)\} [1 + \varepsilon_{1,2}(x)], \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon_{1,2}(x) = 0. \quad (5)$$

Для остаточного члена  $\varepsilon_2(x)$  справедлива оценка

$$|\varepsilon_2(x)| \leq C\rho(x). \quad (6)$$

Все оценки, которые приводятся в этом параграфе, выполняются при  $x \gg 1$ .

Для решения  $y_2$  формулы (4) — (6) — прямые следствия ВКБ-оценки (11) § 2 при  $b = \infty$ .

Несколько сложнее оценивается остаточный член  $\varepsilon_1(x)$ . Возможны два варианта.

А.  $\operatorname{Re} S(0, +\infty) < \infty$ ; тогда для  $\varepsilon_1(x)$  справедлива оценка (6).

Б.  $\operatorname{Re} S(0, +\infty) = +\infty$ ; тогда

$$|\varepsilon_1(x)| \leq C \left[ |\rho(x)| + \int_{x_0}^x |e^{2S(t,x)}| |a_1(t)| dt \right]. \quad (7)$$

1.2. Уравнение (1) с вещественной функцией  $q(x)$ . Возможны два варианта.

А. Неосциллирующие решения:  $q(x) > 0$  при  $x \gg 1$ . Тогда

$$y_{1,2}(x) \sim q^{-1/4}(x) \exp\{\pm S(x_0, x)\}.$$

Если, кроме того,

$$q'(x) q^{-3/2}(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad (8)$$

$$S(0, +\infty) = +\infty, \quad (9)$$

то при  $x \rightarrow \infty$

$$y_1(x) \rightarrow \infty, \quad y_2(x) \rightarrow 0.$$

При этом решение  $y_2(x)$  экспоненциально убывает, а решение  $y_1(x)$  экспоненциально возрастает.

Решение  $y_2(x)$  однозначно определяется своей асимптотикой на бесконечности: если решение  $y(x)$  таково, что

$$y(x) \sim q^{-1/4}(x) \exp\{-S(x_0, x)\}, \quad x \rightarrow \infty,$$

то  $y(x) \equiv y_2(x)$ .

Решение  $y_2(x)$  обладает следующими свойствами:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y_2(x) = 0,$$

$$\int_0^\infty |y_2^p(x)| dx < \infty, \quad \int_0^\infty |q(x)|^r |y_2(x)|^p dx < \infty, \quad (10)$$

где  $p > 0$ ,  $r$  — любое. Действительно, из условий (8), (9) и правила Лопиталья следует, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln q(x)}{S(x_0, x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q'(x)}{q^{3/2}(x)} = 0,$$

и первое из соотношений (10) доказано, так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp\{-S(x_0, x) + m \ln q(x)\} = 0$$



при любом  $m$ . Далее, при  $n > 0$ ,  $x \geq x_0 \gg 1$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x q^m(t) \exp\{-nS(x_0, t)\} dt &= \\ &= \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} \exp\{-(n + o(1))S(x_0, t)\} dt \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} \exp\left\{-\frac{n}{2} S(x_0, t)\right\} dt = \\ &= -\frac{2}{n} \exp\left\{-\frac{n}{2} S(x_0, x)\right\} \Big|_{x_0}^x \rightarrow \text{const}, \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

и последние два из соотношений (10) доказаны. Если решение  $y(x)$  удовлетворяет любому из соотношений (10), то  $y(x) = \text{const } y_2(x)$ .

Б. Осциллирующие решения:  $q(x) < 0$ . Рассмотрим, для удобства, уравнение

$$y'' + q(x)y = 0, \quad (11)$$

и пусть  $q(x) > 0$  при  $x \gg 1$ . Это уравнение имеет ФСР вида

$$y_{1,2}(x) = q^{-1/4}(x) \exp\{\pm iS(x_0, x)\} [1 + \varepsilon_{1,2}(x)].$$

При этом и для  $\varepsilon_1(x)$ , и для  $\varepsilon_2(x)$  справедлива оценка (6).

Оба решения  $y_1(x), y_2(x)$  однозначно определяются своей асимптотикой при  $x \rightarrow \infty$ . Если выполнено условие (8), то эти решения однозначно определяются краевыми условиями типа условия излучения Зоммерфельда:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y'/y \mp i\sqrt{q(x)}) = 0.$$

Если интеграл  $\int_0^\infty q^{-1/2}(x) dx$  сходится (расходится), то все решения уравнения (11) принадлежат (не принадлежат) пространству  $L_2[0, \infty)$ .

1.3. Анализ условия (3). Если  $q(x) = x^\alpha$ , то условие (3) выполняется при  $\alpha > -2$ . Для  $\alpha$  целого это означает, что  $x = \infty$  — иррегулярная особая точка уравнения (1) (гл. I, § 2).

Укажем некоторые классы функций, для которых выполняются условия 1), 2), (3) и (8).

1.  $q(x) = ax^\alpha$ ,  $\alpha > -2$ ,  $a \neq 0$ .

2.  $q(x) = a(\lg x)^\alpha$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$ ,  $a \neq 0$ .

3.  $q(x) = a \exp\{bx^\alpha\}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \neq 0$ .

Таким образом,  $q(x)$  может расти при  $x \rightarrow \infty$  с любой скоростью и даже может убывать, но не медленнее, чем  $x^{-2}$ . Условие (3) означает некоторую правильность поведения  $q(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ ,

Если  $q(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  ведет себя так же, как и в случаях 1—3 (например,  $q(x) \sim ax^\alpha$ ), и если эту асимптотику можно два раза дифференцировать, то все перечисленные выше условия выполняются.

Асимптотические формулы (4) справедливы и в том случае, когда функция  $q(x)$  имеет конечную особую точку  $x_0$ ,  $x \rightarrow x_0$ . Пусть  $I = [x_0, x_0 + \delta]$ ,  $\delta > 0$ ,  $q(x) \in C^2(I)$ , условия 1), 2) выполняются при  $x \in I$  и сходится интеграл

$$\int_{x_0}^{\infty} |\alpha_1(x)| dx < \infty. \quad (3')$$

Тогда справедливы формулы (4), где  $\varepsilon_j(x) \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow x_0$ .

Если  $q(x) = a(x - x_0)^\alpha$ ,  $a \neq 0$ , то условие (3') выполняется при  $\alpha < -2$  и не выполняется при  $\alpha \geq -2$ . Отметим, что при  $\alpha = 2$  точка  $x_0$  есть регулярная особая точка уравнения (1). В этом случае асимптотика решений имеет несколько иной вид.

Пусть

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q'(x)}{q^{3/2}(x)} = 4\gamma, \quad \int_{x_0}^{\infty} \left| d \left( \frac{q'(x)}{q^{3/2}(x)} \right) \right| < \infty, \quad \gamma \neq \pm 1,$$

и при  $x \gg 1$  ограничены функции

$$\exp \{ \pm iS(x) \}, \quad S(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} \sqrt{1 - \frac{q'(t)^2}{16q^3(t)}} dt.$$

Тогда уравнение (11) имеет ФСР такую, что

$$\begin{aligned} y_{1,2}(x) &\sim q^{-1/4}(x) \exp \{ \pm iS(x) \}, \\ y'_{1,2}(x) &\sim (-\gamma \pm i \sqrt{1 - \gamma^2})^2 \sqrt{q(x)} \exp \{ \pm iS(x) \} \end{aligned} \quad (12)$$

при  $x \rightarrow \infty$ . В частности, эти формулы справедливы, если

$$q(x) \sim ax^{-2}, \quad x \rightarrow \infty, \quad a > 0, \quad a \neq 1/4,$$

и если эту асимптотику можно дифференцировать. Формулы (12) можно записать в виде

$$y_{1,2}(x) = x^{-1 \pm i \sqrt{a-1/4+o(1)}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

1.4. Д и ф ф е р е н ц и р о в а н и е а с и м п т о т и к и. Пусть выполнены условия п. 1.1 и условие (8). Тогда асимптотические формулы (4) можно два раза дифференцировать, т. е.

$$y_{1,2}^{(j)}(x) \sim (\pm \sqrt{q(x)})^j q^{-1/4}(x) \exp \{ \pm S(x_0, x) \}, \quad x \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2.$$

1.5. Следующие члены асимптотического разложения. Сравнение формул (4) § 5 и (7) § 3 показывает, что главный член асимптотики решений уравнения  $y'' - \lambda^2 q(x)y = 0$  имеет один и тот же вид и при конечных  $x$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$ , и при

$\lambda = 1$ ,  $x \rightarrow +\infty$ . Это справедливо и для следующих членов АР: асимптотика решений уравнения (1) имеет вид (5) § 3, где  $\lambda = 1$ , при условиях типа правильности поведения функции  $q(x)$  и ее производных при  $x \rightarrow \infty$ . Грубо говоря, это условие состоит в том, что последовательность  $\{\alpha_j(x)\}$  должна быть асимптотической при  $x \rightarrow \infty$  (функции  $\alpha_j(x)$  см. в § 3, (4)).

**Пример.** Пусть  $q(x) = x^\alpha \varphi(x)$ , где  $\alpha > -2$ ,  $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n x^{-n}$  и этот ряд сходится при  $x \geq x_0 > 0$ . Тогда при  $x \rightarrow \infty$

$$\alpha_j(x) \sim c_j x^{\beta_j}, \quad \beta_j = \alpha/2 - (\alpha/2 + 1)(j + 1),$$

где  $c_j$  — постоянные, так что последовательность  $\{\alpha_j(x)\}$  — асимптотическая. Это же верно для любой из функций  $q(x)$ , рассмотренных в п. 1.3.

Введем функции  $a_N^\pm(x) = \sum_{j=1}^N (\pm 1)^j \alpha_j(x)$  и сделаем преобразование

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a_N^+ & a_N^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

При  $N = 0$  это преобразование совпадает с введенным в § 1, п. 4. Тогда уравнение (1) сведется к системе

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{a_N^+ - a_N^-} \begin{bmatrix} q - a_N^+ a_N^- + a_N^+ & q - a_N^- - a_N^- \\ -q + a_N^+ + a_N^+ & -q + a_N^+ a_N^- + a_N^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Эта система будет  $L$ -диагональной (§ 5) при условии, что сходятся интегралы  $\rho_N^\pm(x_0, \infty)$ , где

$$\rho_N^\pm(x_0, x) = \int_{x_0}^x |q - a_N^{\pm 2} - a_N^{\pm'}| |a_N^+ - a_N^-|^{-1} dt. \quad (13)$$

В этом случае уравнение (1) имеет два решения вида

$$y_{1,2}(x) = q^{-1/2}(x) \exp \left\{ \int_{x_0}^x \pm \sqrt{q(t)} dt + \sum_{j=1}^N (\pm 1)^j \int_{x_0}^x \alpha_j(t) dt \right\} [1 + \varepsilon_{1,2}(x)], \quad (14)$$

где  $\varepsilon_{1,2}(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Справедлива оценка

$$|\varepsilon_2(x)| \leq C \rho_N^-(x, \infty). \quad (15)$$

Если  $q(x)$  имеет тот же вид, что и в приведенном примере, то

$$\varepsilon_j(x) = O(x^{-\delta_N}), \quad \delta_N = (\alpha/2 + 1)(N + 1)$$

при  $x \rightarrow \infty$ ,  $j = 1, 2$ .

**2. Дополнения.** Все асимптотические формулы для решений при  $x \rightarrow \infty$ , приведенные в этом параграфе, по существу опираются на теорему Левинсона об асимптотике решений  $L$ -диагональных систем (§ 4, п. 2). Приведем некоторые, более тонкие результаты. Рассмотрим уравнения

$$y'' + (1 + \alpha(x)) y = 0, \quad (16)$$

$$y'' - (1 + \alpha(x)) y = 0, \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0. \quad (18)$$

Пусть выполнено условие

$$\int_{x_0}^{\infty} |\alpha(t)|^n dt < \infty, \quad (19)$$

где  $n \geq 1$  — целое число. При  $n = 1$  асимптотика решений приведена в § 5. Рассмотрим случай  $n > 1$ .

А.  $n = 2$ . Уравнения (16), (17) имеют ФСР вида

$$y_{1,2}(x) \sim \exp \left\{ \pm i \left( x + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \alpha(t) dt \right) \right\}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (20)$$

$$y_{1,2}(x) \sim \exp \left\{ \pm \left( x + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \alpha(t) dt \right) \right\}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (21)$$

**Примеры. 1.** Уравнение

$$y'' - (1 + x^{-\alpha} \sin x) y = 0, \quad 1/2 < \alpha \leq 1,$$

удовлетворяет условию (19) при  $n = 2$ . Асимптотика решений при  $x \rightarrow \infty$  имеет вид

$$y_{1,2}(x) = \exp \{ \pm (x - x^{-\alpha} \cos x) \} [1 + o(1)].$$

**2.** Уравнение

$$y'' + [1 + x^{-1} (a + \sin bx)] y = 0, \quad b \neq \pm 2,$$

где  $a, b$  — вещественные константы, имеет ФСР такую, что при  $x \rightarrow \infty$

$$y_{1,2}(x) = \exp \{ \pm i (x + a \ln x) \} [1 + o(1)].$$

Заметим, что формально можно получить формулы (20), (21) из формулы (4):

$$\sqrt{1 + \alpha(x)} = 1 + \frac{1}{2} \alpha(x) + O(\alpha^2(x)), \quad x \rightarrow \infty,$$

так что

$$\int_{x_0}^x \sqrt{1 + \alpha(t)} dt = x + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \alpha(t) dt + \int_{x_0}^{\infty} O(\alpha^2(t)) dt + \\ + \int_x^{\infty} O(\alpha^2(t)) dt + C = x + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \alpha(t) dt + C' + o(1).$$

Б.  $n = 3$ . Уравнение (17) имеет ФСР вида  $y_{1,2}(x) \sim$

$$\sim \exp \left\{ \pm \left( x + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \alpha(t) dt - \frac{1}{4} \int_{x_0}^x \alpha(t) \int_{x_0}^t \alpha(\tau) e^{2(\tau-t)} d\tau dt \right) \right\}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Эти формулы не допускают дальнейших упрощений.

Аналогичные формулы справедливы при любом  $n > 1$ , но с ростом  $n$  они становятся все более громоздкими [3].

## § 7. Двойные асимптотики

1. ВКБ-асимптотика. Рассмотрим уравнение

$$y'' - \lambda^2 q(x) y = 0 \quad (1)$$

на полуоси  $\mathbf{R}^+$ , где  $q(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^+)$ . Пусть одновременно выполнены условия из § 3, п. 1.2, и из § 6, п. 1.2, т. е.

$$q(x) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \sqrt{q(x)} \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}^+, \quad \int_x^\infty |\alpha_1(x)| dx < \infty. \quad (2)$$

Покажем, что тогда можно получить асимптотические формулы для решений уравнения (1), пригодные одновременно и при  $x$  фиксированном,  $\lambda \rightarrow +\infty$ , и при  $\lambda > 0$  фиксированном,  $x \rightarrow \infty$ . Введем стандартные обозначения

$$S(x_0, x) = \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt, \quad \rho(x) = \int_x^\infty |\alpha_1(t)| dt, \quad (3) \\ \tilde{y}_j(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \exp \{ \pm \lambda S(x_0, x) \},$$

где знак плюс (минус) берется при  $j = 1$  ( $j = 2$ ). Будем также предполагать, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q'(x)/q^{3/2}(x) = 0. \quad (4)$$

1.1. У б ы в а ю щ е е р е ш е н и е. Пусть  $\operatorname{Re} S(0, \infty) = +\infty$ ; тогда уравнение (1) при фиксированном  $\lambda > 0$  имеет единственное, с точностью до множителя, решение  $y_2$  такое, что  $y_2(+\infty) = 0$  (§ 6, п. 1.1). Нормируем его условием

$$y_2(x, \lambda) \sim \tilde{y}_2(x, \lambda), \quad x \rightarrow \infty,$$

которое выделяет единственное решение при любом  $\lambda > 0$ . Применяя ВКБ-оценку (11) § 2 при  $b = \infty$ , получаем

$$\left| \frac{y_2(x, \lambda)}{\tilde{y}_2(x, \lambda)} - 1 \right| \leq 2(e^{2\rho(x)/\lambda} - 1). \quad (5)$$

Эта оценка справедлива при  $x \geq 0$ ,  $\lambda > 0$ . Так как  $\rho(0) < \infty$ ,  $\rho(\infty) = 0$ , то правая часть неравенства (5) стремится к нулю, если

а)  $\lambda \rightarrow +\infty$  равномерно по  $x \geq 0$ ;

б)  $x \rightarrow \infty$  равномерно по  $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$ , где  $\lambda_0 > 0$  фиксировано.

Таким образом, асимптотика вида  $y_2 \sim \tilde{y}_2$  является двойной. Фиксируем  $\lambda_0 > 0$ ; тогда из (5) получим, что

$$y_2(x, \lambda) = \tilde{y}_2(x, \lambda) \left[ 1 + \frac{1}{\lambda} \varphi_2(x, \lambda) \right], \quad (6)$$

где при  $x \geq 0$ ,  $\lambda \geq \lambda_0$  выполняется оценка

$$|\varphi_2(x, \lambda)| \leq C \int_x^\infty |\alpha_1(t)| dt. \quad (7)$$

Если решения  $y, y_2$  линейно независимы, то  $|y| \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ . Растущее на бесконечности решение обычно не представляет интереса как не имеющее физического смысла.

**1.2. Осциллирующие решения.** Предположим, что  $\operatorname{Re} S(0, \infty) < \infty$ ; это условие выполняется, в частности, если  $q(x) < 0$  при  $x \geq 1$ . Тогда уравнение (1) имеет два решения, которые осциллируют при  $x \geq 1$  и однозначно выделяются крайними условиями на бесконечности:

$$y_j(x, \lambda) \sim \tilde{y}_j(x, \lambda), \quad x \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2.$$

В этом случае представление (6) и оценка (7) справедливы при  $j = 1, 2$ .

**1.3. Высшие приближения.** Пусть функция  $q(x)$  удовлетворяет условиям (2), (4) и условиям из § 6, п. 5. Тогда

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda) \exp \left\{ \sum_{k=1}^N (\pm \lambda)^{-k} \int_{x_0}^x \alpha_k(t) dt \right\} \left[ 1 + \lambda^{-N-1} \varphi_{jN}(x, \lambda) \right],$$

$$|\varphi_{jN}(x, \lambda)| \leq C \quad (8)$$

при  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $x \geq 0$ . В условиях п. 1.1 эти формулы справедливы для решения  $y_2$ , в условиях п. 1.2 — для решений  $y_1, y_2$ .

**2. Полюс второго порядка.** Пусть

$$q(x) = x^{-2}p(x), \quad (9)$$

где  $p(0) \neq 0$ ,  $p(x) \in C^\infty$  при малых  $x \geq 0$ . Тогда

$$\alpha_1(x) \sim \frac{1}{8\sqrt{p(0)x}}, \quad x \rightarrow +0, \quad (10)$$

и интеграл  $\int_0^x |\alpha_1(x)| dx$  расходится. В этом случае оказывается непригодным ВКБ-приближение

$$y_{1,2}(x) \sim q^{-1/4}(x) \exp\{\pm S(x_0, x)\}, \quad x \rightarrow +0.$$

**Пример.** Пусть  $p(x) \equiv a$ . Тогда (1) есть уравнение Эйлера и его решения равны

$$y_j = x^{\alpha_j}, \quad \alpha_j = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \lambda \sqrt{a + \frac{1}{4\lambda^2}} \right), \quad j = 1, 2,$$

в то время как ВКБ-приближение равно

$$\tilde{y}_j \sim x^{\beta_j}, \quad x \rightarrow 0, \quad \beta_j = \frac{1}{2} (1 \pm \lambda \sqrt{a}).$$

Показатели  $\alpha_j, \beta_j$  не совпадают, но при  $\lambda \gg 1$  различаются на малую величину порядка  $O(\lambda^{-1})$ .

Оказывается, что если вместо  $\lambda$  ввести параметр

$$\mu = \sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{4p(0)}}, \quad (11)$$

то ВКБ-приближение станет пригодным. Сделаем преобразование того же вида, что и в п. 4 § 1:

$$y = u_1 + u_2, \quad y' = \left( \mu \sqrt{q} - \frac{q'}{4q} \right) u_1 - \left( \mu \sqrt{q} + \frac{q'}{4q} \right) u_2. \quad (12)$$

Тогда уравнение (1) сведется к системе

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \left[ \mu \sqrt{q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{q'}{4q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\tilde{\alpha}_1(x)}{\mu} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\tilde{\alpha}_1(x) = \alpha_1(x) - \frac{1}{8\sqrt{p(0)x}}.$$

В силу (10) функция  $\tilde{\alpha}_1(x) \in C^\infty$  при малых  $x \geq 0$ , так что к системе (13) применимы результаты § 4.

Если  $\lambda$  фиксировано,  $4\lambda^2 p(0) \neq -1$ , то уравнение (1) имеет решения  $y_1, y_2$  такие, что

$$y_j(x, \lambda) \sim \tilde{y}_j(x, \lambda), \quad x \rightarrow 0. \quad (14)$$

Заметим, что функции  $\tilde{y}_j(x, \mu)$  являются точными решениями уравнения (1), если  $q(x) = (ax^2 + bx + c)^{-2}$ ,

Перейдем к двойным асимптотикам. Из (14) следует, что

$$y_{1,2}(x, \lambda) \sim x^{1/2 \pm \mu \sqrt{p(0)}}, \quad x \rightarrow +0. \quad (15)$$

Возможны следующие варианты:

А.  $p(0) \notin (-\infty, 0]$ . Выберем ветвь корня так, чтобы  $\operatorname{Re} \sqrt{p(0)} > 0$ , и пусть  $\lambda \geq \lambda_0 \gg 1$ . Тогда  $y_1 \rightarrow \infty$ ,  $y_2 \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +0$ , и потому существует единственное, с точностью до постоянного множителя, решение  $y_2$  такое, что  $y_2(+0) = 0$ . Нормируем его условием

$$y_2(x, \lambda) \sim \tilde{y}_2(x, \mu), \quad x \rightarrow +0. \quad (16)$$

Такое решение единственно. Для этого решения имеют место формулы (6)–(8), в которых следует заменить  $\lambda$  на  $\mu$  и  $\alpha_j$  на  $\tilde{\alpha}_j$ . Функция  $\tilde{\alpha}_1(x)$  имеет вид (13), а функции  $\tilde{\alpha}_j(x)$  при  $j > 1$  удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям, что и функции  $\alpha_j(x)$ .

Б.  $p(0) < 0$ . В этом случае  $\sqrt{p(0)}$  — чисто мнимое число, так что  $|y_{1,2}| \sim \sqrt{x}$  при  $x \rightarrow +0$ . Условие

$$y_j(x, \lambda) \sim \tilde{y}_j(x, \mu), \quad x \rightarrow +0,$$

однозначно определяет решения  $y_1, y_2$ , для которых справедливы формулы (6)–(8) с теми же поправками, что и в случае А.

**3. Уравнение Штурма — Лиувилля.** Рассмотрим уравнение

$$y'' - (q(x) - \lambda)y = 0 \quad (17)$$

на полуоси  $\mathbf{R}^+$ , где  $\lambda > 0$  — параметр. Пусть функция  $q(x)$  вещественна,  $q(x) \in C^2(\mathbf{R}^+)$ ,  $q'(x) > 0$  при  $x \gg 1$  и  $q(+\infty) = +\infty$ . Уравнение (17) при  $\lambda \gg 1$  имеет единственную точку поворота  $x_0(\lambda) = q^{-1}(\lambda)$ ,  $x_0(+\infty) = +\infty$ . Приведем асимптотические формулы для решений, пригодные вне некоторой окрестности  $U(\lambda)$  точки поворота; размеры  $U(\lambda)$  зависят от скорости роста функции  $q(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ . Введем обозначения

$$\tilde{y}_{1,2}(x, \lambda) = (\lambda - q(x))^{-1/4} \exp \left\{ \pm i \int_{x_0(\lambda)}^x \sqrt{\lambda - q(t)} dt \right\}, \quad x < x_0(\lambda), \quad (18)$$

$$\tilde{y}_0(x, \lambda) = (q(x) - \lambda)^{-1/4} \exp \left\{ - \int_{x_0(\lambda)}^x \sqrt{q(t) - \lambda} dt \right\}, \quad x > x_0(\lambda).$$

Все корни в этой формуле арифметические. Всюду ниже  $\lambda \geq \lambda_0 \gg 1$ .

**3.1. Функции  $q(x)$  степенного роста.** Пусть

$$q(x) \sim ax^\alpha, \quad x \rightarrow \infty, \quad a > 0, \quad \alpha > 0,$$



и эту асимптотику можно два раза дифференцировать. В этом случае  $x_0(\lambda) \sim (\lambda/a)^{1/\alpha}$ . Положим

$$k(\lambda) = \lambda^{-(1+2\alpha)/3} N(\lambda), \quad x_{\pm}(\lambda) = \left[ \frac{\lambda}{a} (1 \pm k(\lambda)) \right]^{1/\alpha},$$

где  $N(\lambda)$  — любая положительная функция такая, что  $N(+\infty) = +\infty$ . Уравнение (17) имеет решения  $y_j(x, \lambda)$ ,  $j = 1, 2$ , такие, что при  $0 \leq x \leq x_-(\lambda)$  справедливы оценки

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda) [1 + \varepsilon_j(x, \lambda)], \quad |\varepsilon_j(x, \lambda)| \leq CN^{-3/2}(\lambda). \quad (19)$$

Оба эти решения быстро осциллируют при  $\lambda \gg 1$ ; их можно выбрать комплексно сопряженными. Если  $0 \leq x \leq k_0(\lambda/a)^{1/\alpha}$ , где  $k_0$  — постоянная,  $0 < k_0 < 1$ , то из (19) вытекает оценка

$$|\varepsilon_{1,2}(x, \lambda)| \leq C\lambda^{-1/2-1/\alpha}.$$

Уравнение (17) имеет решение  $y_0(x, \lambda)$  вида (18) такое, что при  $x_+(\lambda) \leq x < \infty$  справедлива оценка

$$y_0(x, \lambda) = \tilde{y}_0(x, \lambda) [1 + \varepsilon_0(x, \lambda)],$$

$$|\varepsilon_0(x, \lambda)| \leq C\lambda^{-1/2-1/\alpha} \left[ \left( \frac{ax^\alpha}{\lambda} - 1 \right)^{-1/2} + \left( \frac{ax^\alpha}{\lambda} \right)^{-1/\alpha-1/2} \right].$$

Правая часть достигает наибольшего значения при  $x = x_+(\lambda)$ , так что

$$|\varepsilon_0(x, \lambda)| \leq C [N^{-3/2}(\lambda) + \lambda^{-1/\alpha-1/2}].$$

Поэтому асимптотика  $y_0(x, \lambda) \sim \tilde{y}_0(x, \lambda)$  является двойной: остаточный член  $\varepsilon_0(x, \lambda) \rightarrow 0$  и при  $\lambda$  фиксированном,  $x \rightarrow \infty$ , и при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Решение  $y_0$  убывает при  $x \rightarrow \infty$ , и  $y_0(+\infty, \lambda) = 0$ . Второе линейно независимое решение экспоненциально растет при  $x \rightarrow \infty$ . Приведенные асимптотические формулы можно дифференцировать по  $x, \lambda$  любое число раз, с сохранением оценки остаточного члена.\*

3.2. Быстро растущие функции  $q(x)$ . Положительная при  $x \geq 0$  функция  $l(x)$  называется *медленно растущей*, если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x l'(x)}{l(x)} = 0.$$

Для такой функции

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{l(kx)}{l(x)} = 1 \quad (20)$$

равномерно по  $x$ , лежащему на любом конечном интервале. Функция  $1/l(x)$  — также медленно растущая. Примеры медленно

растущих функций:

$$(\ln x)^\alpha, \quad -\infty < \alpha < \infty; \quad (\ln x)^\alpha (\ln \ln x)^\beta, \quad -\infty < \alpha, \beta < \infty; \\ \exp \{(\ln x)^\alpha\}, \quad \alpha < 1.$$

Введем условие: функции  $q'$  ( $q^{-1}(x)$ )/ $x$ ,  $q''$  ( $q^{-1}(x)$ )/ $x$  являются медленно растущими, и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q''(x)}{q'(x) \sqrt{q(x)}} = 0.$$

Эти условия выполняются, например, для функций  $q(x)$  вида  $Ae^{Bx^\alpha}$ ,  $A, B, \alpha > 0$ ;  $P(x)e^{Q(x)}$ , где  $P, Q$  — полиномы,  $Q(+\infty) = +\infty$ .

Как видно из ВКБ-оценок (§ 2), остаточные члены в формуле (19) не превосходят величины  $C(I_1 + I_2)$ , где

$$I_1 = \left| \int_a^x \frac{q'(t)}{|q(t) - \lambda|^{5/2}} dt \right|, \quad I_2 = \left| \int_a^x \frac{|q''(t)|}{|q(t) - \lambda|^{3/2}} dt \right|.$$

Здесь  $a = 0$  при  $j = 1, 2$ ,  $a = \infty$  при  $j = 0$ .

Оценим  $I_1$  при  $a = \infty$ . Делая замену переменной  $t = q(x)/\lambda$ ,  $x = \varphi(\lambda t)$ , и используя (20), получаем

$$I_1 = \lambda^{-3/2} \int_{q(x)/\lambda}^{\infty} \frac{\lambda t q'(\varphi(\lambda t))}{\lambda t (t-1)^{5/2}} dt \leq \\ \leq C \lambda^{-3/2} q'(q^{-1}(\lambda)) \int_{q(x)/\lambda}^{\infty} \frac{t}{(t-1)^{5/2}} dt \leq \\ \leq C' \lambda^{-3/2} q'(q^{-1}(\lambda)) \left[ \left( \frac{q(x)}{\lambda} - 1 \right)^{-3/2} + \left( \frac{q(x)}{\lambda} \right)^{-1/2} \right].$$

Аналогично оценивается  $I_2$ .

Пусть  $N(\lambda)$  — положительная функция,  $N(+\infty) = +\infty$ ,

$$a_1(\lambda) = \lambda^{-1} [q'(q^{-1}(\lambda))]^{2/3}, \quad a_2(\lambda) = \lambda^{-1} \left[ \frac{q''(q^{-1}(\lambda))}{q'(q^{-1}(\lambda))} \right]^2.$$

Из условий на  $q(x)$  следует, что  $a_j(+\infty) = 0$ . Положим  $k_j(\lambda) = N(\lambda)a_j(\lambda)$ ,  $k_-(\lambda) = \max(k_1(\lambda), k_2(\lambda))$ , и пусть  $x_-(\lambda)$  — такая точка, что  $1 - \lambda^{-1}q(x_-(\lambda)) = k_-(\lambda)$ . Уравнение (17) имеет решения  $y_1, y_2$  вида (19) такие, что при  $0 \leq x \leq x_-(\lambda)$  справедливы оценки

$$|\varepsilon_{1,2}(x, \lambda)| \leq CN^{-3/2}(\lambda).$$

Если  $\bar{x}_-(\lambda)$  — такая точка, что

$$\lambda^{-1}q(\bar{x}_-(\lambda)) - 1 = k_0, \quad 0 < k_0 < 1,$$

то при  $0 \leq x \leq \bar{x}_-(\lambda)$  справедлива оценка

$$|\varepsilon_{1,2}(x, \lambda)| \leq C(a_1^{3/2}(\lambda) + a_2^{1/2}(\lambda)).$$

Пусть  $x_+(\lambda)$  — такая точка, что  $\lambda^{-1}q(x_+(\lambda)) - 1 = k(\lambda)$ . Уравнение (17) имеет решение  $y_0$  вида (19) такое, что при  $x_+(\lambda) \leq x < \infty$  справедлива оценка

$$|\varepsilon_0(x, \lambda)| \leq Ca_1^{3/2}(\lambda) \left[ \left( \frac{q(x)}{\lambda} - 1 \right)^{-3/2} + \left( \frac{q(x)}{\lambda} \right)^{-1/2} \right] + Ca_2^{1/2}(\lambda) \left( \frac{q(x)}{\lambda} - 1 \right)^{-1/2}.$$

В частности,  $|\varepsilon_0(x, \lambda)| \leq C'N^{-3/2}(\lambda)$  и  $y_0(+\infty, \lambda) = 0$ . Асимптотика  $y_0(x, \lambda) \sim \tilde{y}_0(x, \lambda)$ , как и в п. 3.1, является двойной. Если  $q(x) = A \exp\{Bx^\alpha\}$ , где  $A, B, \alpha > 0$ , то

$$a_1^{3/2}(\lambda) \sim C_0 b_1^{1/2}(\lambda) \sim C_1 \lambda^{-1/2} (\ln \lambda)^{1-1/\alpha}, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

## § 8. Контрпримеры

### 1. Пример Перрона. Рассмотрим систему

$$y_1' = -ay_1, \quad y_2' = (\sin \ln x + \cos \ln x - 2a)y_1 + be^{-ax}y_2, \quad (1)$$

где  $a, b$  — постоянные,  $0 < a < \sqrt{2}$ . При  $b = 0$  система распадается и имеет решения

$$y_1^0(x) = e^{-ax}, \quad y_2^0(x) = \exp\{x \sin \ln x - 2ax\}.$$

При  $b \neq 0$  ее решения имеют вид

$$y_1(x) = c_1 y_1^0(x), \quad y_2(x) = y_2^0(x) \left( c_2 + bc_1 \int_0^x \exp\{-t \sin \ln t\} dt \right).$$

Система (1) имеет вид

$$y' = \Lambda(x)y + B(x)y, \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ be^{-ax} & 0 \end{bmatrix},$$

где  $\Lambda(x)$  — диагональная матрица. Очевидно, что

$$\|B(x)\| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty; \quad \int_0^\infty \|B(t)\| dt < \infty.$$

Однако условие 2) § 3 не выполняется, так как функция

$$\operatorname{Re}(p_2(x) - p_1(x)) = \sin \ln x + \cos \ln x - a$$

имеет бесконечно много нулей на полуоси  $x \geq 0$ . Положим  $c_1 = c_2 = 1$ ; тогда

$$\frac{y_1(x)}{y_1^0(x)} = 1, \quad \frac{y_2(x)}{y_2^0(x)} = 1 + b \int_0^x \exp\{-t \sin \ln t\} dt.$$

Отсюда следует, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_2(x)/y_2^0(x) = \infty$ .

**2. Системы с параметром.** Рассмотрим систему из двух уравнений

$$y' = \lambda A(x) y$$

на отрезке  $I = [-\delta, \delta]$ ,  $\delta > 0$ . Пусть  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$  — собственные значения матрицы  $A(x)$ . В § 4, п. 2, были приведены асимптотические формулы для решений системы при следующих предположениях:

$$1) p_1(x) \neq p_2(x), \quad x \in I;$$

$$2) \operatorname{Re}(p_1(x) - p_2(x)) \text{ не меняет знак при } x \in I.$$

Если выполнено только условие 1), то система имеет тем не менее два формальных асимптотических решения вида (7) § 4. Но если условие 2) не выполняется, то может не существовать истинных решений системы с такой асимптотикой. Приведем примеры.

**Примеры.** 1. Рассмотрим систему

$$y_1' = 0, \quad y_2' = \lambda(x+i)y_2 + \lambda a(x)y_1 \quad (2)$$

на отрезке  $I$ , где  $a(x) \in C^2(I)$ . В данном случае  $p_1(x) = 0$ ,  $p_2(x) = x+i$ , так что точек поворота нет. Однако условие 2) не выполняется: функция  $\operatorname{Re}(p_2(x) - p_1(x)) = x$  меняет знак на отрезке  $I$ .

Одно из ФАР системы (2) имеет вид

$$y_1(x) = 1 + O(\lambda^{-1}), \quad y_2(x) = b(x) + O(\lambda^{-1}), \quad (3)$$

где  $b(x) = a(x)(x+i)^{-1}$ . Допустим, что система (2) имеет решение  $(y_1, y_2)$ , для которого справедлива асимптотическая формула (3) при  $\lambda \rightarrow +\infty$  равномерно по  $x \in I$ . Тогда функция  $a(x)$  аналитически продолжается в комплексную полукрестность точки  $x=0$  вида  $|x| \leq \rho$ ,  $\operatorname{Im} x \geq 0$ ,  $\rho > 0$ .

Общее решение системы (2) имеет вид

$$y_1 = c_1, \quad y_2 = e^{\lambda S(x)} \left[ c_2 + c_1 \int_{-\delta}^x e^{-\lambda S(t)} a(t) dt \right], \quad S(x) = x^2/2 + ix.$$

Из сравнения с (3) находим  $c_1 = O(\lambda^{-1})$ . В тождестве  $y_2 = y_2^0$  положим  $x = -\delta$ ,  $x = \delta$  и вычтем из второго соотношения первое; тогда получим

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\lambda S(t)} a(t) dt = O(\lambda^{-1} e^{-\lambda \delta^2/2}), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

После замены переменной  $z = S(t)$  это соотношение примет вид

$$\int_{\gamma} e^{-\lambda z} f(z) dz = O(\lambda^{-1} e^{-b\lambda}), \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Здесь  $b = \delta^2/2 > 0$ ,  $\gamma$  — дуга параболы  $z = it + t^2/2$ ,  $-\delta \leq t \leq \delta$ ,  $f(z) = a(z)(z+i)^{-1}$ ,  $z = z(t)$ .

Воспользуемся следующим предложением. Пусть  $\gamma$  — гладкая простая конечная выпуклая кривая в комплексной плоскости  $z$ ,  $f(z)$  — гладкая на  $\gamma$  функция. Пусть кривая  $\gamma$  касается мнимой оси в точке  $z = 0$ ,  $\operatorname{Re} z > 0$  в остальных точках кривой и  $\operatorname{Re} z = c > 0$  на концах кривой  $\gamma$ .

Если выполняется соотношение (4), то функция  $f(z)$  аналитически продолжается с кривой  $\gamma$  в область, ограниченную кривой  $\gamma$  и отрезком, соединяющим ее концы. Следовательно, функция  $a(x)$  аналитически продолжается в комплексную окрестность точки  $x = 0$ . Этот факт справедлив и для системы

$$y_1' = 0, \quad y_2' = \lambda(x+i)y + \lambda^{-N}a(x)y$$

при любом  $N \geq -1$ .

2. Рассмотрим систему

$$y_1' = 0, \quad y_2' = \lambda(x+i\varepsilon)y_2 + \lambda y_1 \quad (5)$$

на отрезке  $I = [-\delta, \delta]$ . Эта система также имеет ФАР вида (3). Покажем, что если  $\delta > \varepsilon > 0$ , то не существует решения системы (5), для которого справедлива асимптотическая формула (3) при  $\lambda \rightarrow +\infty$  равномерно по  $x \in I$ .

Те же рассуждения, что и в примере 1, приводят к соотношению

$$F(\lambda) \equiv \int_{-\delta}^{\delta} \exp\left\{-\lambda\left(i\varepsilon x + \frac{x^2}{2}\right)\right\} dx = O\left(\exp\left\{-\frac{\lambda\delta^2}{2}\right\}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

При  $\lambda \rightarrow +\infty$  имеем  $F(\lambda) \sim \text{const } \lambda^{-1/2} \exp\{-\lambda\varepsilon^2/2\}$ , и мы получаем противоречие, так как  $\delta > \varepsilon$ .

Такое же утверждение справедливо для системы

$$y_1' = 0, \quad y_2' = \lambda(x+i\delta)y_2 + \lambda^{-N}y_1,$$

если  $N \geq -1$ .

## § 9. Корни постоянной кратности

1. Уравнение второго порядка. Рассмотрим уравнение

$$y'' - 2\lambda a(x, \lambda^{-1})y' + \lambda^2 b(x, \lambda^{-1})y = 0 \quad (1)$$

на отрезке  $I = [a, b]$  и

$$a(x, \lambda^{-1}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)\lambda^{-j}, \quad b(x, \lambda^{-1}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x)\lambda^{-j} \quad (2)$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Условия на гладкость коэффициентов те же, что и в § 3, п. 2.1.

Пусть корни характеристического уравнения

$$p^2 - 2a_0(x)p + b_0(x) = 0$$

совпадают при всех  $x \in I$ , т. е. должно выполняться условие

$$a_0^2(x) = b_0(x), \quad x \in I. \quad (3)$$

В этом случае решения разлагаются в асимптотические ряды не по целым, а по дробным степеням  $\lambda^{-1}$ . Действительно, подстановка

$$y = \exp \left\{ \lambda \int_a^x a(t, \lambda^{-1}) dt \right\} z$$

приводит уравнение (1) к виду

$$z'' + \lambda q(x, \lambda^{-1})z = 0, \quad (4)$$

где  $q(x, \lambda^{-1})$  разлагается в АР по степеням  $\lambda^{-1}$ , причем

$$q_0(x) = b_1(x) - 2a_0(x)a_1(x) - a_0'(x).$$

Уравнение (4) имеет вид (15) § 3, с той лишь разницей, что перед коэффициентом  $q$  стоит множитель  $\lambda$  вместо  $\lambda^2$ . Поэтому решения будут разлагаться в асимптотические ряды по степеням  $\lambda^{-1/2}$ , если  $q_0(x)$  удовлетворяет сформулированным в § 3, п. 1.6, условиям.

**2. Системы уравнений.** Рассмотрим систему из двух уравнений

$$y' = \lambda A(x, \lambda^{-1})y \quad (5)$$

при тех же условиях на матрицу  $A$ , что и в § 4, п. 1. Имеем

$$A(x, \lambda) \sim \sum_{j=0}^{\infty} A_j(x) \lambda^{-j}, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Пусть собственные значения матрицы  $A_0(x)$  совпадают:  $p_1(x) \equiv p_2(x) = p(x)$ ,  $x \in I$ . Рассмотрим два случая.

А. Пусть матрица  $A_0(x)$  приводится к диагональному виду, т. е. существует матрица  $T(x)$  класса  $C^\infty(I)$ , невырожденная при  $x \in I$  и такая, что

$$T^{-1}(x)A_0(x)T(x) = p(x)I, \quad x \in I.$$

После подстановки

$$y = \exp \left\{ \lambda \int_a^x p(t) dt \right\} T(x)z \quad (6)$$

система (5) принимает вид

$$z' = B(x, \lambda^{-1})z,$$

где  $B$  разлагается в АР по степеням  $\lambda^{-1}$ . Эта система не содержит малого параметра при старшей производной, и асимптотику ре-

пений можно получить только тогда, когда можно проинтегрировать систему  $z' = B_0(x)z$ .

Б. Пусть матрица  $A_0(x)$  приводится к жордановой нормальной форме, т. е. существует матрица  $T(x)$  такая, что

$$T^{-1}(x)A(x)T(x) = \begin{bmatrix} p(x) & q(x) \\ 0 & p(x) \end{bmatrix}.$$

Подстановка (6) приводит систему (5) к виду  $z' = \lambda B(x, \lambda^{-1})z$ , где  $B(x, \lambda^{-1})$  разлагается в АР по степеням  $\lambda^{-1}$ . Имеем

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda q(x)z_2 + b_{11}(x)z_1 + b_{12}(x)z_2 + \dots, \\ z_2' &= b_{21}(x)z_1 + b_{22}(x)z_2 + \dots \end{aligned}$$

После подстановки

$$z_1 = \sqrt{\lambda} w_1, \quad z_2 = w_2$$

получим систему

$$\begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix} = \left[ \sqrt{\lambda} \begin{bmatrix} 0 & q(x) \\ b_{21}(x) & 0 \end{bmatrix} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Эта система имеет вид (8) § 4, с той лишь разницей, что ее матрица разлагается в АР не по степеням  $\lambda^{-1}$ , а по степеням  $\lambda^{-1/2}$ . Поэтому все результаты § 4, п. 3, применимы к системе (7). Случай Б встречается в приложениях крайне редко.

## § 10. Задачи на собственные значения

В этом и следующем параграфах приведены некоторые применения приведенных выше асимптотических формул. Однако в задачах механики, физики и других прикладных задачах уравнения, содержащие большой параметр, имеют, как правило, точки поворота. Поэтому основные приложения асимптотических методов содержатся в последующих главах.

**1. Задача Штурма — Лиувилля.** Рассмотрим задачу на собственные значения на отрезке  $I = [a, b]$ :

$$y'' + \lambda^2 q(x)y = 0, \quad x \in I, \quad (1)$$

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (2)$$

Как известно [9], при  $q(x) \neq 0$  эта задача имеет бесконечно много собственных значений  $\lambda_n^2$ . Требуется найти асимптотику собственных значений и собственных функций  $y_n(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Пусть  $q(x) > 0$  при  $x \in I$ ,  $q(x) \in C^\infty(I)$ ; тогда  $\lambda_n^2 > 0$  при всех  $n$ . Поэтому будем считать, что  $\lambda_n > 0$ . В этом случае асимптотика спектра и собственных функций хорошо известна [24] и рассматриваемый пример носит чисто иллюстративный характер.

Пусть  $y_1(x, \lambda)$ ,  $y_2(x, \lambda)$  — ФСР; тогда всякое решение имеет вид  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ . Краевые условия (2) приводят к системе двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно  $c_1, c_2$ . Так как  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ , то определитель системы равен нулю и уравнение для собственных значений имеет вид

$$F(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} y_1(a, \lambda) & y_2(a, \lambda) \\ y_1(b, \lambda) & y_2(b, \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Уравнение (1) имеет два решения, для которых справедливы АР:

$$\begin{aligned} y_{1,2}(x, \lambda) &= q^{-1/4}(x) \exp\{\pm i\tilde{S}(x, \lambda)\}, \\ \tilde{S} &= \lambda \int_a^x \sqrt{q(t)} dt + \sum_{k=1}^{\infty} (\pm \lambda)^{-k} \int_a^x \beta_k(t) dt \end{aligned} \quad (4)$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$  равномерно по  $x \in I$ . Функции  $\beta_k(x)$  определяются из рекуррентных соотношений

$$\beta_0(x) = -\frac{q'(x)}{4q(x)}, \quad \beta_{k+1}(x) = \frac{i}{2\sqrt{q(x)}} \left( \beta_k'(x) + \sum_{s=0}^k \beta_s(x) \beta_{k-s}(x) \right). \quad (5)$$

Отсюда следует, что функции  $\beta_{2k+1}(x)$  — чисто мнимые, функции  $\beta_{2k}(x)$  — вещественные. Обозначим

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \sum_{k=-1}^{\infty} c_{2k+1} \lambda^{-2k-1}, \\ c_{-1} &= \int_a^b \sqrt{q(t)} dt, \quad c_k = -i \int_a^b \beta_k(t) dt, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Ряд  $\Phi(\lambda)$  и все последующие — асимптотические. Подставляя АР (4) в уравнение (3), получаем уравнение для собственных значений:  $\sin \Phi(\lambda) = 0$ , так что  $\Phi(\lambda) = n\pi$ ,  $n \geq 0$  — целое. Следовательно, для  $\lambda_n$  справедливо АР по нечетным степеням  $n^{-1}$ :

$$\lambda_n = \sum_{k=-1}^{\infty} d_{2k+1} n^{-2k-1}.$$

Главный член асимптотики равен

$$\lambda_n = \pi n \left( \int_a^b \sqrt{q(t)} dt \right)^{-1} + O(n^{-1}).$$

Коэффициенты  $d_k$  можно вычислить по формуле Бюрмана — Лагранжа:

$$d_k = \frac{\pi}{k!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{k-1} [z\Phi(z^{-1})]^k \Big|_{z=0}.$$



Найдем асимптотику собственных функций  $y_n(x)$ . Из первого из условий (2) находим, что  $y_n(x) = c(y_1(x, \lambda_n) - y_2(x, \lambda_n))$ , или  $y_n(x) = \text{Im } y_1(x, \lambda_n)$ , так как решения  $y_1, y_2$  можно выбрать комплексно сопряженными при  $x \in I$ . Нормируем функцию

$y_n(x)$  условием  $\int_a^b y_n^2(x) dx = 1$ ; тогда получим

$$y_n(x) = c_n q^{-1/4}(x) \sin \delta(x, \lambda_n).$$

Вид функции  $\delta$  указан в (4),  $c_n$  — нормировочный множитель, который разлагается в AP:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{J}} \left( 1 + \sum_{k=0}^{\infty} f_k n^{-2k-1} \right), \quad J = \int_a^b q^{-1/2} dx.$$

Действительно,

$$\int_a^b q^{-1/2} \sin^2 \delta(x, \lambda_n) dx = \frac{1}{2} \left[ J - \int_a^b q^{-1/2} \cos 2\delta(x, \lambda_n) dx \right]$$

и интегрирование по частям приводит к формуле для  $c_n$ .

Этот метод распространяется на более широкие классы краевых задач, например, вида

$$\begin{aligned} y'' + \lambda^2 q(x, \lambda^{-1}) y &= 0, \\ a_{10}(\lambda) y(a) + a_{11}(\lambda) y'(a) + a_{20}(\lambda) y(b) + a_{21}(\lambda) y'(b) &= 0, \\ b_{10}(\lambda) y(a) + b_{11}(\lambda) y'(a) + b_{20}(\lambda) y(b) + b_{21}(\lambda) y'(b) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $a_{jk}(\lambda), b_{jk}(\lambda)$  — полиномы от  $\lambda$  с комплексными коэффициентами,

$$q(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(x) \lambda^{-k}, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Это AP равномерно по  $x \in I$ ,  $q_0(x) > 0$ , функции  $q_k(x)$  при  $k \geq 1$  могут быть комплекснозначными.

Если же  $q(x)$  — комплекснозначная функция, то даже простейшая задача (1), (2) почти не исследована. Приведенные в § 8 примеры показывают, что в этом случае, по-видимому, не существует «универсальной формулы» для асимптотики собственных значений (ср. [10], гл. IV, § 7).

**2. Задача Редже.** Рассмотрим задачу на собственные значения на отрезке  $I = [0, a]$ ,  $a > 0$ :

$$\begin{aligned} -y'' + q(x) y &= k^2 y, \\ y(0) &= 0, \quad y'(a) + iky(a) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $k$  — спектральный параметр,

$$q(x) = (a-x)^\alpha r(x), \quad r(a) \neq 0, \quad \alpha > -1, \quad (8)$$

где  $r(x) \in C^\infty(I)$ , так что функция  $q(x)$  или ее производные могут иметь особенность в точке  $x = a$ . Эта задача несамосопряженная даже для вещественных функций  $q(x)$  и потому имеет комплексный спектр. В полуплоскости  $\text{Im } k \leq 0$  имеется лишь конечное число точек спектра, и мы исследуем задачу (7) при  $\text{Im } k \geq 0$ .

Приведенные в предыдущих параграфах АР в данном случае неприменимы. Дело в том, что функция  $Q(x, k) = k^2 - q(x)$  при нецелом  $\alpha > 0$  не имеет особенности в точке  $x = a$ , а все ее производные достаточно высокого порядка имеют. Поэтому для построения АР решений воспользуемся интегральными уравнениями

$$y_1 = e^{-ikx}u_1, \quad u_1(x) = 1 + \frac{i}{2k} \int_0^x (1 - e^{2ik(x-t)}) q(t) u_1(t) dt.$$

Пусть  $K(x, t, k)$  — ядро интегрального оператора; тогда, при  $\text{Im } k \geq 0$ ,  $|K(x, t, k)| \leq |k|^{-1} |q(t)|$ , и так как  $\int_0^a |q(t)| dt < \infty$ , то метод последовательных приближений сходится при  $k \in G$ :  $\text{Im } k \geq 0$ ,  $|k| \geq R \gg 1$ . Поэтому

$$y_1(x, k) = e^{-ikx} \left[ 1 + \frac{i}{2k} \int_0^x (1 - e^{-2ik(x-t)}) q(t) dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right]$$

и эту асимптотику можно дифференцировать.

Кроме того,  $y_1(0, k) = 1$ ,  $y_1'(0, k) = -ik$ , так что решение  $y_1(x, k)$  является целой функцией  $k$  при каждом фиксированном  $x \in I$ .

Решение  $y_2$  определяется из интегрального уравнения

$$y_2 = e^{ik(x-a)}u_2, \quad u_2(x) = 1 + \frac{i}{2k} \int_a^x (e^{2ik(t-x)} - 1) q(t) u_2(t) dt.$$

Это решение удовлетворяет данным Коши  $y_2(a, k) = 1$ ,  $y_2'(a, k) = ik$ , является целой функцией  $k$  при каждом фиксированном  $x \in I$ , и

$$y_2(x, k) = e^{ik(x-a)} \left[ 1 + \frac{i}{2k} \int_a^x (e^{2ik(t-x)} - 1) q(t) dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right].$$

Возьмем собственную функцию в виде  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ ; тогда из (7) получим уравнение для собственных значений

$$y_2(0) (y_1'(a) + iky_1(a)) - 2ik = 0.$$

Используя АР решений, можно привести это уравнение к виду

$$F(k) \equiv \int_0^a e^{-2ikt} q(t) dt = 2ik [1 + O(k^{-1})]. \quad (9)$$

Применяя метод перевала, получаем

$$F(k) = c_0 e^{-2ika} k^{-\alpha-1} [1 + O(k^{-1})],$$

$$c_0 = \exp \left\{ i \frac{\pi}{2} (\alpha + 1) \right\} 2^{-\alpha-1} \Gamma(\alpha + 1) r(a)$$

при  $\text{Im } k \geq 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , так что уравнение (9) принимает вид

$$e^{-z} z^{\alpha+2} = -a^{\alpha+2} r(a) \Gamma(\alpha + 1) [1 + O(k^{-1})], \quad z = -2ika,$$

откуда находим асимптотику спектра:

$$k_n = \frac{\pi n}{a} + \frac{i(\alpha + 2)}{2a} \ln n + \frac{i}{2a} [(\alpha + 2) \ln(-2\pi i) - (\alpha + 2) \ln a - \\ - \ln(-r(a) \Gamma(\alpha + 1))] + O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

При  $|k| \gg 1$  спектр состоит из двух серий, отвечающих значениям  $n > 0$  и  $n < 0$ . Если функция  $q(x)$  вещественна, то спектр состоит из пар  $(k_n, -\bar{k}_n)$ .

## § 11. Задача о рассеянии

**1. Матрица рассеяния.** Рассмотрим задачу о рассеянии [12] для уравнения

$$y'' + \lambda^2 q(x) y = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda > 0$ , функция  $q(x)$  вещественна и непрерывна при всех  $x \in \mathbb{R}$ .

**1.1. S-матрица и ее свойства.** Введем следующие условия:

1) Существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x) = q_{\pm} > 0$ .

2) Сходятся интегралы

$$\int_{-\infty}^0 |\sqrt{q(x)} - \sqrt{q_-}| dx, \quad \int_0^{\infty} |\sqrt{q(x)} - \sqrt{q_+}| dx.$$

Тогда уравнение (1) имеет две ФСР со следующим асимптотическим поведением на бесконечности:

$$y_{1,2}^+(x) = q_+^{-1/4} \exp \{ \pm i\lambda \sqrt{q_+} x \} [1 + o(1)], \quad x \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

$$y_{1,2}^-(x) = q_-^{-1/4} \exp \{ \pm i\lambda \sqrt{q_-} x \} [1 + o(1)], \quad x \rightarrow -\infty.$$

Этими условиями решения  $y_j^{\pm}$  определяются однозначно.

Решения  $y_1^+$ ,  $y_1^-$  ( $y_2^+$ ,  $y_2^-$ ) описывают волны, бегущие направо (налево). Справедливы тождества

$$\overline{y_1^- (x)} = y_2^- (x), \quad \overline{y_1^+ (x)} = y_2^+ (x).$$

При фиксированном  $\lambda$  всякое решение  $y$  можно представить в виде

$$y(x) = c_1^- y_1^- (x) + c_2^- y_2^- (x) = c_1^+ y_1^+ (x) + c_2^+ y_2^+ (x),$$

где  $c_j^\pm$  — постоянные. Матрицей рассеяния называется  $(2 \times 2)$ -матрица  $S(\lambda) = (s_{jk}(\lambda))$ , которая определяется соотношением

$$\begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_2^+ \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} c_1^- \\ c_2^- \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Решения  $y_1^-$ ,  $y_2^+$  можно интерпретировать как волны, бегущие из  $-\infty$  и из  $+\infty$  к центру (сходящиеся волны), а решения  $y_1^+$ ,  $y_2^-$  — как расходящиеся (уходящие от центра на бесконечность) и рассеянные на потенциале  $q(x)$  волны.

$S$ -матрица описывает результат процесса рассеяния. Ее основные свойства таковы:

1)  $S$ -матрица унитарна, т. е.

$$|s_{11}|^2 + |s_{12}|^2 = |s_{21}|^2 + |s_{22}|^2 = 1, \quad s_{11}\bar{s}_{21} + s_{12}\bar{s}_{22} = 0.$$

2)  $s_{11} = s_{22}$  (это эквивалентно соотношению  $S(-\lambda) = S^*(\lambda)$ , где  $S^*$  — эрмитово сопряженная матрица).

1.2. Коэффициенты прохождения и отражения. Пусть решение  $y$  имеет вид

$$y(x) = T_+ y_1^+ (x) = y_1^- (x) + R_+ y_2^- (x). \quad (4)$$

При  $x \gg 1$   $y$  есть бегущая направо волна, а при  $x \ll 1$  — сумма падающей волны  $y_1^-$  и отраженной волны  $R_+ y_2^-$ . Числа  $T_+$ ,  $R_+$  выражаются через элементы  $S$ -матрицы:

$$T_+ = s_{11}, \quad R_+ = s_{21}. \quad (5)$$

Величины  $|T_+|^2$ ,  $|R_+|^2$  называются коэффициентами прохождения и отражения соответственно. Из унитарности  $S$ -матрицы следует, что  $|T_+|^2 + |R_+|^2 = 1$  (закон сохранения потока энергии). Аналогично, если падающая волна бежит налево, то

$$y(x) = T_- y_2^- (x) = y_2^+ (x) + R_- y_1^+ (x), \\ T_- = s_{22}, \quad R_- = s_{12}, \quad |T_-|^2 + |R_-|^2 = 1.$$

1.3. Задача на полуоси. Рассмотрим уравнение (1) на полуоси  $R^+$ :  $0 < x < \infty$  и поставим одно из краевых условий при  $x = 0$ :

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(0) + ay(0) = 0, \quad (6)$$

где  $a$  вещественно. Решение  $y$ , удовлетворяющее одному из крайних условий (6), имеет вид

$$y(x) = c_1(\lambda) y_1(x) + c_2(\lambda) y_2(x),$$

где  $y_j = y_j^+$ . Функция

$$S(\lambda) = -c_2(\lambda)/c_1(\lambda) \quad (7)$$

называется *амплитудой рассеяния*. Роль падающей волны играет бегущая налево волна  $c_2 y_2$ . Так как решение  $y$  можно выбрать вещественным, то  $\overline{c_1(\lambda)} = c_2(\lambda)$  и поэтому

$$|S(\lambda)| = 1. \quad (8)$$

**1.4. Надбарьерное отражение.** Пусть  $q(x) > 0$  при  $x \in \mathbb{R}$  и быстро убывает при  $|x| \rightarrow \infty$ , так что все интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q^{(j)}(x)| dx, \quad j=1, 2, \dots,$$

сходятся. Найдем асимптотику  $S$ -матрицы при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

Уравнение (1) имеет решения

$$\tilde{y}_{1,2}^+(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \exp\{\pm iS(0, x)\} \exp\left\{i \int_{+\infty}^x a_{1,2}(t, \lambda) dt\right\},$$

$$S(0, x) = \int_0^x \sqrt{q(t)} dt, \quad a_{1,2} = \sum_{j=1}^{\infty} (\pm \lambda)^{-j} \beta_j(x).$$

Функции  $\beta_j(x)$  определены в § 10, (5). Эти АР — двойные, т. е. пригодны при  $\lambda \rightarrow +\infty$  равномерно по  $x \in R$  и при  $x \rightarrow +\infty$  равномерно по  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$  (§ 6). Вторая ФСР ( $y_1^-, y_2^-$ ) имеет такой же вид, с той лишь разницей, что интегралы берутся от  $-\infty$  до  $x$  и что АР для нее пригодны при  $x \rightarrow -\infty$ .

Имеем

$$\tilde{y}_1^+(x, \lambda) = A(\lambda) \tilde{y}_1^-(x, \lambda) + B(\lambda) \tilde{y}_2^-(x, \lambda).$$

Положив в этом тождестве и тождестве для первых производных  $x=0$ , из полученной системы уравнений найдем

$$A(\lambda) = \exp\left\{-i \int_{-\infty}^{\infty} a_1(x, \lambda) dx\right\}, \quad B(\lambda) = O(\lambda^{-\infty}).$$

Выразим решения  $\tilde{y}_j^{\pm}$  через  $y_j^{\pm}$ ; тогда найдем элементы  $s_{11}$ ,  $s_{21}$  матрицы рассеяния, используя соотношения (4), (5). В силу условия 2) имеем

$$\int_0^x \sqrt{q(t)} dt = x \sqrt{q_{\pm}} + B_{\pm} + o(1), \quad B_{\pm} = \int_0^{\pm\infty} (\sqrt{q(x)} - \sqrt{q_{\pm}}) dx,$$

где  $o(1)$  есть бесконечно малая при  $x \rightarrow \pm\infty$  соответственно.

Сравнивая асимптотику решений  $y_j^+$ ,  $\tilde{y}_j^+$  ( $y_j^-$ ,  $\tilde{y}_j^-$ ) при  $x \rightarrow +\infty$  (соответственно при  $x \rightarrow -\infty$ ), получаем

$$\tilde{y}_{1,2}^+ = e^{\pm i\lambda B} y_{1,2}^+, \quad \tilde{y}_{1,2}^- = e^{\pm i\lambda B} y_{1,2}^-.$$

Напомним, что каждое решение уравнения (1) однозначно определяется своим асимптотическим поведением при  $x \rightarrow +\infty$  или при  $x \rightarrow -\infty$ . Окончательно получаем

$$s_{11} = \exp \left\{ i\lambda \left( \int_0^{\infty} (\sqrt{q(x)} - \sqrt{q_+}) dx + \int_{-\infty}^0 (\sqrt{q(x)} - \sqrt{q_-}) dx \right) + \right. \\ \left. + i \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j} \beta_j(x) dx \right\}, \quad s_{21} = O(\lambda^{-\infty}). \quad (9)$$

Элементы  $s_{11}$ ,  $s_{22}$  выражаются через уже вычисленные элементы.

2. Амплитуда рассеяния при наличии поглощения. Рассмотрим уравнение

$$y'' + (k^2 + ikr(x))y = 0 \quad (10)$$

на полуоси  $x > 0$  с краевым условием  $y(0) = 0$ . Здесь  $k > 0$  — параметр,  $r(x) > 0$  при  $0 < x < l$ ,  $r(x) \equiv 0$  при  $x \geq l$ ,  $r(x) \in C^\infty$  при  $x > 0$  и функция  $r(x)$  имеет особенность в точке  $x = 0$ :

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} r(x) = \infty, \quad \int_0^l \sqrt{r(x)} dx = \infty. \quad (11)$$

При  $x > l$  имеем

$$y(x, k) = A(k) e^{-ikx} - B(k) e^{ikx}.$$

Функция  $s(k) = B(k)/A(k)$  называется *амплитудой рассеяния*. Физическая интерпретация задачи такова: на поглощающий слой, заполняющий интервал  $(0, l)$ , падает из бесконечности плоская волна. Требуется найти асимптотику амплитуды рассеяния  $s(k)$  при  $k \rightarrow +\infty$ .

Из условия (11) следует, что существует единственное, с точностью до постоянного множителя, решение  $y(x, k)$  уравнения (10) такое, что  $y(0, k) = 0$ . Амплитуда рассеяния выражается через  $y$ :

$$s(k) = e^{-2ikl} \frac{iky(l, k) + y'(l, k)}{iky(l, k) - y'(l, k)}. \quad (12)$$

Из (10) следует, что  $s(-\bar{k}) = \overline{s(k)}$ .

Исследуем АР и аналитичность по параметру  $k$  решения  $y(x, k)$  при условии, что функция  $r(x)$  удовлетворяет условиям п. 1.5 § 6. Пусть  $Q(x, k) = -k^2 - ikr(x)$ . Выясним, при каких комплексных  $k$  выполнены условия 1), 2) из § 3. Так как  $r(x) \geq 0$ ,

то  $Q \neq 0$ , если  $k \in D_0$  — это комплексная плоскость  $k$  с разрезом по мнимой полуоси  $(-i\infty, 0)$ . Пусть  $D_x$  — полуплоскость  $\text{Im } k \geq -r(x)/2$  с разрезом по отрезку  $[-ir(x)/2, 0]$ ,  $w = \sqrt{Q(x, k)}$  — ветвь корня в области  $D_x$  такая, что  $\text{Re } w \rightarrow +\infty$  при  $\text{Im } k \rightarrow +\infty$ . Функция  $w$  взаимно однозначно отображает  $D_x$  на полуплоскость  $\text{Re } w > 0$ , так что  $\text{Re } \sqrt{Q(x, k)} \geq 0$  при  $k \in D_x$  и, в частности,  $\text{Re } \sqrt{Q(x, k)} \geq 0$  при  $\text{Im } k \geq 0$ . Поэтому для решения  $y(x, k)$  справедливо АР (8) § 7, где  $j = 2$ , а  $q$  следует заменить на  $-1 - ik^{-1}r(x)$  при  $|k| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im } k \geq 0$ . Кроме того, решение  $y(x, k)$  голоморфно по  $k$  в области  $D_0$  при каждом фиксированном  $x$ , что следует из § 3, п. 1.5, так что  $s(k)$  — мероморфная функция  $k$  в области  $D_0$ .

Асимптотика амплитуды рассеяния определяется поведением функции  $r(x)$  в окрестности точки  $x = l$  (как и в задаче Редже, § 10). Возможны два варианта.

А. Функция  $r(x)$  имеет нуль конечного порядка  $n \geq 1$ . Тогда

$$s(k) = 2^{-n-3i-nk^{-n-2}e^{-2ikl}} [1 + O(k^{-1/2})]$$

при  $|k| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im } k \geq 0$ . Эта формула доказывается прямой подстановкой АР решения  $y$  в (12). Видно, что чем ближе стык поглощающего слоя  $0 < x < l$  со средой  $x > l$ , тем меньше коэффициент отражения  $|s(k)|$ .

Б. Функция  $r(x)$  имеет нуль бесконечного порядка. Тогда  $s(k) = O(k^{-\infty})$ . Чтобы получить более точную информацию, приходится, как и в задаче Редже, обратиться к системе интегральных уравнений для решения  $y$ . Из (14) § 2 имеем

$$y = Q^{-1/4} (u_1 + u_2), \quad u_1 = 1 + \int_0^x \alpha_1 (u_1 + u_2) dt,$$

$$u_2 = - \int_0^x \alpha_1 e^{2S(x,t)} (u_1 + u_2) dt.$$

Здесь  $\alpha_1$  выражается через функцию  $Q$  по формуле (9) § 1,

$$S(t, x) = \int_t^x \sqrt{Q(t, k)} dt, \quad \text{Re } \sqrt{Q} \geq 0, \quad \text{Im } k \geq 0.$$

Так как  $u_1 = 1 + O(k^{-1/2})$ ,  $u_2 = O(k^{-1/2})$  (все оценки приводятся при  $\text{Im } k \geq 0$ ), то из (12) получаем

$$s(k) = -e^{-2ikl} u_2(l, k) [1 + O(k^{-1/2})].$$

Далее,

$$u_2(l, k) = - \int_0^l [1 + O(k^{-1/2})] \alpha_1 e^{-2S(t, x)} dt$$

и задача сводится к вычислению асимптотики этого интеграла. Если  $r(x) = e^{-f(x)}$  и  $f(x) \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow l - 0$  достаточно правильно (например,  $f(x) = A(l-x)^{-\alpha}$ ,  $A > 0$ ,  $\alpha > 0$ ), то асимптотику при  $k = i\sigma$ ,  $\sigma \rightarrow +\infty$ , удается вычислить методом Лангаса. Тогда

$$s(k) \sim \frac{\sqrt{2\pi} (f'(t_0))^2}{8\sigma^3 \sqrt{f''(t_0)}} \exp\{2\sigma t_0 - f(t_0)\}, \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

Здесь  $t_0$  — точка перевала:  $f'(t_0) = 2\sigma$ , такая, что  $t_0 \rightarrow l$  при  $\sigma \rightarrow +\infty$ .

3. Адиабатический инвариант линейного гармонического осциллятора. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2(\varepsilon t) x = 0 \quad (13)$$

на вещественной оси  $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ , где  $\varepsilon > 0$  — малый параметр,  $\omega(t) > 0$ ,  $\omega(t) \in C^\infty(\mathbf{R})$  и существуют конечные пределы

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \omega(t) = \omega_{\pm} > 0.$$

Уравнение (13) описывает линейный гармонический осциллятор, частота колебаний которого  $\omega(\varepsilon t)$  медленно меняется со временем. График функции  $\omega(t)$  есть гладкая ступенька при  $\omega_+ \neq \omega_-$ .

Адиабатическим инвариантом физической системы называется величина, которая мало меняется при медленном (но не обязательно малом!) изменении параметров системы. Иными словами, адиабатический инвариант есть приближенный закон сохранения, или приближенный первый интеграл. Для уравнения (13) адиабатический инвариант Эренфеста есть отношение энергии осциллятора к его частоте:

$$J(t, \varepsilon) = \frac{\dot{x}^2 + \omega(\varepsilon t) x^2}{2\omega(\varepsilon t)}, \quad (14)$$

где  $x = x(t, \varepsilon)$  — решение уравнения (13). Величина

$$J(\varepsilon) = J(+\infty, \varepsilon) - J(-\infty, \varepsilon) \quad (15)$$

называется полным изменением адиабатического инварианта.

З а м е ч а н и е. Уравнение (13) при  $\varepsilon = 1$  имеет точный первый интеграл (инвариант Льюиса)

$$I = \frac{1}{2} [\rho^{-2} \dot{x}^2 + (\rho \dot{x} - \dot{\rho} x)^2],$$

где  $\rho(t)$  — решение нелинейного уравнения

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t) \rho = -\rho^3.$$

Связь последнего уравнения с уравнением (13) оказывается полезной в ряде вопросов.



3.1. Адиабатический инвариант и задача о рассеянии. Подстановка  $\tau = \varepsilon t$  приводит уравнение (13) к виду

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \psi}{d\tau^2} + \omega^2(\tau) \psi = 0, \quad (16)$$

где  $\psi(\tau, \varepsilon) = x(t, \varepsilon)$ . Это уравнение отличается от уравнения (1) только обозначениями. Пусть  $\omega(t)$  достаточно быстро стремится к пределу при  $t \rightarrow \pm \infty$ , так, что выполнено условие:

1) Сходятся интегралы

$$\int_{+\infty}^{\infty} |\omega(t) - \omega_+| dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\omega(t) - \omega_-| dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (|\dot{\omega}(t)|^2 + |\ddot{\omega}(t)|) dt.$$

Тогда уравнение (16) при каждом фиксированном  $\varepsilon > 0$  имеет две ФСР со следующими асимптотиками:

$$\begin{aligned} \psi_{1,2}^+ &\sim \omega_+^{-1/2} \exp\{\pm i\omega_+ \tau/\varepsilon\}, \quad \tau \rightarrow +\infty, \\ \psi_{1,2}^- &\sim \omega_-^{-1/2} \exp\{\pm i\omega_- \tau/\varepsilon\}, \quad \tau \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

которые можно два раза дифференцировать. Любое решение уравнения (16) представимо в виде

$$\psi = c_1^+ \psi_1^+ + c_2^+ \psi_2^+ = c_1^- \psi_1^- + c_2^- \psi_2^-, \quad (17)$$

где  $c_j^\pm$  зависят только от  $\varepsilon$ , и для полного изменения адиабатического инварианта справедлива формула

$$J(\varepsilon) = 2(c_1^+ c_2^+ - c_1^- c_2^-). \quad (18)$$

3.2. Оценки  $J(\varepsilon)$ . По построению  $J(t, \varepsilon)$  — однородный оператор,  $J(\varepsilon)$  — однородный квадратичный функционал, определенные на решениях уравнения (13). Поэтому при вычислении асимптотик  $J(t, \varepsilon)$ ,  $J(\varepsilon)$  требуется нормировать решения. Нормируем решение  $\psi$  вида (17) следующим образом: фиксируем числа  $c_1^-, c_2^-$ , не зависящие от  $\varepsilon$ , т. е. зададим асимптотику решения  $\psi$  при  $\tau \rightarrow -\infty$ . Тогда

$$J(\varepsilon) = 2|s_{11}|^{-2} [(|s_{12}|^2 + |s_{21}|^2) c_1^- c_2^- - s_{21} (c_1^-)^2 - \bar{s}_{21} (c_2^-)^2]. \quad (19)$$

Если решение  $x$  вещественно, то  $c_1^- = \bar{c}_2^- = c$  и

$$J(\varepsilon) = 2|s_{11}|^{-2} [(|s_{12}|^2 + |s_{21}|^2) - 2\operatorname{Re}(s_{21}c^2)].$$

При условии 1)  $J(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Если же функции  $\omega(t) - \omega_+$ ,  $\omega(t) - \omega_-$  принадлежат соответственно пространствам Шварца  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^-)$ , то

$$J(\varepsilon) = O(\varepsilon^\infty), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

В гл. III, § 8, будет показано, что если функция  $\omega(t)$  голоморфна в окрестности вещественной оси, то  $J(\varepsilon)$  экспоненциально убывает при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

## ГЛАВА III

### УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

В этой главе рассматриваются уравнения вида

$$w'' + p(z, \lambda) w' + q(z, \lambda) w = 0$$

с целыми или мероморфными коэффициентами. Основной задачей асимптотической теории является построение асимптотики фундаментальной системы решений при  $\lambda \rightarrow \infty$  во всей комплексной плоскости  $z$ . Рассматривается также ряд конкретных задач спектрального анализа и математической физики.

#### § 1. Линии Стокса и области, ими ограниченные

1. Локальная структура линий Стокса. Рассмотрим уравнение

$$w'' - \lambda^2 q(z) w = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda > 0$  — параметр, функция  $q(z)$  голоморфна в области  $D$  комплексной плоскости  $Z$ . Обозначим

$$S(z_0, z) = \int_{z_0}^z \sqrt{q(t)} dt \quad (2)$$

и исследуем локальную структуру линий уровня  $l_c$ :  $\operatorname{Re} S(z_0, z) = c$ . Пусть  $q(z_0) \neq 0$ ,  $U$  — круг  $|z - z_0| < r$  радиуса  $0 < r \ll 1$ . Функция  $\sqrt{q(z)}$  распадается в  $U$  на две голоморфные ветви. Фиксируем одну из них; тогда формула (2) определит голоморфную в  $U$  функцию (путь интегрирования лежит в  $U$ ) — элемент (росток) аналитической функции. Аналитически продолжив его, получим многозначную аналитическую функцию  $S(z_0, z)$ ; ее особые точки — нули функции  $q(z)$  (точки ветвления). Семейство линий уровня  $\{l_c\}$ ,  $-\infty < c < \infty$ , определено однозначно, хотя функция  $S$  может быть бесконечнозначной. Исследуем локальную структуру линий уровня. Если  $q(z_0) \neq 0$  и  $r \ll 1$ , то из (2) можно выразить  $z$  через  $S$ :  $z - z_0 = \varphi(S)$ , где  $\varphi(S)$  — голоморфная в точке  $S = 0$  функция,  $\varphi'(0) \neq 0$ . Поэтому локально

семейство  $\{l_c\}$  устроено как семейство параллельных отрезков, а малые дуги этих линий — аналитические кривые.

Критическими точками семейства  $\{l_c\}$  являются нули функции  $q(z)$ , т. е. *точки поворота* уравнения (1).

Пусть  $z_0$  — точка поворота. Максимальная связная компонента линии уровня

$$\operatorname{Re} S(z_0, z) = 0 \quad (3)$$

с началом в точке  $z_0$ , не содержащая других точек поворота, называется *линией Стокса* (ЛС) уравнения (1). ЛС — аналитическая кривая. Аналогично определяется ЛС для уравнения

$$w'' - Q(z, \lambda) w = 0,$$

где параметр  $\lambda$  может быть комплексным:

$$\operatorname{Re} \int_{z_0(\lambda)}^z \sqrt{Q(t, \lambda)} dt = 0.$$

Здесь  $z_0(\lambda)$  — точка поворота.

ЛС и области, ими ограниченные, играют фундаментальную роль при исследовании асимптотики решений в большом.

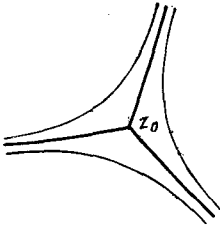


Рис. 1.



Рис. 2.

Объединение всех ЛС уравнения называется *графом Стокса* и обозначается  $\Phi$ , а его связные компоненты — *комплексами Стокса*.

*З а м е ч а н и е.* Имеется некоторый разнобой в определениях ЛС. Например, в [29] ЛС определяются уравнением  $\operatorname{Im} S(z_0, z) = 0$ , а определенные выше ЛС называются сопряженными линиями Стокса или антистоксовыми линиями.

Пусть  $z_0$  — точка поворота порядка  $n$ ; тогда при  $z \approx z_0$

$$q(z) \sim a(z - z_0)^n, \quad a \neq 0,$$

$$S(z_0, z) \sim \frac{2\sqrt{a}}{n+2} (z - z_0)^{n/2+1}.$$

Поэтому из точки поворота порядка  $n$  выходит  $n + 2$  ЛС и угол между соседними линиями в точке  $z_0$  равен  $2\pi/(n + 2)$ . Из простой

точки поворота ( $n = 1$ ) выходят три ЛС, и угол между двумя соседними ЛС равен  $2\pi/3$  (рис. 1).

Пусть  $z_0$  — простой полюс функции  $q(z)$ ; тогда  $S(z_0, z) \sim a\sqrt{z - z_0}$ , где  $z \rightarrow z_0$ ,  $a \neq 0$ . Уравнение (3) определяет локально одну кривую с началом в точке  $z_0$  (рис. 2), которая также называется *линией Стокса*. Соответственно, полюс первого порядка

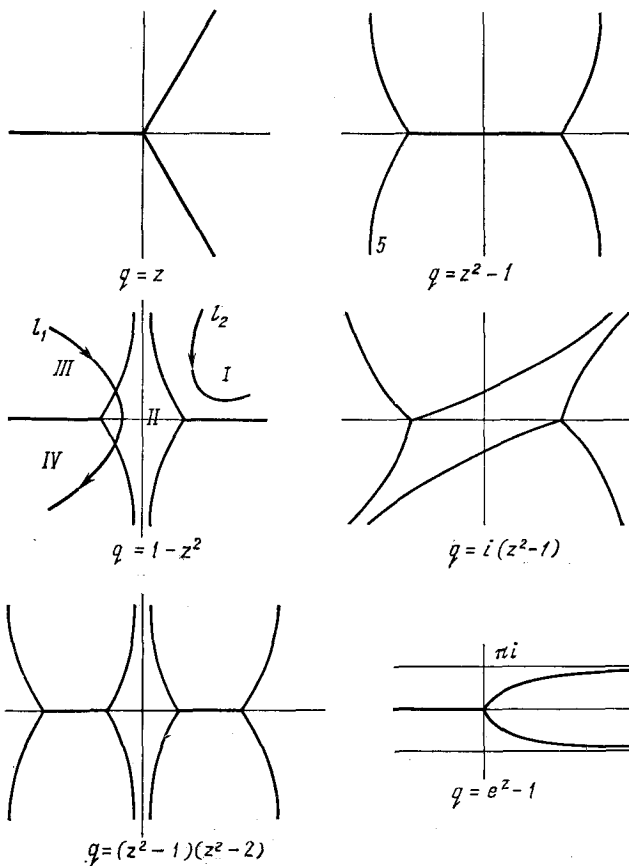


Рис. 3.

называется *точкой поворота порядка  $-1$* . Примеры ЛС см. на рис. 3.

## 2. Глобальная структура линий Стокса.

2.1.  $q(z)$  — целая функция. Имеет место следующая Теорема. Пусть  $D$  — ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , функция  $q(z)$  голоморфна в  $D \cup \Gamma$ , за исключением, быть может, конечного числа полюсов, ле-

жащих в  $D$ . Если  $\operatorname{Re} S(z_0, z) \equiv 0$  на  $\Gamma$ ,  $z_0 \in \Gamma$ , то функция  $q(z)$  имеет в области  $D$  не менее двух полюсов.

Пусть  $l$  — линия уровня  $\operatorname{Re} S(z_0, z) = 0$ ,  $z_0 \in l$ , т. е. максимальная связная компонента этого множества. Так как  $q(z)$  — целая функция, то кривая  $l$  не может содержать замкнутых компонент. Пусть  $l_0$  — максимальная связная компонента кривой  $l$ , не содержащая точек поворота. Тогда  $l_0$  — простая незамкнутая кривая, а ее концами могут быть только точка  $z = \infty$  или точки поворота. Функция  $\operatorname{Im} S(z_0, z)$  строго монотонна вдоль  $l_0$ , так что функция  $S(z_0, z)$  взаимно однозначно отображает кривую  $l_0$  на вертикальный интервал  $L: \operatorname{Re} S = 0$ ,  $a < \operatorname{Im} S < b$ , в комплексной плоскости  $S$ .

Введем условие:

1. Если  $l_0$  — не ЛС, то  $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$ .

Это условие выполнено, если  $q(z)$  — полином; если же  $q(z)$  — целая функция, то оно может не выполняться.

**Примеры.** 1. Пусть  $q(z) = e^{2z}$ ; тогда одна из ветвей функции  $S(0, z)$  равна  $e^z$ . Эта функция отображает линию уровня  $l_k: \operatorname{Im} z = k\pi + \pi/2$ ,  $k$  — целое, на луч  $(0, i(-1)^k \infty)$ . В этом примере  $q(z) \rightarrow 0$ , если  $z \in l_k$  и  $z \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty$ . Естественно назвать точку  $z = \infty$  точкой поворота (бесконечного порядка), а линии  $l_k$  — ЛС.

В последующем будем предполагать, что условие 1 выполнено.

2. Пусть  $q(z)$  — полином:

$$q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 = r_0 e^{i\varphi_0} \neq 0.$$

Тогда при  $|z| \gg 1$

$$S(z_0, z) = \frac{2\sqrt{a_0}}{n+2} z^{n/2+1} \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^{-j} \right), \quad b_1 = \frac{(n+2)a_1}{2na_0}.$$

Этот ряд сходится при  $|z| \gg 1$ . Линия уровня  $l: \operatorname{Re} S(z_0, z) = 0$ , не содержащая точек поворота, есть простая бесконечная кривая, имеющая две асимптоты. Они содержатся среди лучей

$$l_k: z = \rho e^{i\varphi_k} - \frac{a_1}{na_0}, \quad 0 < \rho < \infty,$$

$$\varphi_k = \frac{(2k+1)\pi - \varphi_0}{n+2}, \quad k = 0, 1, \dots, n+1.$$

Бесконечная ЛС имеет одну асимптоту — один из лучей  $l_k$ . Аналогично устроены линии уровня  $\operatorname{Im} S(z_0, z) = \operatorname{const}$ ; их асимптотами являются лучи

$$l'_k: z = \rho \exp \left\{ i \left( \varphi_k - \frac{\pi}{n+2} \right) \right\} - \frac{a_1}{na_0}, \quad 0 < \rho < \infty.$$

Эти результаты справедливы также для  $n$  нецелых,  $n > -2$ .

2.2.  $q(z)$  — мероморфная функция. Будем предполагать, что уравнение (1) имеет точки поворота. Если  $q(z)$  —

рациональная функция, то уравнение (1) не имеет точек поворота (в том числе и полюсов первого порядка) только в следующих случаях:

$$q = a, \quad q = a(z - z_0)^{-2}, \quad q = a(z - z_0)^{-2}(z - z_1)^{-2},$$

где  $a, z_j$  — постоянные. Во всех этих случаях уравнение (1) интегрируется в элементарных функциях.

Пусть  $O$  — множество всех особых точек уравнения (1) на римановой сфере. Оно состоит из конечных полюсов функции  $q(z)$  и точки  $z = \infty$ , если точка  $\zeta = 0$  — особая точка функции  $\tilde{q}(\zeta) = \zeta^{-4}q(\zeta^{-1})$  (гл. I, § 1).

Классификация конечных особых точек такова:

1. Иррегулярная особая точка — полюс порядка  $n \geq 3$  ( $I_n$ ).
2. Регулярная особая точка I рода — полюс первого порядка ( $R_1$ ).
3. Регулярная особая точка II рода — полюс второго порядка ( $R_2$ ).

Точка  $z = \infty$  принадлежит к типу 1, 2, 3, если  $\zeta = 0$  — полюс порядка  $n \geq 3$ ,  $n = 1$ ,  $n = 2$  функции  $\tilde{q}(\zeta)$ . Если  $\tilde{q}(0) \neq 0$ , то  $z = \infty$  — не критическая точка; если  $\tilde{q}(\zeta)$  имеет в точке  $\zeta = 0$  нуль порядка  $n$ , то  $z = \infty$  — точка поворота порядка  $n$ . Если  $\zeta = 0$  — существенно особая точка функции  $\tilde{q}(\zeta)$ , то  $z = \infty$  — существенно особая точка уравнения (1).

Как правило, особые точки уравнения (1) являются точками ветвления бесконечного порядка для всех его нетривиальных решений, и потому естественно рассматривать это уравнение на универсальной накрывающей  $\tilde{C}_z$  множества  $C_z \setminus O$ . Имеется естественная проекция  $p: \tilde{C}_z \rightarrow C_z \setminus O$ . В дальнейшем приняты обозначения:  $\tilde{M}$  — множество, лежащее в  $\tilde{C}_z$ ,  $M$  — его проекция.

Будем предполагать, что условие 1 п. 2.1 выполнено, но теперь — для линии  $\tilde{l}$ .

Для рациональных функций  $q(z)$  условие 1 выполняется. Если линия уровня  $l$  — не ЛС,  $z_0 \in l$ , то  $\tilde{l}$  — бесконечная незамкнутая кривая (кривая  $l$  может быть замкнутой — пример 2). Функция  $S(z_0, z)$  взаимно однозначно отображает  $\tilde{l}$  на мнимую ось  $\text{Re } S = 0$  в комплексной плоскости  $S$ .

**П р и м е р ы.** 1. Пусть  $z_0 \neq \infty$  — полюс функции  $q(z)$  порядка  $n \geq 3$ :

$$q(z) = (z - z_0)^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j, \quad a_0 = r_0 e^{i\varphi_0} \neq 0. \quad (4)$$

Тогда при  $|z - z_0| \ll 1$

$$S(z_1, z) = \sqrt{a_0} (z - z_0)^{-n/2+1} \sum_{j=0}^{\infty} b_j (z - z_0)^j,$$

$$b_0 = \frac{2}{2-n}, \quad b_1 = -\frac{a_1}{na_0}.$$

Этот ряд сходится при  $|z - z_0| \ll 1$ . Линия уровня  $l$ :  $\operatorname{Re} S(z_1, z) = 0$ , не содержащая точек поворота, есть простая кривая с началом и концом в точке  $z_0$  при  $|z_1 - z_0| \ll 1$  (рис. 4). Ее концы в точке  $z_0$  касаются двух из лучей.

$$l_k: (2 - n) \arg(z - z_0) + \varphi_0 = (2k + 1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Аналогично устроены линии уровня  $\operatorname{Im} S = \text{const}$ . Эти результаты справедливы также при  $n$  нецелом,  $n > 2$ .

2. Пусть  $z_0 \neq \infty$  — полюс второго порядка, т. е.  $q(z)$  имеет вид (4),  $n = 2$ . Локальная топологическая структура линий уровня  $\operatorname{Re} S = \text{const}$  — такая же, как и для функции  $q(z) = a_0 z^{-2}$ .

1)  $a_0 > 0$ : линии уровня — лучи с центром в точке  $z = 0$ .

2)  $a_0 < 0$ : линии уровня — окружности  $|z| = \text{const}$ .

3)  $\operatorname{Im} a_0 \neq 0$ : линии уровня — логарифмические спирали  $\alpha \ln r - \beta \varphi = \text{const}$ ,  $(\alpha + i\beta)^2 = a_0$ , которые закручиваются в точку  $z = 0$ .

Структура линий уровня в окрестности полюса первого порядка исследована в п. 1.

Линии уровня  $\operatorname{Re} S = \text{const}$  могут быть устроены крайне сложно даже в том случае, когда  $q(z)$  — рациональная функция. Именно, множество  $[\Phi]$  может иметь внутренние точки ( $\Phi$  — объединение всех ЛС).

3. Пусть

$$q_\alpha(z) = e^{2i\alpha} (z - a_1)^{-1} (z - a_2)^{-1} (z - a_3)^{-1} (z - a_4)^{-1},$$

где  $\alpha, a_j$  вещественны,  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ ,  $0 < \alpha < \pi$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  — иррациональное число. Заметим, что точка  $z = \infty$  — неособая и не точка поворота. Если  $l$  — произвольная линия уровня  $\operatorname{Re} S(z_0, z) = \text{const}$ , то ее замыкание  $[l]$  совпадает со всей комплексной плоскостью  $z$ . Действительно, при  $\alpha = 0$  функция  $S(a_1, z)$  взаимно однозначно отображает верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} z \geq 0$  на прямоугольник  $\Pi$  в комплексной плоскости  $S$  со сторонами, параллельными осям координат. При  $\alpha \neq 0$  верхняя полуплоскость отображается на прямоугольник  $\Pi_\alpha$ , полученный из  $\Pi$  поворотом на угол  $\alpha$  вокруг начала координат. Аналитически продолжим функцию  $S$  через интервалы, на которые точки  $a_j$  разбивают вещественную ось. Тогда получим, что функция  $S$  взаимно однозначно отображает  $C_z$  на всю комплексную плоскость  $S$ , покрытую равными прямоугольниками  $\Pi_\alpha, \Pi_\alpha^1, \dots$ . Линия уровня  $l$  отобразится на вертикальную прямую  $L$ :  $\operatorname{Re} S = \text{const}$ . Если совместить с  $\Pi_\alpha$  все прямоугольники, которые пересекаются с  $L$ , то ее отрезки всюду плотно заполнят  $\Pi_\alpha$ , так как  $\operatorname{tg} \alpha$  — иррациональное число. Следовательно,  $[l] = C_z$ .

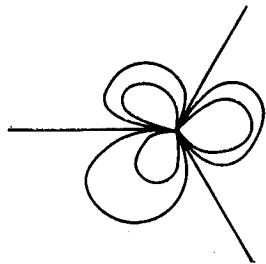


Рис. 4.

В этом примере  $[\Phi] = C_z$  и множество внутренних точек  $[\tilde{\Phi}]$  множества  $[\Phi]$  состоит из одной связной компоненты. Структура множества  $[\tilde{\Phi}]$  исследована в [7].

А.  $[\tilde{\Phi}]$  может состоять из любого конечного числа связных компонент. При этом  $\partial[\tilde{\Phi}]$  содержит только точки поворота и особые точки типа  $R_1$ .

Б. Если уравнение (1) имеет не более трех различных особых точек или не имеет точек типа  $R_1$ , то  $[\tilde{\Phi}]$  пусто, так что  $[\Phi] = \Phi$ .

**3. Области, ограниченные линиями Стокса.** Если  $q(z)$  — целая или мероморфная функция, то функция  $S(z_0, z)$  является, как правило, бесконечнозначной и отображает комплексную плоскость  $C_z$  на бесконечнолистную поверхность. В частности, если  $q(z)$  — полином степени  $n$ , то  $S(z_0, z)$  есть эллиптический интеграл при  $n = 3, 4$  и гиперэллиптический интеграл при  $n \geq 5$ . Пусть  $D$  — односвязная область, функция  $q(z)$  голоморфна и не имеет нулей в области  $D$ . Тогда функция  $\sqrt{q(z)}$  распадается в  $D$  на две голоморфные ветви; это верно и для функции  $S(z_0, z)$ , если  $z_0 \in D$  и интеграл берется по пути, лежащему в  $D$ . В дальнейшем речь всегда будет идти об одной из таких ветвей функции  $D$ .

3.1.  $q(z)$  — целая функция. Пусть выполнено условие:

2.  $[\Phi] = \Phi$ .

Примеры целых функций, для которых условие 2 не выполнено, неизвестны. Если  $q(z)$  — полином, то условие 2 выполнено.

Линии Стокса разбивают комплексную плоскость на области следующих двух типов:

I. Область  $D$  типа *полуплоскости*. Функция  $S(z_0, z)$  взаимно однозначно отображает  $D$  на полуплоскость вида  $\operatorname{Re} S > a$  или  $\operatorname{Re} S < a$ .

II. Область  $D$  типа *полосы*. Функция  $S(z_0, z)$  взаимно однозначно отображает  $D$  на полосу вида  $a < \operatorname{Re} S < b$ .

Области обоих типов односвязны. Граница области типа полуплоскости (полосы) состоит из одной (двух) связной компоненты. Примеры см. на рис. 3.

**П р и м е р.** Пусть  $q(z)$  — полином степени  $n$ . Тогда ЛС разбивают плоскость  $z$  на  $n + 2$  области типа полуплоскости и  $N$  областей типа полосы,  $0 \leq N \leq n - 1$ . Если нет конечных ЛС, то  $N = n - 1$ . Линия уровня  $\operatorname{Re} S = \operatorname{const}$ , лежащая в области типа полуплоскости, имеет асимптотами два соседних луча  $l_k, l_{k+1}$ .

3.2.  $q(z)$  — мероморфная функция. В этом случае область  $C_z \setminus [\Phi]$  состоит из областей типа полуплоскости, полосы, кольца и круга.

III. Область  $D$  типа *кольца*. Функция  $w = e^S$  взаимно однозначно отображает  $D$  на кольцо  $0 < a < |w| < b < \infty$ . Гра-



ница такой области состоит из двух связанных компонент (рис. 5).

IV. Область  $D$  типа круга. Функция  $w = e^S$  взаимно однозначно отображает  $D$  на область вида  $0 < |w| < a$  или  $a < |w| < \infty$ . Граница такой области состоит из связанной кривой и из

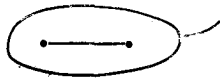


Рис. 5.

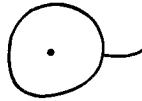


Рис. 6.

точки  $z_0$ , которая является полюсом второго порядка (рис. 6). Если  $z_0 \neq \infty$ , то

$$a = (z - z_0)^2 q(z) |_{z=z_0} > 0.$$

Семейство линий уровня  $\{l_c\}$  имеет критические точки следующих типов:

1)  $z_0$  — точка поворота порядка  $k$ ,  $k = -1, 1, 2, \dots$ . Если  $z_0 \neq \infty$ ,  $k = -1$ , то  $z_0$  — полюс первого порядка, т. е. регулярная особая точка уравнения (1).

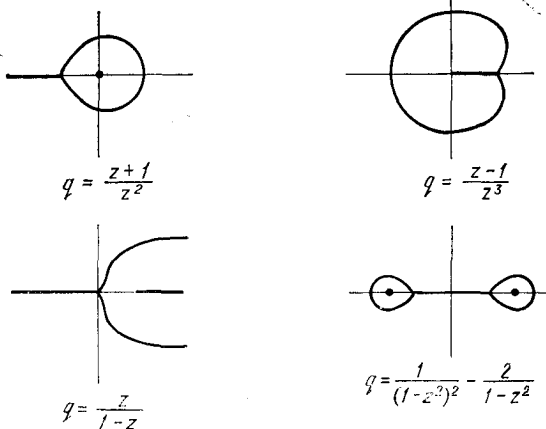


Рис. 7.

2)  $z_0$  — полюс второго порядка, конечный или бесконечный (регулярная особая точка уравнения (1)). Пусть  $z_0 \neq \infty$ . Тогда возможны два варианта:

а)  $a > 0$ : малая проколота окрестность  $U$  точки покрывается одной областью типа круга;

б)  $a \notin (0, +\infty)$ :  $U$  покрывается замыканием конечного числа областей типа полосы.

3)  $z_0$  — иррегулярная особая точка порядка  $k \geq 3$ . Если  $z_0 \neq \infty$ , то  $z_0$  — полюс функции  $q(z)$  порядка  $k$ . В этом случае  $U$  покрывается замыканием  $k$  областей типа полуплоскости и конечного числа областей типа полосы.

Примеры линий Стокса см. на рис. 7.

## § 2. ВКБ-оценки в комплексной плоскости

**1. Канонические пути.** Пусть  $D$  — односвязная область на римановой сфере, функция  $Q(z)$  голоморфна и не имеет нулей в  $D$ . Рассмотрим уравнение

$$w'' - Q(z)w = 0 \quad (1)$$

и фиксируем ветвь функции  $S(z_0, z) = \int_{z_0}^z \sqrt{Q(t)} dt$  в области  $D$ .

В гл. II, § 2, были получены ВКБ-оценки для решений уравнения (1) на вещественной оси. Уравнение (1) было сведено к системе интегральных уравнений, и при выводе ВКБ-оценок основную роль играл тот факт, что на пути интегрирования  $(x, b)$ ,  $x < b$ , выполнялось неравенство  $\operatorname{Re} S(t, x) \leq 0$ ,  $t \in (x, b)$ , так что  $|\exp\{S(t, x)\}| \leq 1$ . Иначе этот факт можно сформулировать так: функция  $\operatorname{Re} S(x_0, x)$  не убывает вдоль пути интегрирования. Обобщением этого свойства на пути в комплексной плоскости служит понятие канонического пути.

Пусть  $\gamma = \gamma(z_0, z^*)$  — кусочно-гладкая кривая, лежащая в области  $D$  и соединяющая точки  $z_0 \in D$ ,  $z^* \in \partial D$ . Кривая  $\gamma$  называется *каноническим путем*, если функция  $\operatorname{Re} S(z_0, z)$  не убывает вдоль  $\gamma$  (при движении  $z$  от  $z_0$  к  $z^*$ ). В частности, каноническими путями являются дуги линий уровня  $\operatorname{Re} S = \operatorname{const}$ ,  $\operatorname{Im} S = \operatorname{const}$ , не содержащие точек поворота. В качестве  $z^*$ , как правило, будем выбирать одну из особых точек уравнения (1).

Обозначим через  $S(D)$  и  $S(\gamma)$  образы области  $D$  и пути  $\gamma$  при отображении  $S = S(z_0, z)$ . Если  $\gamma$  — канонический путь, то кривая  $S(\gamma)$  обладает следующим свойством: ее пересечение с любой вертикальной кривой  $\operatorname{Re} S = \operatorname{const}$  либо пусто, либо состоит из одной связной компоненты.

**Примеры.** 1. Пусть  $D$  — область типа полуплоскости,  $z_0 \in \partial D$  и ветвь  $\sqrt{Q(z)}$  такова, что  $\operatorname{Re} S(z_0, z) > 0$  в  $D$ . Прообраз любого луча  $S(\gamma)$ , лежащего в  $S(D)$ , — канонический путь  $\gamma$ . Если  $z_1 \in D$ , то любые два канонических пути  $\gamma_0(z_1, z^*)$ ,  $\gamma_1(z_1, z^*)$ , лежащие в  $D$ , можно непрерывно продеформировать (на римановой сфере) друг в друга так, что любой «промежуточный» путь  $\gamma_t(z_1, z^*)$ ,  $0 < t < 1$ , — канонический. Такие пути называются *эквивалентными* (или *S-гомотопными*).

Пусть  $z_1, z_2 \in D$ ,  $\gamma(z_1, z^*)$  — канонический путь и  $\operatorname{Re} S(z_0, z_2) \geq \operatorname{Re} S(z_0, z_1)$  для определенности. Тогда можно соединить

точки  $z_1, z_2$  каноническим путем  $\gamma_1(z_1, z_2)$ , так что путь  $\gamma\gamma_1$  — канонический (рис. 8). Будем говорить, что все канонические пути, лежащие в  $D$ , эквивалентны ( $S$ -гомотопны).

Пусть  $\partial D$  содержит конечное число точек поворота, для простоты. Удалим их  $\varepsilon$ -окрестности из  $S(D)$  и обозначим прообраз полученной области  $D_\varepsilon$ . Тогда все лежащие в  $D_\varepsilon$  канонические пути эквивалентны.

2. Пусть  $D$  — область типа полосы (§ 1). Тогда все бесконечные канонические пути, лежащие в  $D$ , распадаются на два класса  $\gamma^\pm$   $S$ -гомотопных путей:  $\text{Im } S \rightarrow \pm\infty$  вдоль пути класса  $\gamma^\pm$  (рис. 9).

**З а м е ч а н и е.** Рассмотрим область типа полосы (см. рис. 9). На римановой сфере эта область имеет одну бесконечно удаленную граничную точку  $z = \infty$  — особую точку уравнения (1). Однако

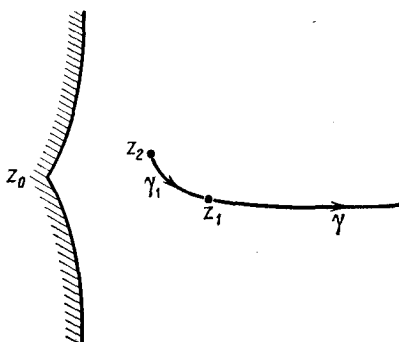


Рис. 8.

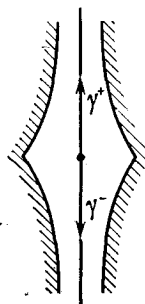


Рис. 9.

с точки зрения асимптотической теории следует считать, что  $\partial D$  содержит две бесконечно удаленные точки  $z^\pm: \text{Im } S \rightarrow \pm\infty$  при  $z \rightarrow z^\pm$ . Точнее, бесконечно удаленная граничная точка определяется классом эквивалентных канонических путей.

**2. Основная теорема.** Пусть существует канонический путь, соединяющий точки  $z \in D, z^* \in \partial D$ , для уравнения (1). Обозначим

$$\rho(z, D) = \inf_{\gamma(z, z^*)} \int_{\gamma(z, z^*)} |\alpha_1(t)| |dt|, \quad (2)$$

где нижняя грань берется по всем каноническим путям, соединяющим точки  $z, z^*$ , функция  $\alpha_1(t)$  дается формулой (9) гл. II, § 1. Пусть выполнены условия:

- 1) для каждой точки  $z \in D$  существует канонический путь  $\gamma(z, z^*)$ ;
- 2)  $\rho(z, D) < \infty$  для любой точки  $z \in D$  (для фиксированного класса  $S$ -гомотопных путей).

Тогда справедлива

**Т е о р е м а** Уравнение (1) имеет решение  $w(z)$  такое, что при  $z \in D$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \left| \frac{w(z)}{Q^{-1/4}(z) \exp\{-S(z_0, z)\}} - 1 \right| \leq 2(e^{2\rho(z, D)} - 1), \\ & \left| \frac{w'(z)}{Q^{1/4}(z) \exp\{-S(z_0, z)\}} + 1 \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{4} \left| \frac{Q'(z)}{Q^{3/2}(z)} \right| + 4 \left[ 1 + \frac{1}{4} \left| \frac{Q'(z)}{Q^{3/2}(z)} \right| \right] [e^{2\rho(z, D)} - 1], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $z_0 \in D$  — любая фиксированная точка.

Эта теорема принадлежит Г. Биркгофу [68]. Ее доказательство дословно совпадает с доказательством теоремы § 2 гл. I. В качестве контура интегрирования выбирается канонический путь  $\gamma(z, z^*)$ , на котором  $\operatorname{Re} S(t, z) \leq 0$ , так что

$$|\exp\{2S(t, z)\}| \leq 1.$$

Как и в вещественном случае, из оценок (3) вытекают асимптотические формулы для  $w$  и  $w'$ . Пусть  $\gamma$  — канонический путь,  $z \in \gamma$ ; тогда его дуга  $\gamma(z, z^*)$  — канонический путь. Из условия 2) следует, что

$$\lim_{z \rightarrow z^*} \int_{\gamma(z, z^*)} |\alpha_1(t)| |dt| = 0. \quad (4)$$

Следовательно, при  $z \in \gamma, z \rightarrow z^*$  справедлива асимптотическая формула

$$w(z) \sim Q^{-1/4}(z) \exp\{-S(z_0, z)\}. \quad (5)$$

Это соотношение выполняется, если  $z \rightarrow z^*$  вдоль произвольного канонического пути. В дальнейшем « $z \rightarrow z^*$ » означает, что « $z \rightarrow z^*$ » вдоль некоторого канонического пути».

Пусть выполнено условие

$$\lim_{z \rightarrow z^*} Q'(z) Q^{-3/2}(z) = 0; \quad (6)$$

тогда из оценок (3) следует, что

$$w'(z) \sim -Q^{1/4}(z) \exp\{-S(z_0, z)\}, \quad z \rightarrow z^*. \quad (7)$$

Для областей из приведенных выше примеров 1, 2 условие 1) выполнено; обсудим вопрос о сходимости интеграла

$$\rho(z) = \int_z^{z^*} |\alpha_1(t)| |dt|, \quad z \neq z^*.$$

Пусть  $z^* \neq \infty$ ; положим  $z^* = 0$  для простоты.

**Примеры.** 1. Пусть  $z = 0$  — полюс порядка  $n \geq 3$  функции  $Q(z)$ ; тогда  $\rho(z) < \infty$ , если интеграл берется по отрезку  $[0, z]$ . Это верно в случае, если  $Q(z) \sim az^\alpha$ ,  $a \neq 0$ ,  $\alpha < -2$ , при  $z \rightarrow 0$  в секторе  $D$  с вершиной в точке  $z = 0$  и эту асимптотику можно дважды дифференцировать. Интеграл  $\rho(z) = \infty$  при  $\alpha \geq -2$ . В частности,  $\rho(z) = \infty$ , если  $z = 0$  — регулярная особая точка уравнения (1).

2. Пусть  $Q(z)$  — полином,  $z^* = \infty$ , интеграл  $\rho(z)$  берется по лучу; тогда  $\rho(z) < \infty$ . Это верно в случае, когда  $Q(z) \sim az^\alpha$  при  $z \rightarrow \infty$  в секторе  $D$ , если  $a \neq 0$ ,  $\alpha > -2$ . Если  $\alpha \leq -2$ , то  $\rho(z) = \infty$ .

Если выполнены условия теоремы и условия (6), то уравнение (1) имеет решение  $\tilde{w}(z)$  такое, что при  $z \rightarrow z^*$

$$\tilde{w}(z) \sim Q^{-1/4}(z) \exp\{S(z_0, z)\}, \quad \tilde{w}'(z) \sim Q^{1/4}(z) \exp\{S(z_0, z)\}.$$

Решения  $w(z)$ ,  $\tilde{w}(z)$  образуют ФСР.

**3. Краевые условия для решений.** В сингулярных задачах на собственные значения, в задачах о рассеянии и в других задачах краевые условия для искомого решения задаются на бесконечности или в особой точке уравнения. Сформулируем их аналоги в комплексной плоскости, в предположении, что выполнены условия теоремы и условия (6). Пусть  $\gamma = \gamma(z_0, z^*)$  — канонический путь; тогда возможны два варианта:

$$\lim_{z \rightarrow z^*, z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z_0, z) = +\infty, \quad (8a)$$

$$\lim_{z \rightarrow z^*, z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z_0, z) = a, \quad 0 \leq a < \infty, \quad (8b)$$

что приводит к двум типам краевых условий.

**I. Условие убывания решения.** Пусть  $w(z)$  — решение, построенное в теореме п. 2; тогда в случае (8a)

$$\lim_{z \rightarrow z^*, z \in \gamma} w(z) = 0. \quad (9)$$

Так как  $\lim_{z \rightarrow z^*, z \in \gamma} \tilde{w}(z) = \infty$ , то любое решение, удовлетворяющее условию (9), имеет вид  $\operatorname{const} \cdot w(z)$ .

**II. Условие излучения.** В случае (8b) решение  $w(z)$ , построенное в теореме п. 2, удовлетворяет условию

$$\lim_{z \rightarrow z^*, z \in \gamma} \frac{w'(z)}{\sqrt{Q(z)} w(z)} = -1. \quad (10)$$

Это условие выделяет единственное решение.

В обоих случаях решение, для которого справедлива асимптотическая формула (5), единственно, т. е. решение однозначно определяется своей асимптотикой.

Все приведенные выше результаты переносятся на уравнения вида

$$(P(z)w')' - Q(z)w = 0$$

(см. гл. II, § 2).

### § 3. Уравнения с полиномиальными коэффициентами. Асимптотика решений в большом

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим уравнение

$$w'' + p(z, \lambda)w' + q(z, \lambda)w = 0, \quad (1)$$

где  $p, q$  — полиномы от  $z$  с коэффициентами, зависящими от большого параметра  $\lambda > 0$ . Основная задача асимптотической теории применительно к уравнению (1) ставится так: найти асимптотику ФСР при  $\lambda \rightarrow +\infty$  во всей комплексной плоскости  $z$ .

Эта задача исследована полностью лишь в тех случаях, когда зависимость коэффициентов уравнения от параметра носит простейший характер. Опишем алгоритм решения основной задачи для уравнения

$$w'' - \lambda^2 q(z)w = 0. \quad (2)$$

Вводится конечный набор неограниченных областей  $\{D_j\}$  (они называются *каноническими*), объединение которых покрывает всю комплексную плоскость  $z$ , за исключением окрестностей точек поворота. Строятся специальные ФСР (они называются *элементарными*)  $(u_j, v_j)$ , асимптотика которых известна всюду в области  $D_j$ . Любое решение  $w(z, \lambda)$  уравнения (2) можно представить в виде

$$w(z, \lambda) = \alpha_j u_j + \beta_j v_j = \alpha_k u_k + \beta_k v_k,$$

где  $\alpha_l, \beta_l$  зависят только от  $\lambda$ . Имеем

$$\begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} = \Omega_{jk}(\lambda) \begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Матрица  $\Omega_{jk}(\lambda)$  называется *матрицей перехода* от ФСР  $(u_j, v_j)$  к ФСР  $(u_k, v_k)$  и не зависит от  $w$ . Очевидно, что

$$\Omega_{jl} = \Omega_{kl} \Omega_{jk}, \quad \Omega_{jk} = \Omega_{kj}^{-1}.$$

Доказывается, что всякая матрица перехода от одной элементарной ФСР к другой есть произведение конечного числа простейших матриц перехода, принадлежащих к одному из четырех типов. Асимптотика простейших матриц перехода вычисляется — см. п. 3.

Таким образом, решение основной задачи разбивается на три.

1. **Топологическая задача.** Найти ЛС уравнения (1).

2. **Аналитическая задача.** Найти асимптотику элементарных ФСР.

3. Алгебраическая задача. Перемножить матрицы перехода.

Задача 1, по существу, «машинная» — для конкретного уравнения найти точки поворота и построить ЛС можно с помощью ЭВМ. Решение задачи 2 было приведено ранее. Асимптотика ФСР вблизи точек поворота рассмотрена в гл. IV.

Приведенный выше алгоритм носит общий характер — он пригоден и в случае, когда  $q(z)$  является целой или мероморфной функцией, и в случае, когда зависимость коэффициентов уравнения от параметра носит более сложный характер.

## 2. Элементарные фундаментальные системы решений уравнения (1).

2.1. Канонические области. Точки поворота уравнения (1) не зависят от  $\lambda$ . Введем обозначение

$$S(z_0, z) = \int_{z_0}^z \sqrt{q(t)} dt. \quad (4)$$

Пусть  $\lambda > 0$ ; тогда ЛС определяются уравнением

$$\operatorname{Re} S(z_0, z) = 0,$$

где  $z_0$  — точка поворота, и не зависят от  $\lambda$  (ср. (3) § 2).

Область  $D$  комплексной плоскости  $z$  называется *канонической*, если функция  $S(z_0, z)$  взаимно однозначно отображает  $D$  на всю комплексную плоскость с конечным числом вертикальных разрезов (см. рис. 10). Область  $D$  односвязна и не содержит точек поворота,  $\partial D$  состоит из ЛС (образы берегов разрезов). Каноническая область  $D$  есть объединение двух областей типа полуплоскости («левой» и «правой») и нескольких областей типа полосы.

Удалим из  $S(D)$  левые (правые)  $\varepsilon$ -окрестности разрезов и  $\varepsilon$ -окрестности точек поворота (рис. 10); прообраз полученной области обозначим  $D_\varepsilon^+$  ( $D_\varepsilon^-$ ). Для каждой точки  $z^* \in D_\varepsilon^+$  существует бесконечный канонический путь  $\gamma^+(z^*)$  такой, что  $\operatorname{Re} S(z_0, z) \rightarrow +\infty$  при  $z \in \gamma^+$ ,  $z \rightarrow \infty$ . Для каждой точки  $z^* \in D_\varepsilon^-$  существует бесконечный путь  $\gamma^-(z^*)$  такой, что путь  $-\gamma^-(z^*)$  — канонический, и  $\operatorname{Re} S(z_0, z) \rightarrow -\infty$  при  $z \in \gamma^-$ ,  $z \rightarrow \infty$ .

2.2. Главный член асимптотики решения. Пусть  $D$  — каноническая область,  $\lambda > 0$  фиксировано. Напомним, что любое решение уравнения (2) является целой функцией  $z$ . Уравнение (2) имеет единственное, с точностью до множителя, решение  $w_1(z, \lambda)$  такое, что

$$\lim w_1(z, \lambda) = 0, \quad z \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} S(z_0, z) \rightarrow +\infty, \quad (5)$$

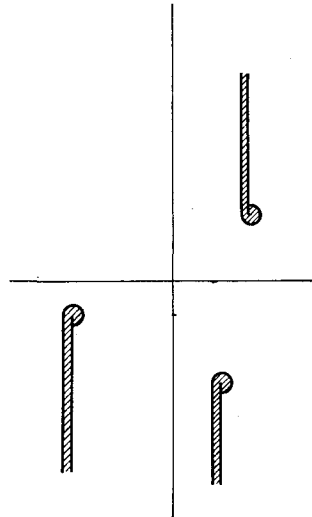


Рис. 10.

и единственное, с точностью до множителя, решение  $w_2(z, \lambda)$  такое, что

$$\lim w_2(z, \lambda) = 0, \quad z \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} S(z_0, z) \rightarrow -\infty. \quad (5')$$

При  $\lambda \gg 1$  эти решения образуют ФСР. В качестве  $w_1$  возьмем указанное в теореме из § 2 решение  $w$ .

Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{1,2}(z, \lambda; z_0) &= q^{-1/4}(z) \exp\{\mp \lambda S(z_0, z)\}, \\ \rho^\pm(z) &= \int_{\gamma^\pm(z)} |\alpha_1(t)| |dt|, \end{aligned} \quad (6)$$

ветвь  $\sqrt[4]{q(z)}$  в  $D$  фиксирована. В силу (3) § 2 имеем

$$\left| \frac{w_1(z, \lambda)}{\tilde{w}_1(z, \lambda; z_0)} - 1 \right| \leq 2(e^{\lambda \rho^+(z)} - 1)$$

при  $z \in D_\varepsilon^+$ ,  $\lambda > 0$ . Фиксируем  $\lambda_0 > 0$ ; тогда при  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $z \in D_\varepsilon^+$  имеем

$$\begin{aligned} w_1(z, \lambda) &= \tilde{w}_1(z, \lambda; z_0) [1 + \lambda^{-1} \varphi_1(z, \lambda)], \\ |\varphi_1(z, \lambda)| &\leq C \rho^+(z), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $C$  не зависит от  $\lambda$ . Следовательно,

$$w_1(z, \lambda) \sim \tilde{w}_1(z, \lambda; z_0),$$

причем эта асимптотика — двойная. Именно, она справедлива, если

- а)  $\lambda \rightarrow +\infty$  равномерно по  $z \in D_\varepsilon^+$ ;  
 б)  $z \rightarrow \infty$  так, что  $\operatorname{Re} S(z_0, z) \rightarrow +\infty$  равномерно по  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ .

Аналогично, существует решение  $w_2$  такое, что

$$\begin{aligned} w_2(z, \lambda) &= \tilde{w}_2(z, \lambda; z_0) [1 + \lambda^{-1} \varphi_2(z, \lambda)], \\ |\varphi_2(z, \lambda)| &\leq \varepsilon_2(z). \end{aligned} \quad (8)$$

Асимптотика  $w_2 \sim \tilde{w}_2$  — двойная; она справедлива, если

- а)  $\lambda \rightarrow +\infty$  равномерно по  $z \in D_\varepsilon^-$ ;  
 б)  $z \rightarrow \infty$  так, что  $\operatorname{Re} S(z_0, z) \rightarrow -\infty$  равномерно по  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ .

Аналогичные двойные асимптотики справедливы для всех производных по  $z$  и по  $\lambda$ .

Если  $\lambda \geq \lambda_0 \gg 1$ , то  $(w_1, w_2)$  есть ФСР. При этом каждое из решений  $w_1, w_2$  стремится к нулю на «своей бесконечности» (см. (5'), (5')) и растет на «противоположной».

Отметим важный частный случай. Пусть  $D$  — каноническая область и все разрезы в  $[S(D)]$  направлены в одну сторону, для определенности вниз. Тогда

$$\lim_{z \rightarrow \infty, z \in D} \varphi_j(z, \lambda) = 0, \quad j = 1, 2,$$



если  $\operatorname{Im} S(z_0, z) \rightarrow +\infty$  или  $|\operatorname{Re} S(z_0, z)| \rightarrow \infty$ , равномерно по  $\lambda \geq \lambda_0$ , где  $\lambda_0 > 0$  произвольно, но фиксировано.

2.3. Максимальные области применимости ВКБ-асимптотики. Пусть  $D_0$  — область типа полуплоскости,  $z_0 \in \partial D_0$  — точка поворота, ветвь функции  $S(z_0, z)$  в  $D_0$  выбрана так, что  $\operatorname{Re} S > 0$  при  $z \in D$ . Уравнение (1) имеет решение  $w_1$  такое, что

$$w_1(z, \lambda) = \tilde{w}_1(z, \lambda; z_0) [1 + O(\lambda^{-1})] \quad (9)$$

при  $\alpha \rightarrow \infty$  равномерно по  $z \in D_{0\epsilon}$ . Область  $D_{0\epsilon}$  получена удалением из  $D_0$  окрестностей граничных точек поворота. Кроме того,  $w_1 \rightarrow 0$  при  $z \in D_0$ ,  $z \rightarrow \infty$  при каждом фиксированном  $\lambda > 0$ . Поставим задачу: найти максимальную область  $D$  комплексной плоскости  $z$ , в которой справедливо AP (9).

Примеры 1. Пусть  $q(z) = z$ ,  $D_0$  — область  $|\arg z| < \pi/2$ . Из точки поворота  $z = 0$  выходят три ЛС  $l_1, l_2, l_3$  — лучи  $\arg z = \pm \pi/3, \arg z = \pi$ . Пусть  $D$  — комплексная плоскость  $z$  с разрезом по лучу  $l_3$ ; тогда функция  $S(0, z) = (2/3)z^{3/2}, \sqrt{x} > 0$  при  $x > 0$ , взаимно однозначно отображает  $D$  на область, состоящую из трех полуплоскостей. Поэтому для каждой точки  $z \in D$  существует канонический путь  $\gamma^+(z)$ , который оканчивается в области  $D_0$ , и  $\operatorname{Re} S \rightarrow +\infty$  вдоль  $\gamma^+(z)$ . Пусть область  $D_\epsilon$  получена из  $D$  удалением  $\epsilon$ -окрестности разреза  $l_3$ . Тогда AP (9) справедливо в  $D_\epsilon$  в силу теоремы из § 2. При этом  $\epsilon > 0$  может быть выбрано сколь угодно малым, но не зависящим от  $\lambda$ .

Асимптотика (9) неприменима ни в какой большей области. Действительно, допустим, что можно «стереть» часть разреза  $l_3$ , т. е. добавить к  $D_\epsilon$   $\epsilon$ -окрестность отрезка вида  $[x_1, x_2], x_j < 0$ . Функция  $\tilde{w}_1$  имеет точку ветвления  $z = 0$  и потому неоднозначна в полученной области  $\tilde{D}_\epsilon$ , в то время как решение  $w_1$  — однозначная функция. Заметим также, что  $\tilde{D}_\epsilon$  не удовлетворяет условиям теоремы из § 2, так как для любой точки  $z$ , лежащей на одном из берегов разреза  $l_3$ , не существует канонического пути  $\gamma^+(z)$ .

2. Пусть  $q(z) = z^n, n \geq 2$  — целое; тогда  $z = 0$  — кратная точка поворота. Пусть  $D_0$  — область  $|\arg z| < \pi/(n+2)$ . Тогда канонический путь  $\gamma^+(z)$  существует для любой точки  $z$ , лежащей в области  $D$ :  $|\arg z| < 3\pi/(n+2)$ , и не существует для точек, лежащих на  $\partial D$ . AP (9) пригодно в области  $D_\epsilon$ , полученной из  $D$  удалением  $\epsilon$ -окрестности  $\partial D$ . Решение  $w_1$  выражается через функции Бесселя, из известных асимптотик которых следует максимальность области  $D_\epsilon$ .

3. Пусть  $q(z) = z^2 - 1$ ,  $D$  — область  $I \cup II \cup III$  (см. рис. 3). Для любой точки  $z \in D$  ( $z \in \partial D$ ) существует (не существует) канонический путь  $\gamma^+(z)$  и AP (9) пригодно в  $D_\epsilon$ . Из известных асимптотик функций Вебера следует максимальность области  $D_\epsilon$ .

Пусть  $q(z) \not\equiv \text{const}$  — такой полином, что

- 1) все его нули простые;
- 2) уравнение (2) не имеет конечных ЛС.

Построим максимальную область применимости АР (9). В силу 2)  $\partial D_0$  состоит из двух ЛС  $l_1, l_2$  и из точки поворота  $z_0 \in \partial D_0$  выходит еще одна ЛС  $l_3$ . Сделаем разрез вдоль  $l_3$  и удалим из комплексной плоскости его окрестность. Если  $q(z)$  — линейная функция, то полученная область  $D_\varepsilon$  — максимальная (пример 1). В противном случае  $D_0$  граничит с областью  $D_1$  типа полосы (рис. 11) и  $\partial D_1$  содержит связную компоненту, состоящую из ЛС

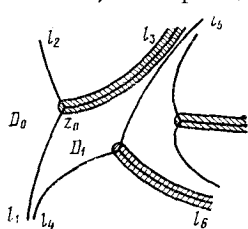


Рис. 11.

$l_4, l_5$  и точки поворота  $z_1$ . Из точки  $z_1$  выходит еще одна ЛС  $l_6$ ; удалим из комплексной плоскости ее  $\varepsilon$ -окрестность. Если степень  $q(z)$  равна двум, то полученная область  $D_\varepsilon$  — максимальная, в противном случае продолжим этот процесс. На каждом шаге разрез делается вдоль той ЛС, которая не принадлежит последней присоединяемой области (типа полуплоскости или полосы).

Пусть выполнены условия 1), 2). Тогда максимальная область  $D_\varepsilon$  применимости асимптотики (9) есть вся комплексная плоскость, из которой удалены окрестности некоторых ЛС.

При этом  $\varepsilon > 0$  может быть выбрано сколь угодно малым, но не зависящим от  $\lambda$ . Удобнее выражаться так:  $D$  — плоскость с разрезами вдоль ЛС. Разрез делается вдоль одной из трех ЛС, выходящих из точки поворота (см. рис. 11). Алгоритм построения области  $D$  указан выше. В этом случае замыкание  $[D]$  совпадает со всей комплексной плоскостью  $z$ . Если же одно из условий 1), 2) не выполняется, то  $C_z \setminus [D]$  — область (примеры 2, 3).

Укажем свойства решения  $w_1(z, \lambda)$  при  $\lambda \gg 1$  фиксированном.

1. Поведение решения  $w_1$  при  $z \rightarrow +\infty$ . По построению  $\text{Re } S(z_0, z) < 0$  при  $z \notin D_0 \cup \partial D_0$ . Пусть  $D_1 \neq D_0$  — область типа полуплоскости и  $S$  — сектор, лежащий в  $D_1$ . Тогда  $\text{Re } S(z_0, z) \rightarrow -\infty$  при  $z \in S, z \rightarrow \infty$ , так что

$$w_1(z, \lambda) \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in S.$$

Таким образом, при  $z \rightarrow \infty$  решение  $w_1$  экспоненциально убывает в области  $D_0$  и экспоненциально растет во всех остальных областях типа полуплоскости.

2. Нули решения  $w_1$ . Из формулы (9) следует, что  $w_1$  не имеет нулей в максимальной области  $D$  применимости асимптотики. Это решение имеет бесконечно много нулей вблизи каждой из ЛС, вдоль которых сделаны разрезы.

2.4. Решение  $w_1$  с точки зрения теории целых функций. Пусть

$$q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad \text{Re } a_0 > 0, \quad n \geq 1.$$

Тогда решение  $w_1$  есть целая функция вполне регулярного роста, порядка роста  $n/2 + 1$  и типа  $2\lambda |a_0| / (n + 2)$ .

Решение  $w_1$  зависит от параметров  $\lambda, a_0, a_1, \dots, a_n$ . При фиксированном  $\lambda > 0$  решение  $w_1$  есть голоморфная функция  $a_0$  в области  $\operatorname{Re} a_0 > 0$  и целая функция переменных  $z, a_1, \dots, a_n$ .

2.5. Асимптотические разложения решений и й. Пусть  $D$  — каноническая область,  $w_1, w_2$  — решения вида (7), (8). Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty, z \in (D_\varepsilon^+ \cap D_\varepsilon^-)$  имеют место асимптотические разложения

$w_1(z, \lambda) \sim$

$$\sim q^{-1/4}(z) \exp\{-\lambda S(z_0, z)\} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda)^{-k} \int_{\gamma^+(z)} \alpha_k(t) dt\right\}, \quad (10)$$

$$w_2(z, \lambda) \sim q^{-1/4}(z) \exp\{\lambda S(z_0, z)\} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \int_{\gamma^-(z)} \alpha_k(t) dt\right\}.$$

Функции  $\alpha_k(z)$  см. в гл. II, § 3. Первое (второе) АР остается в силе, когда  $z \in D, z \rightarrow \infty$ , так, что  $\operatorname{Re} S(z_0, z) \rightarrow +\infty (-\infty)$ . Оба разложения можно дифференцировать по  $z$  и по  $\lambda$  любое число раз.

АР решения  $w_1$  можно также записать в виде

$$w_1(z, \lambda) = \tilde{w}_1(z, \lambda; z_0) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} a_k(z)\right].$$

Здесь  $a_k(z)$  определяются из соотношения

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} a_k(z) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda)^{-k} \int_{\gamma^+(z)} \alpha_k(t) dt\right\},$$

где равенство понимается в смысле равенства формальных степенных рядов по  $\lambda^{-1}$ . При  $\lambda \geq \lambda_0 \gg 1, z \in D_\varepsilon^+$  справедлива оценка

$$\left| \frac{w_1(z, \lambda)}{\tilde{w}_1(z, \lambda; z_0)} - 1 - \sum_{k=1}^N \lambda^{-k} a_k(z) \right| \leq C_N (1 + |z|)^{-\alpha_N},$$

$$\alpha_N = (N + 1)(n/2 + 1).$$

Здесь  $N \geq 1$  — любое,  $n$  — степень полинома  $q(z)$ . Функции  $a_k(z)$  голоморфны в  $D$ , и  $a_k(z) = O(z^{-k(n/2+1)})$  при  $z \rightarrow \infty, z \in D$ . Аналогичные оценки имеют место для решения  $w_2$  и для производных решений  $w_1, w_2$ .

2.6. Элементарные ФСР: Пусть  $D$  — каноническая область,  $l$  — ЛС, лежащая в  $D, z_0 \in l$  — точка поворота (начало  $l$ ). Элементарная ФСР ( $u(z), v(z)$ ) однозначно определяется заданием тройки  $(l, z_0, D)$ . Выберем ветвь функции  $S(z_0, z)$  в

области  $D$  так, чтобы

$$\operatorname{Im} S(z_0, z) > 0, \quad z \in l. \quad (11)$$

Решения  $u, v$  имеют асимптотику

$$\begin{aligned} u(z) &\sim cq^{-1/4}(z) \exp\{\lambda S(z_0, z)\}, \\ v(z) &\sim cq^{-1/4}(z) \exp\{-\lambda S(z_0, z)\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $c$  — нормировочная постоянная:

$$|c| = 1, \quad \lim_{z \rightarrow z_0, z \in l} \arg[cq^{-1/4}(z)] = 0. \quad (13)$$

Асимптотические формулы (12) пригодны для  $u(v)$  при  $\lambda > 0$  фиксированном,  $z \rightarrow \infty$  в области  $D$ , так, что  $\operatorname{Re} S(z_0, z) \rightarrow +\infty (-\infty)$ . По построению решения  $u, v$  пропорциональны решениям  $w_2, w_1$  из п. 2.2 и однозначно определяются своей асимптотикой (по  $z$ ). Отметим, что  $\operatorname{Re} S(z_0, z) > 0 (< 0)$  справа (слева) от  $l$ , вблизи  $l$ .

**3. Матрицы перехода.** Имеются четыре типа матриц перехода, которые называются *элементарными*.

1)  $(l, z_1, D) \rightarrow (l, z_2, D)$ : меняется только направление ЛС  $l$ ; такой переход существует только для конечной ЛС.

2)  $(l_1, z_1, D) \rightarrow (l_2, z_2, D)$ , причем лучи  $S(l_1)$  и  $S(l_2)$  направлены в одну сторону.

3)  $(l, z_0, D_1) \rightarrow (l, z_0, D_2)$ : меняется только каноническая область.

4)  $(l_1, z_0, D_1) \rightarrow (l_2, z_0, D_2)$ , где  $l_1, l_2$  — соседние ЛС, выходящие из одной и той же точки поворота.

Любая матрица перехода  $(l_1, z_1, D_1) \rightarrow (l_2, z_2, D_2)$  от одной элементарной ФСР к другой является произведением конечного числа элементарных матриц перехода.

**3.1. Матрица перехода  $(l, z_1, D) \rightarrow (l, z_2, D)$ .** Эта матрица имеет вид

$$\Omega = e^{i\varphi_0} \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\lambda\alpha} \\ e^{i\lambda\alpha} & 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\alpha = |S(z_1, z_2)|, \quad e^{i\varphi_0} = c_2/c_1.$$

**3.2. Матрица перехода  $(l_1, z_1, D) \rightarrow (l_2, z_2, D)$ .** Пусть лучи  $S(l_1), S(l_2)$  направлены в одну сторону и  $l_2$  лежит слева от  $l_1$ . Тогда

$$\Omega = e^{i\varphi_0} \begin{bmatrix} e^{-\lambda a} & 0 \\ 0 & e^{\lambda a} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$a = S(z_1, z_2), \quad \operatorname{Re} a > 0, \quad e^{i\varphi_0} = c_2/c_1.$$

Формулы (14), (15) — точные, а не асимптотические.

3.3. Матрица перехода  $(l, z_0, D_1) \rightarrow (l, z_0, D_2)$ . В этом случае меняется только каноническая область, содержащая  $l$ . Например (см. рис. 3,  $q = 1 - z^2$ ), в качестве  $D_1$  можно взять объединение областей I, II, III (и соответствующих ЛС), в качестве  $D_2$  — объединение областей I, II, IV.

Пусть  $D$  — связная компонента  $D_1 \cap D_2$ , содержащая  $l$ . Тогда  $S(D)$  есть полоса  $-a_- < \operatorname{Re} S < a_+$  с вертикальными разрезами,  $a_{\pm} > 0$ . Имеем

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 + \eta_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & 1 + \eta_{22} \end{bmatrix},$$

$$\omega_{12} = O(\exp\{-2\lambda(a_+ - \varepsilon)\}), \quad \omega_{21} = O(\exp\{-2\lambda(a_- - \varepsilon)\}), \quad (16)$$

$$\eta_{11} = O(\lambda^{-1}),$$

$$\eta_{22} = O(\lambda^{-1}),$$

где  $\varepsilon > 0$  — любое. Если  $a_- = +\infty$ , то  $\eta_{11} = \omega_{21} = 0$ ; если  $a_+ = +\infty$ , то  $\omega_{12} = \eta_{22} = 0$ .

З а м е ч а н и е. Из (16) следует, что если необходимо вычислять матрицы перехода только с точностью до  $O(\lambda^{-1})$ , то достаточно указать пару  $(l, z_0)$  и можно не заботиться о выборе канонической области.

Приведем АР элементов  $\omega_{11}(\lambda)$ ,  $\omega_{12}(\lambda)$ . Пусть  $l_1$  — бесконечный контур, который начинается в области  $D_1$  там, где  $\operatorname{Re} S \rightarrow -\infty$ , и заканчивается в области  $D_2$  там, где  $\operatorname{Re} S \rightarrow -\infty$ ;  $l_2$  определяется так же, с заменой  $S$  на  $-S$ . Тогда

$$\omega_{jj}(\lambda) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \int_{l_j} \alpha_k(z) dz\right\}, \quad j=1, 2. \quad (17)$$

На рис. 3 изображены контуры  $l_1, l_2$ .

3.4. Матрица перехода  $(l_1, z_0, D_1) \rightarrow (l_2, z_0, D_2)$ . Пусть  $z_0$  — точка поворота порядка  $n$ , ЛС  $l_1, l_2$  выходят из  $z_0$  и  $l_2$  лежит слева от  $l_1$ . Тогда

$$\Omega = \exp\left\{-\frac{i\pi n}{2(n+2)}\right\} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \sin \frac{\pi n}{2(n+2)} \end{bmatrix} + O(\lambda^{-1}). \quad (18)$$

Более точная оценка остаточного члена для элемента  $\omega_{22}(\lambda)$  неизвестна, если  $n > 1$ . Если  $z_0$  — простая точка поворота, то

$$\Omega = e^{-i\pi/6} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} + O(\lambda^{-1}). \quad (19)$$

Чтобы получить АР матриц перехода, необходимо уточнить выбор канонических областей. Пусть  $z_0$  — простая точка поворота,  $l_1, l_2, l_3$  — ЛС с началом  $z_0$ ,  $l_{j+1}$  лежит слева от  $l_j$  (индексы таковы:  $4 = 1, \dots$ ). Выберем канонические области  $D_j$  так, чтобы часть  $D_j$ , лежащая слева от  $l_j$ , совпадала с частью  $D_{j+1}$ , лежащей справа от  $l_{j+1}$ , и обозначим через  $\Omega_{j,j+1}$  матрицу перехода

$(l_j, z_0, D_j) \rightarrow (l_{j+1}, z_0, D_{j+1})$ . Такие области и соответствующие элементарные ФСР будем называть *согласованными*. Тогда

$$\Omega_{j, j+1} = e^{-i\pi/6} \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{j, j+1}^{-1} \\ 1 & i\alpha_{j+1, j+2} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} = 1,$$

что следует из тождества  $\Omega_{31}\Omega_{23}\Omega_{12} = I$ . Справедливо АР

$$\alpha_{j, j+1}(\lambda) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda)^{-k} \int_{\gamma_{j, j+1}} \alpha_k(t) dt \right\}. \quad (21)$$

Бесконечный контур  $\gamma_{j, j+1}$  лежит в  $D_j \cup D_{j+1}$ , начинается в  $D_{j+1}$  там, где  $\operatorname{Re} S \rightarrow +\infty$ , и кончается в  $D_j$  там, где  $\operatorname{Re} S \rightarrow -\infty$ .

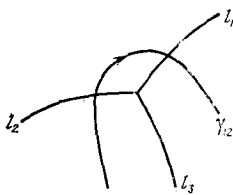


Рис. 12.

Ветвь  $\sqrt{q(z)}$  выбрана так же, как и для ФСР  $(u_j, v_j)$ . На рис. 12 изображен контур  $\gamma_{12}$ .

Пусть  $z_0$  — точка поворота порядка  $n$ ,  $\Omega_{j, j+1}$  — матрица перехода  $(l_j, z_0, D_j) \rightarrow (l_{j+1}, z_0, D_{j+1})$ . Тогда

$$\Omega_{j, j+1} = \exp \left\{ -\frac{i\pi n}{2(n+2)} \right\} \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{j, j+1}^{-1} \\ 1 & \beta_{j, j+1} \end{bmatrix}$$

и для  $\alpha_{j, j+1}$  справедлива формула (24).

3.5. Полиномы с вещественными коэффициентами и ентами. В этом случае точки поворота и ЛС уравнения (2) обладают рядом дополнительных свойств. Напомним обозначение:  $M^*$  — симметричное с  $M$  множество относительно вещественной оси.

1. Точки поворота и ЛС симметричны относительно вещественной оси.

2. Если  $x_1, x_2$  — вещественные точки поворота,  $q(x) < 0$  при  $x \in l = (x_1, x_2)$ , то  $l$  — ЛС. В (14)  $\varphi_0 = 0$ .

3. Пусть  $x_0$  — простая вещественная точка поворота,  $l_0, l_1, l_2$  — ЛС с началом  $x_0$ . Тогда одна из ЛС (пустя  $l_0$ ) есть интервал вещественной оси,  $l_2 = l_1^*$  и линия  $l_1 \setminus x_0$  лежит в верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$ . Линии  $l_1 \setminus x_0, l_2 \setminus x_0$  не пересекаются с вещественной осью.

4. Пусть  $x_1, x_2$  — простые вещественные точки поворота,  $x_2 < x_1, q(x) < 0$  при  $x_2 < x < x_1$ . Обозначим через  $l_1, l_2$  ЛС, которые выходят из точек  $x_1, x_2$  и лежат в верхней полуплоскости. Тогда  $\varphi_0 = -\pi/6$  в (15).

5. Пусть ЛС  $l$  пересекает вещественную ось в точке  $x_0, q(x_0) \neq 0$ . Тогда  $l$  — конечная ЛС,  $l = l^*$  (рис. 13),  $q(z) = (z^2 - a^2)(z^2 + b^2)(z^2 + c^2)$ ,  $a, b, c > 0$ .

6. Пусть  $x_0$  — простая вещественная точка поворота,  $q(x) > 0$  при  $x > x_0$ . Выберем ветвь  $\sqrt{q(x)} > 0$  при  $x > x_0$ ; тогда  $S(x_0, x) =$

$= \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt > 0$  при  $x > x_0$ ,  $S(x_0, +\infty) = +\infty$ . Поэтому

полуось  $x > x_0$  пересекается с областью  $D_0$  типа полуплоскости. Пусть  $l, l^*$  — ЛС, которые выходят из точки  $x_0$  и лежат соответственно в полуплоскостях  $\text{Im } z > 0, \text{Im } z < 0$ . Существует область  $D$  такая, что функция  $S$  однолистка в  $D$ ,

$$D \supset (x_0, +\infty), D \supset D_0, D = D^*, \partial D \supset l \cup l^*$$

и  $S(D)$  — полуплоскость  $\text{Re } S > 0$  с конечным числом вертикальных разрезов.

7. Пусть  $q(x) < 0$  на вещественной оси  $\mathbf{R}$ . Тогда  $\mathbf{R}$  содержится в области  $D$  типа полосы,  $D = D^*$ . Действительно, пусть

$\sqrt{q(x)} = i |\sqrt{q(x)}|$ ; тогда функция  $S(0, x)$  взаимно однозначно отображает  $\mathbf{R}$  на мнимую ось.

8. Пусть  $q(x_1) = q(x_2) = 0$ ,  $x_1 < x_2$ ,  $q(x) > 0$  при  $x_1 < x < x_2$ .

Обозначим через  $l_1, l_2$  ЛС, которые выходят из точек  $x_1, x_2$  и лежат в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ . Тогда существует область  $D$  такая, что  $\partial D \supset l_1 \cup l_2$ ,  $D = D^*$ , функция  $S$  однолистка в  $D$  и  $S(D)$  — полоса вида  $a < \text{Re } S < b$  с конечным числом вертикальных разрезов.

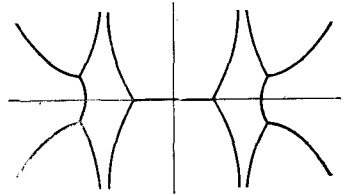


Рис. 13.

9. Пусть  $q(x_0) = 0$ ,  $q(x) < 0$  при  $x > x_0$ . Тогда луч  $l = (x_0, +\infty)$  есть ЛС. Существует каноническая область  $D$  такая, что  $D \supset l$ ,  $D = D^*$  и все граничные разрезы области  $S(D)$  направлены в сторону, противоположную  $S(l)$  (рис. 14).

Вещественность полинома  $q(x)$  позволяет уточнить некоторые формулы для матриц перехода.

10. Пусть  $x_0$  — простая вещественная точка поворота,  $q(x) > 0$  при  $x_0 < x < b \leq +\infty$ . Занумеруем ЛС  $l_0, l_1, l_{1'}$ , выходящие из  $x_0$ , так, что  $l_0 = (a, x_0)$ ,  $\text{Im } z > 0$  на  $l_1$  и  $l_{1'} = l_1^*$ . Выберем канонические области  $D_0, D_1, D_{1'}$  так, что

$$D_0 = D_0^*, D_{1'} = D_1^*, D_0 \supset l_0, D_1 \supset (x_0, b),$$

и введем элементарные ФСР  $(u_j, v_j)$ , отвечающие  $(l_j, x_0, D_j)$ ,  $j = 0, 1, 1'$ . Тогда в тех же обозначениях, что и в (20), имеем

$$\alpha_{10} \overline{\alpha_{01'}} = 1, \quad |\alpha_{1'1}| = 1. \quad (22)$$

11. Пусть  $b = +\infty$  в условиях п. 10. Тогда

$$\alpha_{11'} = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \int_{l_{1'}} \alpha_k(z) dz \right\},$$

где контур  $l_{11}$  изображен на рис. 15. Ветвь функции  $\sqrt{q(z)}$  выбрана так, что  $\sqrt{q(z)} = i |\sqrt{q(z)}|$  на пересечении контура с вещественной осью.

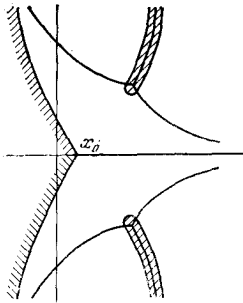


Рис. 14.

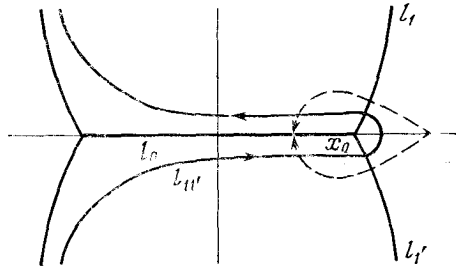


Рис. 15.

12. Пусть условия п. 11 выполнены,  $w_1$  — вещественное решение уравнения (2) такое, что  $w_1(+\infty, \lambda) = 0$ . Тогда  $w_1(x, \lambda) \sim c q^{-1/4}(x) \exp\{-\lambda S(x_0, x)\}$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$ ,

где  $c$  — вещественная постоянная,  $\sqrt{q(x)} > 0$ ,  $\sqrt[4]{q(x)} > 0$  при  $x > x_0$ . Асимптотику решения  $w_1$  на ЛС  $l = (a, x_0)$  можно формально получать следующим образом.

Продолжив аналитически асимптотику с полуоси  $x > x_0$  на  $l_0$ , обходя точку поворота  $x_0$  сверху (снизу), получим значения  $w_1^+$  ( $w_1^-$ ). Пути, по которым происходит продолжение, указаны на рис. 15. Тогда асимптотика решения  $w_1$  равна

$$w_1(x, \lambda) = \frac{1}{2}[w_1^+(x, \lambda) + w_1^-(x, \lambda)].$$

Это хорошее мнемоническое правило.

13. Пусть  $q(x)$  — вещественнозначная функция,  $x_1 < x_2$ ,  $q(x_1) = q(x_2) = 0$  и  $q(x) > 0$  при  $x_1 < x < x_2$ . Пусть  $x_1, x_2$  — простые точки поворота; тогда из точки  $x_1$  выходят ЛС  $l_0, l_1, l_1^*$ ,

из точки  $x_2$  — ЛС  $l_2, l_2^*, l_3$  (рис. 16). Здесь  $\text{Im } z > 0$  при  $z \in l_1$ ,

$z \in l_2$ , ЛС  $l_0, l_3$  являются интервалами вещественной оси. Введем элементарные ФСР  $(u_j, v_j)$ , отвечающие тройкам  $(l_j, x_j, D_j)$ ,  $0 \leq j \leq 3$ , где  $x_j = x_1$  или  $x_j = x_2$ , в зависимости от того, какая

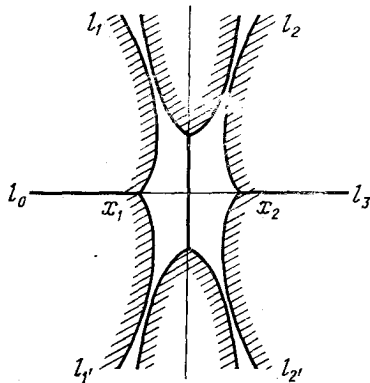


Рис. 16.



из этих точек поворота является концом ЛС  $l_j$ , и  $(u_j, v_j)$ ,  $j = 1, 2$ , отвечающие тройкам  $(l_j^*, x_j, D_j')$ . Канонические области выберем так, что  $D_0 = D_0^*$ ,  $D_3 = D_3^*$ , так что

$$v_0(z, \lambda) \equiv \overline{u_0(\bar{z}, \lambda)}, \quad v_3(\bar{z}, \lambda) \equiv \overline{u_3(\bar{z}, \lambda)}.$$

Остальные канонические области выберем согласованными (п.3.4), так что, в частности, будет выполняться тождество  $\alpha_{32}\alpha_{22'}\alpha_{2'3} = 1$ . Существует область  $D$ , граница которой содержит ЛС  $l_1, l_1^*, l_2, l_2^*$  и которая взаимно однозначно отображается функцией  $S$  на полосу  $a < \operatorname{Re} S < b$  с конечным числом вертикальных разрезов, причем  $D = D^*$ . Положим

$$D_2 = D_0^+ \cup D \cup D_3^+ \cup l_1 \cup l_2, \quad D_1 = D_2, \\ D_2' = D_0^+ \cup D \cup D_3^- \cup l_1 \cup l_2^*, \quad D_1' = D_2^*,$$

где  $D_j^\pm = D_j \cap \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ . Тогда [57]

$$|\alpha_{11'}| = (1 + \delta)^{-1/2}, \quad |\alpha_{22'}| = (1 + \delta)^{1/2}, \\ \alpha_{1'1} = \alpha_{32}\overline{\alpha_{2'3}}, \quad \operatorname{Im}(\alpha_{10}/\bar{\alpha}_{32}) = 0, \quad (23)$$

$$\delta = e^{-2\lambda\xi} [1 + O(\lambda^{-1})], \quad \xi = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{q(x)} dx > 0.$$

Эти формулы интересны тем, что хотя значения  $\alpha_{11'}(\lambda), \alpha_{22'}(\lambda)$  находятся лишь с точностью до  $O(\lambda^{-N})$  при любом  $N$ , значения модулей этих функций находятся с экспоненциальной точностью. Действительно,

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \Omega(\lambda) \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}, \\ \omega_{22}(\lambda) = \overline{\omega_{11}(\lambda)}, \quad \omega_{21}(\lambda) = \overline{\omega_{12}(\lambda)}.$$

Далее, из тождества

$$\Omega(\lambda) = [(\Omega_{10}\Omega_{21}\Omega_{32})^T]^{-1}$$

находим

$$\omega_{11} = ie^{\lambda\xi} [-(\alpha_{1'1}\alpha_{2'3})^{-1} + \alpha_{10}e^{-2\lambda\xi}], \quad \omega_{12} = e^{\lambda\xi}\alpha_{32}\alpha_{1'1}^{-1}, \\ \omega_{21} = e^{\lambda\xi}\alpha_{2'3}^{-1}, \quad \omega_{22} = ie^{\lambda\xi}\alpha_{32},$$

что приводит к соотношениям

$$\alpha_{1'1} = \alpha_{32}\overline{\alpha_{2'3}}, \quad 1 + \delta = |\alpha_{22'}|^2, \\ \delta = e^{-2\lambda\xi}\alpha_{10}\overline{(\alpha_{32})^{-1}}.$$

Здесь использовано тождество  $\alpha_{32}\alpha_{22'}\alpha_{2'3} = 1$ . Следовательно, величина  $\delta$  вещественна, так что

$$\operatorname{Im}(\alpha_{10}/\bar{\alpha}_{32}) = 0, \quad |\alpha_{22'}| = \sqrt{1 + \delta}e^{i\varphi_2(\lambda)},$$

и аналогично получаются остальные из соотношений (23).

4. Произвольная зависимость коэффициентов от параметра. Рассмотрим уравнение

$$w'' - Q(z, \lambda) w = 0, \quad (24)$$

$$Q(z, \lambda) = \sum_{j=0}^n a_{n-j}(\lambda) z^j, \quad a_0(\lambda) \neq 0,$$

где  $a_k(\lambda)$  — непрерывные функции  $\lambda$  при  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ . В этом случае и точки поворота, и ЛИС уравнения зависят от  $\lambda$ . Пусть выполнены условия:

1) При  $\lambda \geq \lambda_0$  все нули  $z_1(\lambda), \dots, z_n(\lambda)$  полинома  $Q$  — простые.

2) Существует функция  $N(\lambda) > 0$ ,  $N(+\infty) = +\infty$ , такая, что круги

$$O_k(\lambda): |z - z_k(\lambda)| \leq |Q'_z(z(\lambda), \lambda)|^{-1/3} N(\lambda)$$

не пересекаются при  $\lambda \geq \lambda_0$ .

Введем обозначения

$$S(z, \lambda; z_0) = \int_{z_0}^z \sqrt{Q(t, \lambda)} dt,$$

$$\tilde{w}_{1,2}(z, \lambda; z_0) = Q^{-1/4}(z, \lambda) \exp\{\pm S(z, \lambda; z_0)\}.$$

Пусть  $D_0(\lambda)$  — каноническая область,

$$D(\lambda) = D_0(\lambda) \setminus \bigcup_{k=1}^n O_k(\lambda).$$

Тогда при  $\lambda \geq \lambda_0 \gg 1$  уравнение (24) имеет решения  $w_1, w_2$  такие, что

$$\left| \frac{w_j(z, \lambda)}{\tilde{w}_j(z, \lambda; z_0)} - 1 \right| \leq A_j(z) N^{-3/2}(\lambda), \quad (25)$$

$$\left| \frac{w'_j(z, \lambda)}{Q^{1/2}(z, \lambda) \tilde{w}_j(z, \lambda; z_0)} \pm 1 \right| \leq A_j(z) N^{-3/2}(\lambda).$$

Здесь  $j = 1, 2$ , знак плюс берется при  $j = 1$  и  $A_j(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ ,  $z \in D(\lambda)$ , если  $\operatorname{Re} S \rightarrow +\infty$  при  $j = 1$ ,  $\operatorname{Re} S \rightarrow -\infty$  при  $j = 2$ . В частности,

$$w_j(z, \lambda) \sim \tilde{w}_j(z, \lambda; z_0), \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

равномерно по  $z \in D(\lambda)$ .

Формула (19) для матриц перехода сохраняется, с той лишь разницей, что остаточные члены порядка  $O(\lambda^{-1})$  следует заменить на  $O(N^{-3/2}(\lambda))$ .

**Пример.** Пусть  $q(z)$  — многочлен степени  $n \geq 2$ ,  $Q(z, \lambda) = q(z) - \lambda$ . Тогда можно положить  $N(\lambda) = \lambda^{1/3-2\varepsilon/3}$ , где  $\varepsilon > 0$  — любое, и остаточные члены в (25) будут иметь порядок  $O(\lambda^{-1/2+\varepsilon})$ .

### 5. Дополнительные параметры. Рассмотрим уравнение

$$q'' - \lambda^2 q(z, \omega) w = 0, \\ q(z, \omega) = a_0(\omega) z^n + a_1(\omega) z^{n-1} + \dots + a_n(\omega). \quad (26)$$

Здесь  $\lambda > 0$  — большой параметр,  $\omega$  — комплексный параметр,  $a_j(\omega)$  — полиномы,  $a_0(\omega) \neq 0$ . Исследуем равномерность асимптотических формул по параметру  $\omega$ . Введем обозначение

$$S(a, b; \omega) = \int_a^b \sqrt{q(z, \omega)} dz. \quad (27)$$

5.1. Графы Стокса. *Граф Стокса*  $\Phi(\omega_0)$  — это объединение всех ЛС уравнения (26) при  $\omega = \omega_0$ . Два графа  $\Phi(\omega_1)$ ,  $\Phi(\omega_2)$  называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм  $\varphi: \Phi(\omega_1) \rightarrow \Phi(\omega_2)$ , при котором точки поворота переходят в точки поворота. Значение параметра  $\omega_0$  называется *регулярным*, если существует окрестность  $U \ni \omega_0$  такая, что все графы Стокса  $\Phi(\omega)$  при  $\omega \in U$  эквивалентны, и *сингулярным* в противном случае. Опишем структуру множества  $I$  всех сингулярных точек  $\omega$ . Имеем

$$q(z, \omega) = a_0(\omega) (z - b_1(\omega))^{n_1} \dots (z - b_k(\omega))^{n_k},$$

где  $n_j \geq 1$  — целые,  $n_1 + \dots + n_k = n$ ,  $b_j(\omega)$  — алгебраические функции. Пусть  $I_1$  — множество всех нулей коэффициента  $a_0(\omega)$ ,  $I_2$  — множество всех таких значений  $\omega$ , что  $b_j(\omega) = b_l(\omega)$ ,  $j \neq l$ , и  $I_3$  — множество всех таких значений  $\omega$ , что при некоторых  $j, l, j \neq l$ ,

$$\operatorname{Re} S(b_j(\omega), b_l(\omega), \omega) = 0. \quad (28)$$

Эти определения не зависят от выбора ветвей  $b_j(\omega)$ . Таким образом,  $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ ; множество  $I$  замкнуто. Множества  $I_1, I_2$  состоят из конечного числа точек, множество  $I_3$  — из конечного числа аналитических кривых, которые называются *сингулярными*.

Напомним, что связанные компоненты графа Стокса называются *комплексами Стокса*. Комплекс Стокса называется *простым* (сложным), если он содержит ровно одну (не менее двух) точку поворота. Если  $\omega_0 \in I_3$ , то существует конечная ЛС, соединяющая точки  $b_j(\omega)$ ,  $b_l(\omega)$ , так что существует сложный комплекс Стокса. Такие комплексы играют существенную роль в задачах на собственные значения (§ 5).

**Примеры 1.**  $q = -z^2 + \omega$  (гармонический осциллятор). Множество  $I_1$  пусто,  $I_2$  — точка  $\omega = 0$ ,  $I_3$  — прямая  $\operatorname{Im} \omega = 0$ .

2.  $q = -z(z - \omega)^2$  (уравнение (26) описывает линейные волны плотности в спиральной галактике). Множество  $I_1$  пусто,  $I_2$  — точка  $\omega = 0$ ,  $I_3$  — объединение четырех лучей  $\operatorname{Im} \omega^{5/2} = 0$ .

3.  $q = -a(\omega)(z - b_1(\omega))^{n_1}(z - b_2(\omega))^{n_2}$ , где  $a, b_1, b_2$  — полиномы. Здесь  $I_1$  — множество корней уравнения  $a(\omega) = 0$ ,  $I_2$  —

множество корней уравнения  $b_1(\omega) = b_2(\omega)$ ,  $I_3$  — множество, заданное уравнением

$$\operatorname{Re} [e^{i\pi n_2/2} (a(\omega))^{1/2} (b_2(\omega) - b_1(\omega))^{(n_1+n_2+2)/2}] = 0.$$

4.  $q = e^{i\varphi_0 z^n} - \omega$ . Множество  $I_1$  пусто,  $I_2$  — точка  $\omega = 0$ ,  $I_3$  состоит из лучей  $\arg \omega = \psi$  таких, что

$$2\psi - \varphi_0 + 2(k+j)\pi/n = \pi l.$$

Здесь  $j, k, l$  — целые числа,  $k \neq j$ ,  $0 \leq j, k \leq n-1$ .

5.  $q = \omega^2 p(z)$ ,  $p(z)$  — полином,  $z_1, \dots, z_l$  — все его различные нули. Множество  $I_1$  — точка  $\omega = 0$ , множество  $I_2$  пусто, множество  $I_3$  состоит из конечного числа лучей  $\arg \omega = \psi$  таких, что

$$\operatorname{Re} \left( e^{i\psi} \int_{z_j}^{z_k} \sqrt{p(t)} dt \right) = 0$$

при некоторых  $j, k$ ,  $j \neq k$ .

Множество регулярных точек  $C \setminus I$  состоит из конечного числа связных компонент (областей). Пусть  $\omega_1, \omega_2$  — регулярные значения, лежащие в одной компоненте связности  $\Omega$ ,  $\gamma$  — простая кривая, которая соединяет точки  $\omega_1, \omega_2$  и лежит в  $\Omega$ . Если  $D(\omega_1)$  — каноническая область при  $\omega = \omega_1$ , то при движении  $\omega$  вдоль  $\gamma$  мы получаем семейство эквивалентных канонических областей  $\{D(\omega)\}$ , непрерывно зависящих от параметра  $\omega$ .

5.2. Аналитичность ВКБ-асимптотик по параметру. Пусть  $\omega_0$  — регулярное значение,  $D(\omega_0)$  — каноническая область,  $\Omega \supset \omega_0$  — максимальная область, состоящая из регулярных точек. Обозначим

$$\tilde{w}_{1,2}(z, \lambda, \omega; z_0) = q^{-1/4}(z, \omega) \exp \{ \mp \lambda S(z_0, z, \omega) \}.$$

В области  $D(\omega_0)$  при  $\lambda \gg 1$  существует ФСР вида (7), (8):

$$w_j(z, \lambda, \omega) \sim \tilde{w}_j(z, \lambda, \omega; z_0), \quad j = 1, 2, \quad (29)$$

при  $\omega = \omega_0$ . Пусть кривая  $\gamma$  лежит в  $\Omega$  и соединяет точки  $\omega_0, \omega_1$ . Аналитически продолжим вдоль  $\gamma$  (по параметру  $\omega$ ) решения  $w_j$  и ВКБ-приближения  $\tilde{w}_j$ . Тогда формула (29) остается в силе при  $\lambda \rightarrow +\infty$ ,  $z \in D(\omega)$ , при любом  $\omega \in \gamma$ . В частности, функции из обеих частей равенства (29) аналитичны в области  $\Omega$ . Если  $K \subset \Omega$  — компакт, то асимптотика решений равномерна по  $\omega \in K$ . Это верно и для высших приближений (10). Все указанные АР можно дифференцировать по  $z, \lambda, \omega$  любое число раз. Соответственно сохраняются формулы для матриц перехода.

Пусть  $\omega_0$  — сингулярная точка,  $\gamma \ni \omega_0$  — кривая, все точки которой, кроме  $\omega_0$ , регулярны, и  $\{D(\omega)\}$  — непрерывное семейство канонических областей ( $\omega \in \gamma$ ,  $\omega \neq \omega_0$ ). Тогда предельная область  $D(\omega_0)$  — каноническая. Однако графы Стокса  $\Phi(\omega)$ ,

$\omega \neq \omega_0$ , и  $\Phi(\omega_0)$  могут не быть эквивалентными и формула (29) может не быть пригодной при  $\omega = \omega_0$ . Имеется важный частный случай, когда формула (29) сохраняется. Пусть  $L$  — сингулярная кривая, не содержащая точек типа  $I_1, I_2$ , и  $\Omega_1, \Omega_2$  — примыкающие к  $L$  компоненты связности множества регулярных точек. Тогда соотношение (29) сохраняется при аналитическом продолжении вдоль любой кривой  $\gamma$ , лежащей в  $\Omega_1 \cup L \cup \Omega_2$ .

Все сформулированные выше результаты остаются в силе, если коэффициенты  $a_0(\omega), \dots, a_n(\omega)$  голоморфны в замыкании  $[G]$  ограниченной области комплексной плоскости  $\omega$ . Кроме того, они очевидным образом обобщаются на случай нескольких параметров:  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ .

## § 4. Уравнения с целыми и мероморфными коэффициентами

1. Уравнения с целыми коэффициентами. Рассмотрим уравнение

$$w'' - \lambda^2 q(z) w = 0, \quad (1)$$

где  $q(z)$  — целая функция,  $\lambda > 0$  — большой параметр. Любое решение уравнения (1) является целой функцией  $z$ . Результаты, приведенные в § 3 для полиномов  $q(z)$ , переносятся во многом и на этот случай, но имеются и исключения. Поясним основное различие между полиномами и целыми трансцендентными функциями с точки зрения ВКБ-приближения. Пусть  $l$  — полубесконечная линия уровня  $\operatorname{Re} S(z_0, z) = 0$  (или  $\operatorname{Im} S(z_0, z) = 0$ ) с началом в точке  $z_0$ . Если  $q(z)$  — полином, то

$$I = \int_l |\alpha_1(z)| |dz| < \infty.$$

Если  $q(z)$  — целая функция, то этот интеграл может расходиться. Например, если  $q(x)$  — вещественная периодическая или почти периодическая функция и  $|q(x)| \geq \delta > 0$  на вещественной оси, то  $l = [0, \infty)$  — линия уровня  $\operatorname{Im} S(0, x) = 0$ ,  $I = \infty$  ( $q \neq \neq \text{const}$ ). Другой пример:  $z = \infty$  — точка поворота бесконечного порядка ( $q(z) = e^{2z}$ ,  $l = (-\infty, 0]$ ,  $I = \infty$ ). В обоих примерах ВКБ-асимптотики непригодны.

Каноническая область  $D$  определяется так же, как и в § 3, п. 1, с той лишь разницей, что  $[S(D)]$  может содержать бесконечно много вертикальных разрезов. Точно так же определяются области  $D_\varepsilon^\pm, D_\varepsilon$ , но размеры  $\varepsilon$ -окрестностей — свои для каждого разреза (если их бесконечно много и они сгущаются). Пусть  $D$  — каноническая область и выполнены условия (§ 2, (16))

$$\sup_{z \in D_\varepsilon} \rho^\pm(z) < \infty. \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) имеет решения  $w_1(z, \lambda)$ ,  $w_2(z, \lambda)$ , для которых при  $z \in D_\varepsilon^+$  ( $z \in D_\varepsilon^-$ ),  $\lambda \geq \lambda_0$  справедливы формулы (7), (8) из § 3. Понятия элементарной ФСР, матриц перехода и все формулы для них (с точностью до  $O(\lambda^{-1})$ ) сохраняются. Если же вместо условия (2) выполнено условие

$$\sup_{z \in D_\varepsilon} \left( \int_{\gamma_z^+} |\alpha_k(t)| |dt|, \int_{\gamma_z^-} |\alpha_k(t)| |dt| \right) < \infty, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

то для решений  $w_1, w_2$  справедливы АР (10) из § 3. Все остальные результаты § 3 (кроме пп. 4—6) также сохраняются, если условие (3) выполнено в соответствующих канонических областях.

**2.  $q(z)$  — мероморфная функция.** В этом случае решения уравнения (1), как правило, являются неоднозначными функциями; особые точки уравнения являются точками ветвления решений.

Вспользуемся той же классификацией особых точек уравнения (1), что и в § 1, п. 2.2. Пусть  $q(z)$  — рациональная.

**2.1. Уравнение без регулярных особых точек.** В этом случае  $[\Phi] = \Phi$  ( $\Phi$  — граф Стокса) и ЛС разбивают комплексную плоскость на конечное число областей типа полуплоскости и полосы (§ 1). Эти области и построенные из них канонические области — односвязные, так что в каждой из них можно выбрать однозначные решения уравнения (1). Все результаты § 3 справедливы и в этом случае.

С помощью АР матриц перехода можно вычислить асимптотику при  $\lambda \rightarrow +\infty$  образующих группы монодромии уравнения (1).

**П р и м е р.** Уравнение

$$w'' - \lambda^2 \frac{z^2 - 1}{z^3} w = 0$$

имеет две иррегулярные особые точки  $z = 0$  и  $z = \infty$ . Фиксируем точку  $a \neq 0, \infty$ , ФСР ( $w_1(z)$ ,  $w_2(z)$ ), голоморфную в этой точке, и аналитически продолжим эту ФСР вдоль простой замкнутой кривой  $\gamma$ , которая содержит внутри себя точку  $z = 0$ . Тогда получим ФСР ( $\tilde{w}_1(z)$ ,  $\tilde{w}_2(z)$ ), голоморфную в точке  $a$ , и

$$\begin{bmatrix} \tilde{w}_1(z) \\ \tilde{w}_2(z) \end{bmatrix} = U(\lambda) \begin{bmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \end{bmatrix},$$

где  $U(\lambda)$  есть  $(2 \times 2)$ -матрица. В этом примере группа монодромии  $G$  уравнения имеет одну образующую  $U$  и состоит из матриц  $U^n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Напомним, что группы монодромии, отвечающие различным ФСР, заданным в точке  $a$ , подобны (гл. I, § 2).

Введем три элементарные ФСР ( $u_j, v_j$ ), отвечающие тройкам  $(l_j, z_j, D_j)$ , где  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = z_3 = 1$  (ЛС см. на рис. 17).

Перейдем от ФСР ( $u_1, v_1$ ) к ( $u_2, v_2$ ), затем к ( $u_3, v_3$ ) и, наконец, снова к ( $u_1, v_1$ ) (рис. 17); полученная матрица перехода

$$U = \Omega_{31} \Omega_{23} \Omega_{12}$$

есть искомая образующая группа монодромии. Имеем (§ 3, (15), (20))

$$\Omega_{23} = e^{i\pi/6} \begin{bmatrix} -i + O(\lambda^{-1}) & 1 \\ 1 + O(\lambda^{-1}) & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_{12} = \frac{c_1}{c_2} \begin{bmatrix} e^{\lambda\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda\alpha_1} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{31} = \frac{c_3}{c_1} \begin{bmatrix} e^{\lambda\alpha_2} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda\alpha_2} \end{bmatrix},$$

где  $c_j$  — нормировочные постоянные (§ 3),

$$\alpha_j = \int_{\gamma_j} \sqrt{q(z)} dz, \quad \operatorname{Re} \alpha_j > 0, \quad j = 1, 2.$$

Контур  $\gamma_1$  соединяет точки  $-1, 1$  и лежит в верхней полуплоскости, контур  $\gamma_2$  соединяет точки  $1, -1$  и лежит в нижней полуплоскости. Поэтому

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \int_{\gamma} \sqrt{q(z)} dz = \alpha,$$

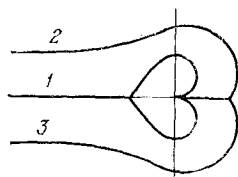


Рис. 17.

где  $\gamma$  — простая замкнутая кривая с началом и концом в точке  $z = 1$ , которая содержит внутри себя точку  $z = 0$  и ориентирована положительно. Заметим, что функция  $\sqrt{q(z)}$  принимает разные значения в начальной и конечной точках контура  $\gamma$ . Имеем

$$U(\lambda) = \begin{bmatrix} [1 + O(\lambda^{-1})] e^{\lambda\alpha} & -i \\ -i + O(\lambda^{-1}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы  $U$  равны

$$\mu_{1,2}(\lambda) = \pm [1 + O(\lambda^{-1})] \exp \left\{ \pm \lambda \int_{\gamma} \sqrt{\frac{z^2 - 1}{z^3}} dz \right\}.$$

Интеграл по контуру  $\gamma$  равен  $\frac{1}{2} (1 - i) B \left( \frac{3}{2}, \frac{1}{4} \right)$ .

2.2. Уравнения с регулярными особыми точками типа  $R_{2,1}$ . В этом случае функция  $q(z)$  может иметь полюсы второго порядка. Если  $a \neq 0$  — такой полюс, то

$$q(z) = -p(z)/(z - a)^2, \quad p(a) > 0.$$

ЛС разбивают комплексную плоскость на конечное число областей типа полуплоскости и полосы, причем окрестность точки типа  $R_{2,1}$  покрывается замыканием конечного числа областей типа полосы. Поэтому все приведенные в § 3 результаты о матрицах перехода сохраняются.

Новым здесь является следующее: выделение решения с помощью краевого условия в точке  $a$  типа  $R_2$ . Пусть  $D_0$  — область

типа полосы, причем две из ограничивающих ее ЛС  $l, \bar{l}$  оканчиваются в точке  $R_2$ , и  $D \supset D_0$  — каноническая область. Введем новый параметр

$$\mu = \sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{4p(a)}}, \quad (4)$$

как и в гл. II, § 6, (11),  $\mu > 0$ . Уравнение (1) имеет два решения  $w_1, w_2$  такие, что

$$w_{1,2}(z, \lambda) = [q(z)]^{-1/4} \exp \{ \pm \mu S(z_0, z) \} [1 + \mu^{-1} \varphi_{1,2}(z, \mu)]. \quad (5)$$

Эта асимптотика является двойной. Фиксируем  $\lambda_0 > 0$ ; тогда при  $\lambda \geq \lambda_0, z \in D_\varepsilon$

$$|\varphi_{1,2}(z, \mu)| \leq C.$$

Если  $\lambda > 0$  фиксировано,  $z \rightarrow a$  в области  $D_0$ , то

$$|\varphi_{1,2}(z, \mu)| \leq C |z - a|.$$

При  $\lambda > 0$  фиксированном,  $z \rightarrow a, z \in D_0$  имеем

$$w_{1,2}(z, \lambda) \sim C_{1,2}(\lambda) (z - a)^{1/2 \pm i\mu \sqrt{p(a)}},$$

так что эти решения сильно осциллируют. Если  $w$  — решение уравнения (1),

$$w(z, \lambda) \sim (z - a)^{1/2 + i\mu \sqrt{p(a)}}, \quad z \rightarrow a, \quad z \in D_0, \quad (6)$$

то  $w \equiv C(\lambda) w_1$ . Аналогично, решение  $w_2$  можно задать с помощью краевого условия в точке  $a$ . Условие (6) можно заменить следующим:

$$\frac{w'(z, \lambda)}{w(z, \lambda)} \sim \left( \frac{1}{2} + i\mu \sqrt{p(a)} \right) (z - a)^{-1}, \quad z \rightarrow a, \quad z \in D_0.$$

Эти результаты позволяют «отойти» от особой точки типа  $R_2$ , т. е. продолжить асимптотику решения в такую область, в которой пригодны стандартные ВКБ-асимптотики, и затем уже производить сращивание асимптотик.

## § 5. Асимптотика собственных значений оператора $-d^2/dx^2 + \lambda^2 q(x)$ . Самосопряженные задачи

### 1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$ly \equiv y'' - \lambda^2 q(x) y = 0, \quad (1)$$

где функция  $q(x)$  непрерывна и вещественна на вещественной оси,  $\lambda$  — спектральный параметр.

1.1. Задача на всей оси. Пусть существуют конечные или бесконечные пределы  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x) = q_{\pm} > 0$ . Тогда спектр оператора  $l$ , рассматриваемого в пространстве  $L_2(\mathbb{R})$ , чисто дискретен и со-



стоит из счетного множества положительных собственных значений  $\{\lambda_n\}$  (серию  $\{-\lambda_n\}$  мы не будем рассматривать). Занумеруем их в порядке возрастания:

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty.$$

Собственные функции  $y_n(x) = y(x, \lambda_n)$  экспоненциально убывают при  $|x| \rightarrow \infty$ , и условие  $y \in L_2(\mathbb{R})$  можно заменить краевыми условиями

$$y(-\infty, \lambda) = 0, \quad y(+\infty, \lambda) = 0. \quad (2)$$

Требуется исследовать асимптотику  $\lambda_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

1.2. Задача на полусоси  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ . Поставим краевое условие

$$ay(0, \lambda) + by'(0, \lambda) = 0, \quad (3)$$

где  $a, b$  — вещественные постоянные,  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Пусть  $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = q_+$ ,  $0 < q_+ \leq \infty$ . Тогда спектр задачи (1), (3) чисто дискретен и обладает теми же свойствами, что и для задачи (1), (2). Условие  $y \in L_2(\mathbb{R}^+)$  можно заменить краевым условием

$$y(+\infty, \lambda) = 0. \quad (4)$$

## 2. Задача на всей оси с двумя точками поворота.

2.1. Асимптотика собственных значений. Пусть функция  $q(x)$  имеет ровно два вещественных нуля  $x_1 < x_2$ , оба простые. Тогда  $q(x) < 0$  при  $x_1 < x < x_2$ ,  $q(x) > 0$  при  $x < x_1$ ,  $x > x_2$ . Пусть  $q(x)$  — полином степени  $n \geq 2$ . Асимптотику собственных значений в этом случае можно вычислить с помощью теоремы из § 2; не используя понятий канонических областей и матриц перехода.

При каждом фиксированном  $\lambda > 0$  уравнение (1) имеет единственное, с точностью до постоянного множителя, решение  $y_1(x, \lambda)$  ( $y_2(x, \lambda)$ ) такое, что  $y_1(-\infty, \lambda) = 0$ , ( $y_2(+\infty, \lambda) = 0$ ): Если  $\lambda$  — собственное значение, то  $y_2(x, \lambda) \equiv Cy_1(x, \lambda)$  в силу (2). Возьмем две различные точки  $z^-, z^+$ ; тогда получим уравнение для собственных значений

$$\frac{y_1(z^+, \lambda)}{y_2(z^+, \lambda)} \frac{y_2(z^-, \lambda)}{y_1(z^-, \lambda)} = 1. \quad (5)$$

Это уравнение — точное, т. е. пригодно при всех  $\lambda > 0$ .

1. Решение  $y_2$ . Так как  $q(x) > 0$  при  $x > x_2$ , то уравнение (1) имеет решение, для которого справедливо АР

$$y_2(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \exp \left\{ -\lambda S(x_2, x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda^{-k}) \int_{-\infty}^x \alpha_k(t) dt \right\} \quad (6)$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$  равномерно по  $x \geq x_2 + \delta$ ,  $\delta > 0$  — любое. Здесь  $\sqrt{q(x)}$ ,  $\sqrt[4]{q(x)} > 0$  при  $x > x_2$ . Выясним область применимости этого АР при  $z$ , комплексных и близких к  $x$ . Отрезок  $l_0 = [x_1, x_2]$  есть ЛС. Из точек поворота  $x_j$  выходят еще по две ЛС  $l_j$ ,  $l_j = l_j^*$ ,  $j = 1, 2$  (рис. 18);  $\text{Im } z > 0$  при  $z \in l_j$ ,  $z \neq x_j$ . Напомним обозначение:  $M^*$  — множество, симметричное с  $M$  относительно вещественной оси. Если  $\Pi$  — малая полоса вида  $|\text{Im } z| < \varepsilon$ , то АР (6)

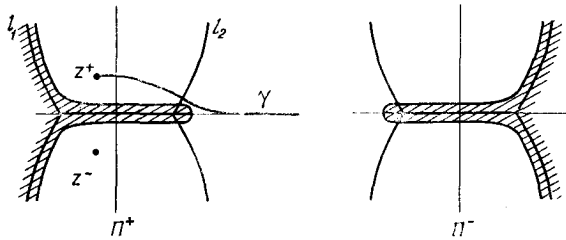


Рис. 18.

пригодно в области  $\Pi^+$ , полученной из  $\Pi$  удалением окрестностей ЛС  $l_0$ ,  $l_1$ ,  $l_2$ , и области, лежащей слева от  $l_1$ ,  $l_2$  (см. рис. 18). Для любой точки  $z \in \Pi^+$  существует бесконечный канонический путь  $\gamma \supset [x_2 + \delta, +\infty)$  (см. рис. 18). Возьмем в качестве  $z^+$  точку, лежащую близко к  $l_0$  и над  $l_0$  (например,  $z^+ = (x_1 + x_2)/2 + i\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ ), и положим  $z^- = \bar{z}^+$ .

II. Р е ш е н и е  $y_1$ . Уравнение (1) имеет решение, для которого справедливо АР

$$y_1(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \exp \left\{ \lambda S(x_1, x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \int_{-\infty}^x \alpha_k(t) dt \right\} \quad (7)$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$  равномерно по  $x \leq x_1 - \delta$ ,  $\delta > 0$  — любое. Здесь  $\sqrt{q(x)}$ ,  $\sqrt[4]{q(x)} > 0$  при  $x < x_1$ . Область применимости АР в (7) вблизи оси  $x$  есть  $\Pi^-$  (см. рис. 18); в частности, оно пригодно в точках  $z^\pm$ .

Подставив (6), (7) в (5), получим уравнение для собственных значений. При этом следует тщательно учитывать выбор ветвей всех многозначных функций. Пусть  $U$  — малая односвязная комплексная окрестность отрезка  $l_0$ . Тогда в области  $V = U \setminus l_0$  каждая из функций  $\sqrt{q(z)}$ ,  $\alpha_k(z)$  распадается на две однозначные голоморфные ветви. Обозначим  $(\sqrt{q(z)})_j$  ветвь, входящую в АР решения  $y_j$ , и заменим для удобства  $q^{-1/4}(z)$  на

$$\exp \left\{ -\frac{1}{4} \int_{z_1}^z \frac{q'(t)}{q(t)} dt \right\},$$

где  $z_1 = x_1 - \delta$ ,  $z_2 = x_2 + \delta$ ,  $\delta > 0$ .

Ветви  $(\sqrt{q(z)})_1, (\sqrt{q(z)})_2$  выбраны так, что  $(\sqrt{q(x)})_1 > 0$  при  $x < x_1$ ,  $(\sqrt{q(x)})_2 > 0$  при  $x > x_2$ . Поэтому  $(\sqrt{q(x)})_2 < 0$  при  $x < x_1$ ,  $(\sqrt{q(x)})_2 = i|\sqrt{q(x)}|$  на верхнем берегу разреза и  $(\sqrt{q(z)})_1 = -(\sqrt{q(z)})_2, (\alpha_k(z))_1 = (-1)^k (\alpha_k(z))_2, z \in V$ .

Пусть  $C$  — простой замкнутый контур, охватывающий отрезок  $l_0$  и ориентированный против часовой стрелки (рис. 19). Подставив AP (6), (7) в уравнение (5), получим уравнение вида

$$\exp \left\{ \sum_{k=-1}^{\infty} d_k \lambda^{-k} \right\} = 1.$$

Имеем (интегралы берутся по путям, лежащим в  $V$ )

$$\begin{aligned} d_{-1} &= S_1(x_1, z^+) + S_2(x_2, z^+) - \\ &- S_2(x_2, z^-) - S_1(x_1, z^-) = \\ &= [-S_2(x_1, z^+) + S_2(x_2, z^+)] + \\ &+ [S_2(x_1, z^-) - S_2(x_2, z^-)]. \end{aligned}$$

Первое выражение в квадратных скобках равно интегралу  $S_2(x_2, x_1)$ , взятому по верхнему берегу разреза  $l_0$ , так что оно равно  $i\xi_0$ , где

$$\xi_0 = \int_{x_1}^{x_2} |\sqrt{q(x)}| dx. \tag{8}$$

Второе слагаемое также равно  $i\xi_0$ , и потому  $d_{-1} = 2i\xi_0$ , или

$$d_{-1} = \oint_C \sqrt{q(z)} dz.$$

Здесь и ниже  $\sqrt{q(z)} = (\sqrt{q(z)})_2$ , т. е.

$$\sqrt{q(z)} > 0, x \in C, x > x_2. \tag{9}$$

Далее,

$$d_0 = -\frac{1}{4} \oint_C \frac{q'(z)}{q(z)} dz = -\pi i,$$

$$\begin{aligned} d_k &= \left[ \int_{-\infty}^{z^+} (\alpha_k(z))_1 dz - (-1)^k \int_{+\infty}^{z^+} (\alpha_k(z))_2 dz \right] + \\ &+ \left[ \int_{+\infty}^{z^-} (-1)^k (\alpha_k'(z))_1 dz - \int_{-\infty}^{z^-} (\alpha_k(z))_1 dz \right] = (-1)^k \oint_C \alpha_k(z) dz, \end{aligned}$$

где ветвь  $\sqrt{q(z)}$  выбрана в соответствии с (9). Окончательно получаем уравнение для собственных значений

$$\exp \left\{ 2i\lambda\xi_0 - i\pi + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \oint_C \alpha_k(z) dz \right\} = 1,$$

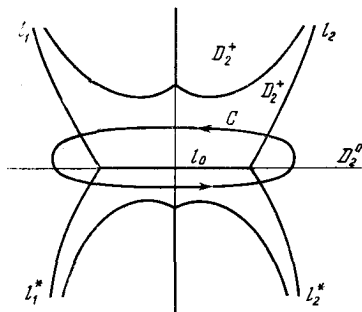


Рис. 19.

левая часть которого — асимптотический ряд. Все числа  $d_k$  — чисто мнимые. Следовательно, справедливо AP

$$\lambda_n \xi_0 = n\pi + \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \lambda_n^{-k}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (10)$$

где  $n > 0$  — целое,

$$\beta_k = \frac{i}{2} (-1)^k \oint_C \alpha_k(z) dz.$$

Применяя формулу Бюрмана — Лагранжа, получаем AP  $\lambda_n$  по степеням  $n^{-1}$  при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{\xi_0} + \frac{\pi}{2\xi_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (\pi n)^{-k},$$

$$\gamma_k = \frac{1}{k!} \left( \frac{d}{d\mu} \right)^{k-1} [f(\mu)]^k \Big|_{\mu=0}, \quad (11)$$

$$f(\mu) = \xi_0 - \frac{\pi\mu}{2} - \mu \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \mu^k.$$

Несмотря на то, что ряд  $f(\mu)$ , вообще говоря, расходится, при формальной подстановке  $\mu = 0$  для  $\gamma_k$  получаются конечные выражения. Из (11) следует, что

$$\lambda_n = \left( \int_{x_1}^{x_2} |Vq(x)| dx \right)^{-1} \left( n\pi + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{i}{64\pi n} \oint_C q'(z) q^{-5/2}(z) dz + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Из проведенных выше рассуждений следует, что AP (10), (11) справедливы при следующих предположениях относительно  $q(x)$ :

1)  $q(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x) = q_{\pm} > 0$ ;

2) интегралы  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha_k(x)| dx$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha_k(x)| dx$  сходятся при всех  $k = 1, 2, \dots$ ;

3) функция  $q(z)$  голоморфна в комплексной окрестности отрезка  $[x_1, x_2]$ .

Если указанные в условии 2) интегралы сходятся при  $k = 1, 2, \dots, N$ , то справедливо AP вида (10) с остаточным членом  $O(\lambda_n^{-N})$ .

Приведем некоторые замечания.

1. Требование аналитичности функции  $q(z)$  (условие 3)) — лишнее: AP (10), (11) имеют место при условиях 1), 2). В этом

случае

$$\beta_k = i(-1)^{k+1} \int_{x_1}^{x_2} \alpha_k t dt,$$

где  $\sqrt{q(x)} = i|\sqrt{q(x)}|$  и интегралы  $\beta_k$  подходящим образом регуляризованы.

2. Функции  $\alpha_{2k}(z)$  голоморфны в области  $U$ , за исключением полюсов в точках  $x_1, x_2$ , и  $\beta_{2k}$  — рациональные функции от значений производных функции  $q(z)$  в точках  $x_1, x_2$ . Если  $q(z)$  — полином, то  $\beta_{2k}$  — алгебраические функции от его коэффициентов.

3. Если  $q(z)$  — полином, то функция  $S = \int \sqrt{qz} dz$  является абелевым интегралом (эллиптическим при  $n=3, 4$  и гиперэллиптическим при  $n \geq 5$ ), который очевидным образом ассоциирован с уравнением (1). Число

$$d_{-1} = \oint_C \sqrt{q(z)} dz$$

есть чисто мнимый период абелева интеграла  $S$ . Из (11) следует, что главный член асимптотики выражается через этот период:  $\lambda_n \sim n\pi i/d_{-1}$ . Если  $q(x)$  имеет несколько (любое конечное число) точек поворота, то главный член асимптотики  $\lambda_n$  также выражается через чисто мнимые периоды интеграла  $S$ .

2.2. Гармонический осциллятор. Рассмотрим уравнение

$$y'' - \lambda^2(x^2 - a^2)y = 0, \quad a > 0.$$

Как известно, собственные значения определяются из соотношения

$$\lambda_n \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Приведенный в п. 2.1 метод позволяет точно вычислить все  $\lambda_n$ . В данном случае  $x_1 = -a, x_2 = a$  и никаких ЛС, кроме  $l_j, l'_j, j = 0, 1, 2$ , нет. Пусть  $D_2$  — область, ограниченная ЛС  $l_1, l_0, l'_2$ , и  $S_2 = \int_a^z \sqrt{q(t)} dt, \sqrt{q(x)} > 0$  при  $x > a$ . Тогда  $S_2(D_2)$  есть комплексная плоскость  $S$  с разрезом по полуоси  $(-i\infty, 0)$ . Имеем

$$y_1(z, \lambda) = q^{-1/4}(z) e^{-\lambda S_2} [1 + \varepsilon_1(z, \lambda)],$$

где  $\varepsilon_1(z, \lambda) \rightarrow 0$  при  $z \in D_2, z \rightarrow \infty, |\operatorname{Re} S_2| \rightarrow \infty$  равномерно по  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$  (§ 3, п. 2). Пусть  $D_1$  — область, ограниченная

ЛС  $l_0, l_2, l'_1$ , и  $S_1 = \int_{-a}^z \sqrt{q(t)} dt, \sqrt{q(x)} > 0$  при  $x < -a$ . Тогда

$$S_1(D_1) = S_2(D_2), \quad y_2(z, \lambda) = q^{-1/4}(z) e^{\lambda S_1} [1 + \varepsilon_2(z, \lambda)],$$

где  $\varepsilon_2(z, \lambda) \rightarrow 0$  при  $z \in D_1$ ,  $z \rightarrow \infty$ ,  $|\operatorname{Re} S_1| \rightarrow \infty$  равномерно по  $\lambda > \lambda_0 > 0$ . Если  $\lambda$  — собственное значение, то  $y_1(z, \lambda) \equiv \equiv C y_2(z, \lambda)$ . Пусть  $z$  лежит в области  $D$ , ограниченной ЛС  $l_0, l_1, l_2$ ; тогда

$$1 + \varepsilon_1(z, \lambda) = C e^{i\lambda \xi_0} (1 + \varepsilon_2(z, \lambda)).$$

Устремляя  $z$  к бесконечности в области  $D$  (например,  $z = iy$ ,  $y \rightarrow +\infty$ ), получаем  $1 = C e^{i\lambda \xi_0}$ . Взяв области  $D_j^*$  вместо  $D_j$  и  $D^*$  вместо  $D$ , получим  $1 = C e^{-i\lambda \xi_0}$ . Исключая  $C$ , получаем уравнение для собственных значений  $e^{2i\lambda \xi_0} = 1$ , откуда следует (12).

2.3. Правило квантования Бора — Зоммерфельда. Рассмотрим задачу на собственные значения для уравнения Шрёдингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + (U(x) - E)\psi = 0 \quad (13)$$

с вещественным потенциалом  $U(x)$ . Здесь  $E$  — спектральный параметр (вещественный),  $\hbar > 0$  — малый параметр.

Пусть потенциал  $U(x)$  имеет вид «потенциальной ямы», т. е.  $U(x)$  имеет ровно одну точку минимума  $x_0$  и  $U'(x) > 0$  ( $U'(x) < 0$ ) при  $x > x_0$  ( $x < x_0$ ). Пусть  $U(x_0) = 0$ . Тогда существуют конечные или бесконечные пределы  $U_{\pm} = U(\pm\infty) > 0$ . Положим  $J = [E_1^0, E_2^0]$ , где  $0 < E_1^0 < E_2^0 < \min(U_+, U_-)$ . При каждом  $E \in J$  уравнение (13) имеет ровно две, и притом простые, точки поворота  $x_1(E) < x_2(E)$ .

Пусть  $q = 2m(U(x) - E)$  удовлетворяет при  $E \in J$  условиям типа 2), 3) п. 2.1: функция  $U(z)$  голоморфна в окрестности отрезка

$I = [x_1(E_2^0), x_2(E_2^0)]$ , и интегралы  $\int_a^{\infty} |\alpha_k(x)| dx$ ,  $\int_b^{+\infty} |\alpha_k(x)| dx$

сходятся при  $a < x_1(E_2)$ ,  $b > x_2(E_2)$ . Здесь  $\alpha_k(x, E)$  вычисляются по функции  $q = 2m(U(x) - E)$ . Те же рассуждения, что и в п. 2.1, приводят к АР

$$\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \sqrt{2m(E - U(x))} dx = h \left( n\pi + \frac{\pi}{2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(E) h^{k+1}, \quad (14)$$

$$\beta_k(E)_i = \frac{i}{2} (-1)^k \oint_C \alpha_k(z, E) dz.$$

Это соотношение — уравнение относительно  $E$ , из которого можно найти асимптотику собственных значений  $E_n(h)$  при следующих условиях:

$$h \rightarrow 0, \quad E_1^0 \leq E \leq E_2^0, \quad f(E_1^0) < \left( n + \frac{1}{2} \right) h < f(E_2^0).$$

Главный член асимптотики определяется из уравнения

$$f(E) \equiv \int_{U(x) < E} \sqrt{2m(E - U(x))} dx = n \left( \pi + \frac{1}{2} \right) h. \quad (15)$$

Формула (15) называется *правилом квантования Бора — Зоммерфельда*.

Функция  $f(E)$  обладает следующими свойствами:

1. Если  $U(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$ , то  $f(E) \in C^\infty(E_1^0, E_2^0)$ ,  $0 < E_1^0 < E_2^0$ , и строго монотонно возрастает. Если  $x_0$  — невырожденная точка минимума ( $U''(x_0) > 0$ ), то  $f(E) \in C^\infty[0, E_2^0]$ .

Последнее утверждение неверно, если  $U''(x_0) = 0$ . Например,  $U(x) = x^4$ ,  $f(E) = \text{const} \cdot E^{3/4}$ .

2. Если функция  $U(z)$  голоморфна в комплексной окрестности отрезка  $I = [x_1(E_2^0), x_2(E_2^0)]$ , то функция  $f(E)$  голоморфна в комплексной окрестности отрезка  $J = [E_1^0, E_2^0]$ ,  $E_1^0 > 0$ . Если, кроме того,  $U''(x_0) > 0$ , то это верно при  $E_1^0 = 0$ .

Это свойство функции  $f(E)$  следует из формулы

$$f(E) = \oint_C \sqrt{2m(E - U(z))} dz.$$

Приведем некоторые замечания.

1. Пусть  $0 < E_1^0 \leq E \leq E_2^0$ ,  $h \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , так что  $nh \rightarrow \text{const}$ . Тогда главный член асимптотики  $E_n(h)$  равен

$$E_n^0(h) = f^{-1}(h(n + 1/2)).$$

При этих условиях справедливо AP

$$E_n(h) = E_n^0(h) + c_1 h^2 + c_2 h^4 + \dots$$

Коэффициенты  $c_n$  могут быть вычислены методами теории возмущений.

2. Если  $U''(x_0) > 0$ , то AP (14) справедливо и в том случае, когда  $0 \leq E \leq E_2^0$ . Это следует из того, что при  $E \approx 0$  уравнение (13) не имеет точек поворота, близких к вещественной оси и отличных от  $x_1(E)$ ,  $x_2(E)$ . Поэтому из AP (14) можно получить асимптотику низших уровней энергии  $E_n(h)$ . Пусть  $h \rightarrow 0$ ,  $0 \leq n \leq n_0$ , где  $n_0$  фиксировано; тогда

$$E_n(h) = \pi(n + 1/2) U''(x_0) h + O(h^2).$$

3. При фиксированном  $E$ ,  $0 < E_1^0 \leq E \leq E_2^0$ , функции  $\alpha_{2k}(z, E)$  голоморфны в комплексной окрестности отрезка  $[x_1(E), x_2(E)]$ , за исключением полюсов в точках  $x_1(E)$ ,  $x_2(E)$ , и  $\beta_{2k}$  — рациональные функции от производных функции  $U(x)$  в этих точках. Если  $U(x)$  — полином, то  $\beta_{2k}$  — алгебраические функции от  $E$  и коэффициентов полинома  $U(z)$ .

2.4. Асимптотика собственных функций. Пусть функция  $q(z)$  удовлетворяет условиям 1) — 3) п. 2.1,  $U_\varepsilon$  — комплексная  $\varepsilon$ -окрестность отрезка  $[x_1, x_2]$ , функция  $q(z)$  голоморфна в области  $U_\varepsilon$ . Обозначим  $U$  объединение области  $U_\varepsilon \setminus U_{\varepsilon_0}$ ,  $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$ , и полюсей  $x \leq x_1 - \varepsilon$ ,  $x \geq x_2 + \varepsilon$ . АР собственной функции  $y_n(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на полюсах  $x \geq x_2 + \varepsilon_0$  дается формулой (6), где  $\lambda = \lambda_n$ , и является равномерным по  $x$ . Все функции, входящие в АР, — многозначные функции  $z$  при  $z \in U$ . Тем не менее, как показано в п. 2.1, АР (6) для  $y_n(z) = y(z, \lambda_n)$  справедливо всюду в области  $U$ , т. е. при  $\lambda = \lambda_n$  правая часть формулы (6) — однозначная функция при  $z \in U$ . АР функции  $y_n(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на полюсах  $x \leq x_1 - \varepsilon_0$  мы получим, аналитически продолжив АР (6) с полюса  $x \geq x_2 + \varepsilon_0$ . Для главного члена асимптотики этот факт был доказан Г. Биркгофом [68].

Выберем ветви  $\sqrt[4]{q(x)}$ ,  $\sqrt[4]{q(x)}$  положительными при  $x < x_1$ ; тогда

$$y_n(x) = c_n q^{-1/4}(x) \exp \left\{ \lambda_n S(x_1, x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n^{-k} \int_{-\infty}^x \alpha_k(t) dt \right\}, \quad (16)$$

$$c_n = -i \exp \left\{ -i \lambda_n \xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n^{-k} \int_{C_+} \alpha_k(t) dt \right\}$$

при  $n \rightarrow \infty$ ,  $x \leq x_1 - \varepsilon_0$ . Здесь  $C_+$  — контур, состоящий из полюсей  $(-\infty, x_1 - \varepsilon_0)$ ,  $(x_2 + \varepsilon_0, +\infty)$  и части контура  $C$ , соединяющей точки  $x_1 - \varepsilon_0$ ,  $x_2 + \varepsilon_0$  и лежащей в верхней полуплоскости. Эти АР можно дифференцировать по  $x$  любое число раз. Заметим, что постоянная  $c_n$  вещественна, так как функция  $y_n(x)$  вещественна, и  $c_n = (-1)^n [1 + O(n^{-1})]$ .

Найдем АР  $y_n(x)$  на отрезке  $I = [x_1 + \varepsilon_0, x_2 - \varepsilon_0]$ . Если аналитически продолжить правую часть формулы (6) с полюса  $(x_2, +\infty)$  в точку  $x$ , лежащую на верхнем (нижнем) берегу разреза  $I$ , то мы получим значение  $y_2^+(x, \lambda_n)$  ( $y_2^-(x, \lambda_n)$ ) и искомого АР есть их полусумма (§ 3, п. 1.2). Так как  $y_2^-(x, \lambda_n) = \overline{y_2^+(x, \lambda_n)}$ , то

$$y_n(x) = |q(x)|^{-1/4} \operatorname{Re} \left( \exp \left\{ i \lambda \int_{x_2}^x |\sqrt{q(t)}| dt + i \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda_n)^{-k} \int_{+\infty}^x \alpha_k(t) dt \right\} \right). \quad (17)$$

Ветвь  $\sqrt[4]{q(x)}$  выбрана так, что  $\sqrt[4]{q(x)} > 0$  при  $x > x_2$ , контур интегрирования обходит точку  $x_2$  сверху. Главный член асимпто-



тики равен

$$y_n(x) = |q(x)|^{-1/4} \left[ \cos \left( \left( n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \xi_0^{-1} \int_{x_2}^x |\sqrt{q(t)}| dt + \frac{\pi}{4} \right) \right] + O(n^{-1}),$$

так что  $y_n(x)$  сильно осциллирует на отрезке  $[x_1, x_2]$ .

Асимптотические формулы для собственных функций вида (6), (16), (17) справедливы и для уравнения (13). Главные члены АР имеют вид

$$y_n(x) = (U(x) - E_n)^{-1/4} \exp \left\{ -h^{-1} \int_{x_2(E)}^x \sqrt{U(t) - E_n} dt \right\}, \quad x > x_2(E),$$

$$y_n(x) = (E_n - U(x))^{-1/4} \cos \left( h^{-1} \int_{x_2(E)}^x \sqrt{-U(t) + E_n} dt + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$x_1(E) < x < x_2(E),$$

$$y_n(x) = (U(x) - E_n)^{-1/4} \exp \left\{ h^{-1} \int_{x_1(E)}^x \sqrt{U(x) - E_n} dt \right\} (-1)^n, \quad x < x_1(E).$$

Все корни в этих формулах положительны.

2.5. Применение матриц перехода. Пусть  $q(z)$  — полином, удовлетворяющий условиям п. 2.1. Получим формулу (10) для собственных значений, используя АР матриц перехода (§ 3). Этот метод может показаться в данном случае более сложным, чем приведенный в п. 2.1. Однако он более универсален и применим, в частности, в случае, когда уравнение (1) имеет любое конечное число вещественных точек поворота.

Из § 3, пп. 3, 5, 6, следует существование области  $D_2^0$  такой, что функция  $S(x_2, z)$  однолистка в  $D_2^0$ ,

$$D_2^0 \supset (x_2, +\infty), \quad \partial D_2^0 \supset l_1 \cup l_1', \quad (D_2^0)^* = D_2^0$$

и  $S(D_2^0)$  — полуплоскость  $\operatorname{Re} S > 0$  с конечным числом вертикальных разрезов. На рис. 19  $D_2^0$  есть объединение областей  $D_1, D_2$  и ЛС 1. Если  $q(z)$  — целая функция, удовлетворяющая условию 1) (§ 1, п. 2), то  $S(D_2^0)$  может содержать бесконечно много вертикальных разрезов.

Каноническую область  $D_2 \supset (x_2, +\infty)$  выберем так, чтобы  $D_2 \supset D_2^0$ ,  $D_2 = D_2^*$ . Тогда  $\partial D_2 \supset l_1 \cup l_0 \cup l_1'$  (см. рис. 19). Пусть  $D_2^\pm = D_2 \setminus [D_2^0] \cap \{\pm \operatorname{Im} z \geq 0\}$ ; тогда области  $D_2^+, D_2^-$  не пересекаются, лежат соответственно в верхней и нижней полуплоскостях и  $(D_2^+)^* = D_2^-$ .

Аналогично строится область  $D_1^0 \supset (-\infty, x_1)$ . Положим

$$D_1 = D_1^0 \cup l_1 \cup l_2^* \cup D_2^+ \cup D_2^-;$$

тогда  $D_1^* = D_1$  и  $D_1 \setminus D_2 = D_2^+ \cup D_2^-$ . Введем еще каноническую область

$$D_0 = D_2^+ \cup l_0 \cup D_2^- = D_4$$

и элементарные ФСР  $(u_j, v_j)$ , отвечающие тройкам  $(l_j, x_j, D_j)$ ,  $x_4 = x_1$ . Пусть  $y_2(x, \lambda)$  — решение, имеющее АР (6). Тогда  $y_2(z, \lambda) \equiv e^{-i\pi/12} v_2(z, \lambda)$ . Выразим  $y_2$  через ФСР  $(u_1, v_1)$ , т. е. продолжим его асимптотику с ЛС  $l_2$  на ЛС  $l_1$ . Имеем  $y_1 = e^{-i\pi/12} (au_1 + bv_1)$ , где

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \Omega_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \Omega_{41} \Omega_{04} \Omega_{20} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и  $\Omega_{jk}$  — матрица перехода от  $j$ -й системы к  $k$ -й. Решение  $u_1(x, \lambda)$  ( $v_1(x, \lambda)$ ) экспоненциально растет (убывает) при  $x \rightarrow -\infty$ , и если  $\lambda$  — собственное значение, то  $b(\lambda) = 0$ . Это и есть уравнение для собственных значений.

Вычислим  $b(\lambda)$ , используя АР матриц перехода. Введем еще две элементарные ФСР  $(u_{j'}, v_{j'})$ ,  $j = 1, 2$ , отвечающие  $(l_{j'}, x_j, D_{j'})$ , где  $D_{j'} = D_j$ . Тогда ФСР, отвечающие ЛС, выходящим из точки поворота  $x_1$ , согласованы (§ 3, п. 3.4) и аналогично для  $x_2$ .

Имеем (§ 3, пп. 3.1, 3.4)

$$\begin{aligned} \Omega_{20} &= e^{-i\pi/6} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha_{20}} \\ 1 & i\alpha_{02'} \end{bmatrix}, \\ \Omega_{41} &= e^{-i\pi/6} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha_{41}} \\ 1 & i\alpha_{11'} \end{bmatrix}, \\ \Omega_{04} &= \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\lambda\xi_0} \\ e^{i\lambda\xi_0} & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \Omega_{21} &= e^{-i\pi/3} \begin{bmatrix} 0 & -\beta^{-1}\alpha_{02'}\alpha_{41}^{-1} \\ \beta^{-1} & i(\beta^{-1}\alpha_{02'} + \beta\alpha_{11'}\alpha_{20}^{-1}) \end{bmatrix}. \\ \beta &= e^{i\lambda\xi_0}. \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая тождество  $\alpha_{02'}\alpha_{2'2}\alpha_{20} = 1$ , получаем уравнение для собственных значений

$$e^{2i\lambda\xi_0}\alpha_{2'2}\alpha_{11'} = 1.$$

Так как (§ 3)

$$\alpha_{jk} = \int_{l_{jk}} \alpha_k(z) dz,$$

где контуры  $l_{11'}$ ,  $l_{2'2}$  указаны на рис. 15 (они уходят обоими концами на бесконечность соответственно в областях  $D_1, D_2$ ), то

справедливо AP

$$(\alpha_{11}\alpha_{22})^{-1} = \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \oint_C \alpha_k(z) dz \right\},$$

где ветвь  $\sqrt{q(z)}$  выбрана в соответствии с (9). Для собственных значений снова получаем уравнение (10).

### 3. Задача на всей оси со многими точками поворота.

#### 3.1. П р и м е р. Пусть

$$q(x) = \prod_{j=1}^{2n} (x - x_j), \quad x_1 < x_2 < \dots < x_{2n}.$$

Уравнение (1) имеет  $2n$  простых вещественных точек поворота  $x_j$  и  $n$  конечных ЛС  $l_j = [x_{2j-1}, x_{2j}]$ , лежащих на вещественной оси. Из точки поворота  $x_j$  выходят еще две бесконечные ЛС  $l_j, l_j^*$ , где  $l_j$  лежит в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ . ЛС разбивают комплексную плоскость  $z$  на  $2n + 2$  областей типа полуплоскости и  $n - 1$  областей типа полосы.

Области типа полуплоскости: а)  $D^-, \partial D^- = l_1 \cup l_1^*$ ; б)  $D_j, \partial D_j \supset l_{2j-1} \cup l_j \cup l_{2j}$ ,  $1 \leq j \leq n$ ; в)  $D^+, \partial D^+ = l_{2n} \cup l_{2n}^*$ ; г)  $D_j^*, 1 \leq j \leq n$ .

Области типа полосы:  $G_j, \partial G_j = l_{2j} \cup l_{2j}^* \cup l_{2j+1} \cup l_{2j+1}^*$ . (Случай  $n = 2$  см. на рис. 3. В частности,  $D^+$  содержит полуось  $x > x_{2n}$ ,  $D^-$  — полуось  $x < x_1$ .)

Уравнение (1) имеет решение  $y_2(x, \lambda)$  (см. (6)), свойства которого приведены в п. 2.4. Продолжим асимптотику этого решения на полуось  $x < x_1$ . Введем канонические области

$$D_1 = D^- \cup l_1 \cup l_1^* \cup D_1 \cup D_1^*, \\ D_{2n} = D^+ \cup l_{2n} \cup l_{2n}^* \cup D_n \cup D_n^*,$$

так что  $D_1 \supset (-\infty, x_1)$ ,  $D_{2n} \supset (x_{2n} + \infty)$ , и эти области симметричны относительно вещественной оси. Положим

$$D_{2n-1} = D_n \cup l_n \cup D_n^* = D_{2n-1}^*$$

и точно так же построим канонические области  $D_{2n-3}, \dots, D_3$ . Далее, пусть

$$D_{2n-3} = D_n \cup G_{n-1} \cup D_{n-1} \cup l_{2n-1} \cup l_{2n-2}.$$

Введем элементарные ФСР  $(u_j, v_j)$ , отвечающие тройкам  $(l_j, x_j, D_j)$ ,  $(u_j^*, v_j^*)$  — тройкам  $(l_j^*, x_j, D_j^*)$  и  $(\tilde{u}_j, \tilde{v}_j)$  — тройкам  $(x_{2j}, l_j, D_{2j-1})$ . Имеем (п. 2.5)

$$y_2(z, \lambda) = e^{-i\pi/12} v_{2n}(z, \lambda) = e^{-i\pi/12} (au_1 + bv_1).$$

Собственные значения определяются из уравнения  $b(\lambda) = 0$ .

Имеем

$$\Omega_{2n, 1} = \Omega_{21} \cdot \dots \cdot \Omega_{2n-1, 2n-2} \Omega_{2n, 2n-1}.$$

Матрицы  $\Omega_{2j, 2j-1}$  имеют вид (18), где

$$\xi \rightarrow \xi_j = \int_{x_{2j-1}}^{x_{2j}} |Vq(x)| dx, \quad \Omega_{2j-1, 2j-2} = e^{-i\pi/2 + \lambda \eta_j} \begin{bmatrix} e^{-2\lambda \eta_j} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\eta_j = \int_{x_{2j-1}}^{x_{2j}} Vq(x) dx > 0$$

(см. § 3, (15)). Поэтому

$$b(\lambda) = c(\lambda) [(\Omega_{2n, 2n-1})_{22} (\Omega_{2n-2, 2n-3})_{22} \dots (\Omega_{21})_{22} + O(e^{-2\lambda \eta_0})],$$

$$\lambda \rightarrow +\infty,$$

$$\eta_0 = \min_{1 \leq j \leq n-1} \eta_j,$$

где  $c(\lambda) \neq 0$ . Используя (18) и ограничиваясь главными членами, получаем для собственных значений уравнение

$$\prod_{j=1}^n [\cos(2\lambda \xi_j) + O(\lambda^{-1})] = O(e^{-2\lambda \eta_0}).$$

Поэтому имеется  $n$  серий  $\{\lambda_n^{(k)}\}$  собственных значений

$$\lambda_n^{(k)} = (n + 1/2) \pi \xi_k^{-1} + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (19)$$

где  $k = 1, 2, \dots, n$ . Для каждой из серий справедливо АР вида (5), где  $C = C_j$  — это замкнутый контур, охватывающий отрезок  $[x_{2j-1}, x_{2j}]$ . Среди этих серий могут оказаться такие, которые имеют одинаковые АР.

3.2. О б щ и й с л у ч а й. Пусть полином  $q(x)$  имеет вещественные нули  $x_1 < x_2 < \dots < x_{2n}$  и все они простые. Тогда справедлива формула (19). Метод доказательства тот же, что и в п. 3.1; различие проявляется лишь в выборе канонических областей. Именно, в качестве  $D^-$  берется область, описанная в § 3, п. 3.5, № 6, и аналогично выбирается  $D^+$ . В качестве  $G_j$  выбирается не область типа полосы, а область, граница которой содержит ЛС  $l_{2j}, l_{2j}^*, l_{2j+1}, l_{2j+1}^*$  и которая отображается на полосу  $a < \operatorname{Re} S < b$  с конечным числом вертикальных разрезов (§ 3, п. 3.5, № 8). Области  $D_j$  типа полуплоскости — такие, что  $\partial D_j \supset l_j$ , строятся так же, как и в п. 2.5.

АР (19) справедливы и в том случае, когда функция  $q(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$  голоморфна в комплексной окрестности отрезка  $[x_1, x_{2n}]$  и сходятся интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha_k(t)| dt, \quad \int |\alpha_k(t)| dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(см. п. 2.1). Приведенные в п. 2.1 замечания остаются в силе.

4.  $q(x)$  — четная функция. В этом случае всякая собственная функция либо четная, либо нечетная. Пусть  $q(x)$  имеет ровно четыре вещественные точки поворота  $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$ , все простые ( $x_1 = -x_4$ ,  $x_2 = -x_3$ ), и  $q(x)$  — полином, для простоты. Тогда спектр состоит из двух серий собственных значений  $\{\lambda_n^+\}$ ,  $\{\lambda_n^-\}$ . Их АР по степеням  $n^{-1}$  полностью совпадают и имеют вид (11), где контур  $C$  охватывает отрезок  $[x_3, x_4]$ , так что

$$\lambda_n^+ - \lambda_n^- = O(n^{-\infty}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Оказывается, что разность  $\lambda_n^+ - \lambda_n^-$  экспоненциально мала при  $n \rightarrow \infty$  — происходит экспоненциально малое расщепление спектра. Обозначим

$$\xi_0 = \int_{x_1}^{x_2} |\sqrt{q(x)}| dx, \quad \eta_0 = \int_{x_2}^{x_3} \sqrt{q(x)} dx > 0.$$

Главный член асимптотики спектра равен

$$\lambda_n^\pm = (n + 1/2) \pi \xi_0^{-1} + O(n^{-1}).$$

Справедлива формула Ландау — Лифшица

$$|\lambda_n^+ - \lambda_n^-| = \xi_0^{-1} \exp\{-\eta_0 \lambda_n^\pm\} [1 + O(n^{-1})]. \quad (20)$$

Доказательство этой формулы получено в [55] и основано на следующем факте. Если  $q(z)$  — четная функция, то точки поворота и ЛС расположены симметрично относительно начала координат. Пусть  $(u(z), v(z))$  — элементарная ФСР, отвечающая тройке  $(l, z_0, D)$ . Тогда  $(u(-z), v(-z))$  — элементарная ФСР, отвечающая тройке  $(-l, -z_0, -D)$ . Рассмотрим пример:  $q(x) = (x - x_1) \times (x - x_2) (x - x_3) (x - x_4)$ ; доказательство формулы (20) в общем случае отличается незначительными техническими деталями. ЛС изображены на рис. 3. Пусть  $y_2(x, \lambda)$  — решение вида (6), канонические области  $D_4 \supset l_4, D_0 \supset l_0$  выбраны так же, как и в п. 2, 5, а каноническую область  $D_3 \supset l_3$  возьмем в виде  $D_3 = D_0^+ \cup \cup l_3 \cup l_2 \cup (-D_0^+) \cup G$ , где  $G$  — область, ограниченная ЛС  $l_2, l_2', l_3, l_3'$ . Тогда  $D_3 = -D_3$ .

Продолжим АР решения  $y_2$  с ЛС  $l_4$  не на ЛС  $l_1$ , а на ЛС  $l_1'$ . Выберем элементарные ФСР  $(u_j(z), v_j(z))$ , отвечающие тройкам  $(l_j, x_j, D_j)$ ,  $j = 4, 3, 2', 1'$  ( $x_{j'} = x_j$ ). Тогда

$$\Omega_{1'} = \Omega_{2'1'} \Omega_{32'} \Omega_{43}.$$

Имеем  $(u_{j'}(z), v_{j'}(z)) = (u_k(-z), v_k(-z))$ , если  $j = 1, k = 4$ ;  $j = 2, k = 3$ . Поэтому

$$\Omega_{2'1'} = \Omega_{43}^{-1}.$$

Имеем

$$\Omega_{43} = e^{-i\pi/3} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix}, \quad \Omega_{32'} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\lambda \eta_0} \\ e^{\lambda \eta_0} & 0 \end{bmatrix},$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  имеют вид, аналогичный (18). Так как  $y_2(x, \lambda) = e^{-i\pi/12} v_1(x, \lambda)$  и решение  $u_1(x, \lambda)$  экспоненциально растет при  $x \rightarrow -\infty$ , то собственные значения определяются из уравнения  $(\Omega_{41'})_{12} = 0$ , которое приводится к виду  $c^2 = a^2 e^{-2\lambda\eta_0}$ . Следовательно,

$$c(\lambda) = \pm a(\lambda) e^{-\lambda\eta_0}. \quad (21)$$

Серию корней, отвечающую знаку плюс (минус), обозначим  $\lambda_n^+$  ( $\lambda_n^-$ ). Так как

$$a(\lambda_n^\pm) = i(-1)^{n+1} [1 + O(n^{-1})], \quad c'(\lambda_n^\pm) = 2i\lambda_n^\pm (-1)^{n+1},$$

то из (21) следует (20).

Случай, когда  $q(x)$  четно и имеет восемь вещественных нулей, исследован в [55].

5. Задача на полуоси. Рассмотрим задачу на собственные значения на полуоси  $x > 0$  для уравнения (1) с краевыми условиями

$$y(0, \lambda) = 0, \quad y(+\infty, \lambda) = 0.$$

Ограничимся простейшим случаем:  $q(x)$  — полином, имеющий при  $x \geq 0$  ровно одну, и притом простую, точку поворота  $x_0 > 0$ . Как и в п. 2.4, собственная функция  $y(x, \lambda) = \text{const} \cdot y_2(x, \lambda)$ , а собственные значения определяются из уравнения  $y_2(0, \lambda) = 0$ . Пусть  $x_1$  фиксировано,  $0 < x_1 < x_0$ ; тогда при  $0 \leq x \leq x_1$  асимптотика решения  $y_2$  имеет вид (17), где  $x_2$  следует заменить на  $x_0$ . Поэтому справедливо AP, аналогичное (10):

$$\lambda_n \xi_0 = n\pi + \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \lambda_n^{-k}, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\xi_0 = \int_0^{x_0} |\sqrt{q(x)}| dx, \quad \beta_k = \frac{i}{2} (-1)^k \oint_C \alpha_k(z) dz.$$

Здесь  $C$  — простой замкнутый контур с началом и концом в точке  $z = 0$ , охватывающий интервал  $0 < x \leq x_0$  и ориентированный положительно. Ветвь  $\sqrt{q(z)}$  при  $z \in C$  выбрана в соответствии с (9).

Точно так же асимптотика дискретного спектра вычисляется при краевом условии вида (3) и при любом конечном числе точек поворота на полуоси  $x > 0$ .

## § 6. Асимптотика дискретного спектра оператора — $y'' + \lambda^2 q(x)y$ . Несамосопряженные задачи

### 1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$y'' - \lambda^2 q(x)y = 0, \quad (1)$$

где  $q(x)$  — комплекснозначная функция, и задачу на собственные значения на всей оси или на полуоси  $[0, +\infty)$ . Постановка этих

задач такая же, как и в § 5. Рассматривается случай, когда спектр является чисто дискретным, и исследуется асимптотика собственных значений  $\{\lambda_n\}$  при  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ . При этом предполагается, что функция  $q(z)$  аналитична в окрестности вещественной оси или полуоси.

Эта задача является несамосопряженной, так как функция  $q(x)$  принимает комплексные значения. Отметим, что неизвестно ни одного результата об асимптотике спектра уравнения (1) в случае, когда  $q(x)$  — комплекснозначная функция.

Рассмотрим, например, задачу на собственные значения

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

на отрезке  $I = [0, 1]$  для уравнения (1). Пусть  $q(x) \in C^\infty(I)$ ,  $\arg q(x) \neq \text{const}$ . Обозначим через  $y(x, \lambda)$  решение уравнения (1) с данными Коши  $y(0, \lambda) = 0$ ,  $y'(0, \lambda) = 1$ ; тогда собственные значения  $\lambda_n$  — корни уравнения  $y(1, \lambda) = 0$ . Функция  $y(1, \lambda)$  — целая, первого порядка роста, и можно показать, что она имеет бесконечно много нулей  $\{\lambda_n\}$ . Пусть  $q(x)$  — вещественнозначная функция; тогда числа  $\lambda_n^2$  вещественны. В этом случае можно найти их асимптотику в предположении, что функция  $q(x)$  имеет конечное число нулей на отрезке  $[0, 1]$ . Если же  $\arg q(x) \neq \text{const}$ , то асимптотика собственных значений  $\{\lambda_n\}$  неизвестна. Неизвестно даже, группируются ли они вблизи конечного числа лучей в комплексной плоскости  $\lambda$  при  $|\lambda_n| \gg 1$ . Вполне вероятно, что это не так и что асимптотической формулы попросту нет. В какой-то степени эта гипотеза подтверждается данным параграфом. Оказывается, что расположение собственных значений с большими номерами на комплексной плоскости  $\lambda$  и их асимптотика определяются расположением ЛС относительно вещественной оси; для полиномов  $q(x)$  соответствующие условия являются необходимыми и достаточными.

2. Задача на всей оси. Пусть  $q(z)$  — полином степени  $n \geq 2$ :

$$q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n. \quad (2)$$

В § 5 было замечено, что асимптотика спектра самосопряженной задачи связана с существованием конечной ЛС. Если полином  $q(z)$  не имеет вид  $(az + b)^n$ , то существует конечное число значений  $\arg \lambda = \psi_k$ , при которых существуют конечные ЛС. Однако для того, чтобы такая ЛС порождала бесконечную серию собственных значений, сосредоточенную вблизи луча  $\arg \lambda = \psi_k$ , должны выполняться некоторые условия на топологию ЛС.

2.1. Комплексы Стокса, соединяющие  $+\infty$  и  $-\infty$ . Определение комплекса Стокса см. в § 1. Положим  $\arg \lambda = \psi$ ,  $\arg a_0 = \varphi_0$ , и пусть  $\exp\{i(2\psi + \varphi_0)\} \notin (-\infty, 0)$ , если  $n$  четно,  $\exp\{i(2\psi + \varphi_0)\} \notin (-\infty, \infty)$ , если  $n$  нечетно. Тогда существуют области  $D^-(\lambda)$ ,  $D^+(\lambda)$  типа полуплоскости

также, что  $D^-(\lambda)$  содержит полюсь вида  $(-\infty, a]$ ,  $D^+(\lambda)$  — полюсь вида  $[b, +\infty)$ .

По определению комплекс Стокса  $K(\lambda)$  захватывает  $+\infty$  ( $-\infty$ ), если одна из областей, на которые  $K(\lambda)$  разбивает комплексную плоскость  $z$ , содержит  $D^+(\lambda)$  ( $D^-(\lambda)$ ). Комплекс Стокса  $K(\lambda)$  соединяет  $+\infty$  и  $-\infty$ , если он захватывает  $+\infty$  и  $-\infty$  (рис. 20). Введем условия:

- 1) все нули полинома  $q(z)$  — простые;
- 2) при каждом фиксированном  $\arg \lambda$  уравнение (1) имеет не более одной конечной ЛС.

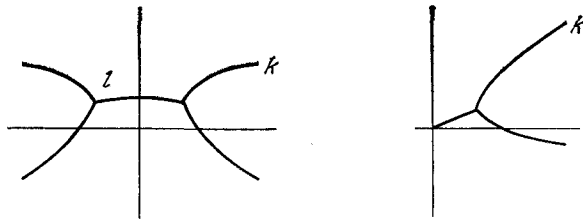


Рис. 20.

Нетрудно видеть, что это случай общего положения.

Собственная функция удовлетворяет крайевым условиям

$$y(-\infty, \lambda) = 0, \quad y(+\infty, \lambda) = 0. \quad (3)$$

Фиксируем  $\arg \lambda = \psi_0$ , и пусть  $\exp\{i(2\psi_0 + \varphi_0)\}$  — неотрицательное число. Тогда при каждом фиксированном  $\lambda = \rho e^{i\psi_0}$ ,  $\rho > 0$ , уравнение (1) имеет решение такое, что

$$y_2(x, \lambda) \sim q^{-1/4}(x) \exp\{-\lambda S(x_0, x)\}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Здесь  $x_0 \gg 1$ ,  $\operatorname{Re}[\lambda S(x_0, x)] > 0$  при  $x > x_0$ , так что  $y_2(+\infty, \lambda) = 0$ . Второе линейно независимое решение экспоненциально возрастает при  $x \rightarrow +\infty$ , так что собственные значения определяются из уравнения  $y_2(-\infty, \lambda) = 0$ . Пусть  $S_\delta$  — сектор  $|\arg \lambda - \psi_0| \leq \delta \ll 1$ ; тогда асимптотика (4) пригодна при  $x \rightarrow +\infty$  и при  $\lambda \in S_\delta$  фиксированном,  $\lambda \neq 0$ . Эта асимптотика — двойная: она пригодна при  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \in S_\delta$ , равномерно по  $x \geq x_0$ .

Пусть  $\psi_0$  таково, что не существует комплекса Стокса, соединяющего  $+\infty$  и  $-\infty$ . Тогда в секторе  $S_\delta$  при  $\delta \ll 1$  может лежать только конечное число точек спектра. Покажем это в случае, когда нет конечных ЛС. Тогда решение  $y_2(z, \lambda)$  при  $\lambda \in S_\delta$ ,  $|\lambda| \geq \lambda_0 \gg 1$ , экспоненциально убывает при  $|z| \rightarrow \infty$  в области  $D^+(\lambda)$  и экспоненциально растет во всех других областях типа полуплоскости, в том числе и в области  $D^-(\lambda)$  (§ 3). Общий случай рассмотрен в [55].



Пусть  $z_{\pm}$  — точки поворота, лежащие на  $\partial D^{\pm}$ . Обозначим

$$\xi_0 = \int_{z_-}^{z_+} \sqrt{q(z)} dz;$$

контур интегрирования не проходит через другие точки поворота. Тогда существует единственное значение  $\arg \lambda = \psi_0$  такое, что  $\operatorname{Re}(\xi_0 e^{i\psi_0}) = 0$ ; при этом существует конечная ЛС  $l$ , соединяющая точки  $z_-$  и  $z_+$ . Пусть  $\exp\{i(2\psi_0 + \varphi_0)\}$  не является отрицательным числом при  $n$  четном и вещественным числом при  $n$  нечетном. Тогда комплекс Стокса, содержащий линию  $l$ , соединяет  $+\infty$  и  $-\infty$ .

Задача (1), (3) имеет бесконечную серию собственных значений  $\{\lambda_n\}$ , для которой справедливо асимптотическое разложение

$$\lambda_n \oint_C \sqrt{q(z)} dz + \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda_n)^k \oint_C \alpha_k(z) dz = \pi i(2n+1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Здесь  $C$  — простой замкнутый контур, охватывающий линию  $l$ . Очевидно, что имеется серия  $\{-\lambda_n\}$ . Кроме того, задача (1), (3) может иметь конечное число точек дискретного спектра. Доказательство можно провести тем же способом, что и в § 2, пп. 2.1, 2.5.

Главный член асимптотики имеет вид

$$\lambda_n = \pi i(2n+1) \left[ \oint_C \sqrt{q(z)} dz \right]^{-1} + O(n^{-1}).$$

Заметим, что  $\oint_C \sqrt{q(z)} dz$  — один из периодов абелева интеграла

$$\int \sqrt{q(z)} dz.$$

Как и в § 5, можно вычислить асимптотику собственных функций и получить АР для  $\lambda_n$  по степеням  $n^{-1}$ . Собственная функция  $y(x, \lambda_n)$  имеет  $n$  нулей, расположенных вблизи линии  $l$ .

Эти результаты можно обобщить на тот случай, когда имеется  $k > 1$  комплексов Стокса, соединяющих  $+\infty$  и  $-\infty$ , т. е. они расположены так, как комплексы Стокса в случае, рассмотренном в § 5, п. 5.

**2.2. Задача на полуоси.** Рассмотрим задачу на собственные значения для уравнения (1) на полуоси  $[0, +\infty)$  с крайним условием в нуле:

$$ay(0, \lambda) + by'(0, \lambda) = 0, \quad (6)$$

где  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Пусть  $q(z)$  — полином вида (2), где  $n \geq 1$ . Если  $\exp\{i(2\psi_0 + \varphi_0)\} \notin (-\infty, 0]$ , то существует область  $D^+(\lambda)$  типа полуплоскости, содержащая полуось вида  $(x_0, +\infty)$ ,  $x_0 > 0$ . По определению комплекс Стокса  $D^+(\lambda)$  соединяет 0 и  $+\infty$ , если

1) существует область  $D(\lambda) \supset D^+(\lambda)$  такая, что  $\partial D(\lambda) \subset \subset K(\lambda)$ ;

2) Существует ЛС  $l(\lambda) \in \partial D(\lambda)$ , проходящая через точку  $z = 0$ . Простейший вариант изображен на рис. 20.

Пусть  $q(z)$  удовлетворяет условиям 1), 2) из п. 2.1. Как и в п. 2.1, можно доказать, что если при  $\arg \lambda = \psi_0$  не существует комплекса Стокса  $K(\lambda)$ , соединяющего точки 0 и  $\infty$ , то в секторе  $S_\delta: |\arg \lambda - \psi_0| \leq \delta \ll 1$  может лежать только конечное число собственных значений. Пусть при  $\arg \lambda = \psi_0$  такой комплекс Стокса существует; ограничимся краевым условием  $y(0, \lambda) = 0$ . Тогда имеется бесконечная серия собственных значений  $\{\lambda_n\}$ , асимптотика которой дается формулой (22) § 5, где контур  $C$  охватывает не интервал  $[0, x_0)$ , а ЛС  $l$ .

Приведенные выше результаты переносятся и на тот случай, когда функция  $q(z)$  голоморфна в окрестности вещественной оси или полуоси  $[0, +\infty)$ .

**3. Уравнение Штурма — Лиувилля.** Рассмотрим уравнение

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (7)$$

где  $q(z)$  — полином вида (2) с комплексными коэффициентами. Исследуем асимптотику собственных значений задачи на всей оси и задачи на полуоси. Пусть  $a_0 = \rho_0 e^{i\theta}$ ,  $\rho_0 > 0$ ; будем предполагать, что выполнены условия: 1)  $|\theta| < \pi$ ; 2)  $\theta \neq 0$ , если  $m$  нечетно, для задачи на полуоси. Тогда спектр задачи на всей оси и на полуоси — чисто дискретный.

С помощью замены переменной

$$z = \varepsilon^{-1}\zeta, \quad \varepsilon = |\lambda|^{-1/m}$$

уравнение (7) приводится к виду, аналогичному (1):

$$y'' - \mu^2 Q(\zeta, \varepsilon)y = 0, \quad (8)$$

$$\mu = |\lambda|^{1/2+1/m}, \quad Q(\zeta, \varepsilon) = a_0 \zeta^m - e^{i\varphi} + \sum_{k=1}^{m-1} a_k \varepsilon^k \zeta^{m-k}.$$

Здесь  $\varphi = \arg \lambda$ ,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ . Ясно, что при малых  $|\varepsilon|$  структура точек поворота уравнения (8) примерно такая же, как и при  $\varepsilon = 0$ , т. е. как для уравнения

$$w'' - \mu^2 (a_0 \zeta^m - e^{i\varphi}) w = 0. \quad (9)$$

**3.1. Топология линий Стокса уравнения (9). Точки поворота равны**

$$\zeta_k(\varphi) = \rho_0^{-1/m} e^{i\psi_k}, \quad \psi_k = \frac{\varphi - \theta + 2k\pi}{m}, \quad 0 \leq k \leq m-1,$$

все они простые и лежат на окружности  $|\zeta| = \rho_0^{-1/m}$ . Обозначим

$$S(a, b) = \int_a^b \sqrt{a_0 t^m - e^{i\varphi}} dt,$$

Пусть  $C^0$  — комплексная плоскость  $\zeta$  с разрезами по лучам  $\gamma_k: \zeta = \rho e^{i\psi_k}$ ,  $\rho_0^{-1/m} \leq \rho < \infty$ , которые выходят из точек поворота,  $\Sigma_k$  — сектор  $\psi_{k-1} < \arg \zeta < \psi_k$ . Будем нумеровать точки поворота, лучи и т. д. по mod  $m$ . Ветвь функции  $S = S(0, z)$  в области  $C^0$  нормируем условием

$$\sqrt{a_0 t^m - e^{i\varphi}}|_{t=0} = i e^{i\varphi/2}.$$

Функция  $S(0, z)$  выражается через интеграл Кристоффеля — Шварца, откуда следует, что сектор  $\Sigma_k$  взаимно однозначно отображается функцией  $S$  на область  $\tilde{\Sigma}_k$  в комплексной плоскости  $S$ . Граница этой области — ломаная, состоящая из отрезков  $\tilde{\Gamma}_j = [0, P_j]$  и лучей  $\tilde{\Gamma}_j = [P_j, \infty)$ ,  $j = k-1, k$ ; угол между  $\tilde{\Gamma}_j$  и  $\tilde{\Gamma}_{j+1}$  в точке  $P_j$  равен  $3\pi/2$  (угол берется внутри  $\tilde{\Sigma}_k$ ). Здесь  $P_j$  — образ точки поворота  $\zeta_j(\varphi)$ :

$$P_j = c_0 \rho_0^{-1/m} e^{i\varphi/2} \zeta_k(\varphi), \quad c_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^m} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2m} \frac{\Gamma(1/m)}{\Gamma(3/2 + 1/m)}.$$

Фиксируем  $\varphi$  и покажем, что если луч  $\Gamma_k$  — не ЛС, то  $\Gamma_k$  содержится в некоторой области  $D$  типа полуплоскости и  $\partial D$  содержит ЛС, выходящие из точки поворота  $\zeta_k$ .

Пусть  $\Gamma_k^+$ ,  $\Gamma_k^-$  — берега разреза  $\Gamma_k$ , принадлежащие соответственно секторам  $\Sigma_{k+1}$ ,  $\Sigma_k$ .

Пусть прямая  $l: \operatorname{Re} S = \operatorname{Re} P_k$  лежит в  $\tilde{\Sigma}_k$ ; тогда  $\tilde{\Sigma}_k$  содержит полуплоскость  $\tilde{D}$  вида  $\operatorname{Re} S > \operatorname{Re} P_k$  или  $\operatorname{Re} S < \operatorname{Re} P_k$ . Ее прообраз — искомая область  $D$ , а прообраз прямой  $l$  состоит из двух ЛС, образующих  $\partial D$ .

Пусть  $\tilde{\Sigma}_k$  не содержит  $l$ ; тогда она содержит один из вертикальных лучей с началом в точке  $P_k$ ,  $\operatorname{Re} S = \operatorname{Re} P_k$  на луче; обозначим его  $l'$ . Прообраз  $l'$  есть ЛС  $L'$ .

Пусть  $D$  — область, ограниченная ЛС и лучом  $L'$ . В секторе  $\Sigma_{k+1}$  целиком лежит либо одна ЛС  $L^+$  с началом в точке  $\zeta_k$ , либо две. Область, ограниченную  $\Gamma_k^+$  и  $L^+$ , обозначим  $D^+$ ; если имеются две ЛС, то в качестве  $L^+$  возьмем ту из них, для которой  $D^+$  не содержит ЛС. Область  $D = D^+ \cup D^- \cup \Gamma_k$  содержит луч  $\Gamma_k$  и не содержит точек поворота;  $D$  — искомая область.

**3.2. К о м п л е к с ы С т о к с а.** Из условия 1) следует существование области  $D^+(\varphi)$  типа полуплоскости, которая содержит полуось вида  $[a, +\infty)$ . Граничные лучи сектора  $S_+$ :  $\psi_- < \arg \psi < \psi_+$ ,  $\psi_{\pm} = (\pm\pi - \theta)/(m+2)$ , являются асимптотами ЛС, ограничивающих область  $D^+(\varphi)$ . Покажем, что точка поворота  $\zeta_0(\varphi)$  при любом  $\varphi$  лежит на  $\partial D^+(\varphi)$ .

Пусть  $\psi_- < \psi_0 < \psi$ ; тогда луч  $\Gamma_0(\varphi)$  лежит в секторе  $S_+$ . В силу п. 3.1 этот луч содержится в области типа полуплоскости, которая в данном случае обязана совпадать с  $D^+(\varphi)$ . Тем самым

утверждение доказано при  $|\alpha| < \pi$ ,  $\alpha = [(m+2)\varphi - 2\theta]/m$ . Пусть  $\alpha \in [\pi, \pi + (2\pi/m)]$ ; тогда  $S_+ \subset \Sigma_0$  и в секторе  $S_+$  нет точек поворота. Рассмотрим  $\tilde{\Sigma}_0$ -образ сектора  $\Sigma$ . Имеем

$$\arg P_0 = \pi/2 + \alpha \geq \pi, \quad \arg P_{-1} = \arg P_0 - 2\pi/m,$$

так что  $\operatorname{Re} P_0 \leq \operatorname{Re} P_{-1} < 0$  и потому  $\tilde{\Sigma}_0$  содержит полуплоскость  $\Pi$ :  $\operatorname{Re} S < \operatorname{Re} P_0$ . Поскольку  $\arg S(0, x) \rightarrow \pi + (\theta/2)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , то  $\operatorname{Re} S(0, x) \rightarrow -\infty$  и образ полуоси  $[0, +\infty)$  при  $a \geq 1$  содержится в области  $\Pi$ . Следовательно, прообраз области  $\Pi$  совпадает с  $D^+(\varphi)$ .

В силу условий 1), 2) существует область  $D^-(\varphi)$  типа полуплоскости, содержащая полуось вида  $(-\infty, -a]$ . Если  $m$  четно, то  $\zeta_{m/2}(\varphi) \in \partial D^-(\varphi)$ ; если  $m$  нечетно, то  $\zeta_{(m+1)/2}(\varphi) \in \partial D^-(\varphi)$  при  $0 < \theta < \pi$  и  $\zeta_{(m-1)/2}(\varphi) \in D^-(\varphi)$  при  $-\pi < \theta < 0$ . Это следует из приведенных выше рассуждений.

Пусть  $m$  четно; тогда комплекс Стокса, соединяющий  $+\infty$  и  $-\infty$ , обязан содержать точки поворота  $\zeta_0(\varphi)$ ,  $\zeta_{m/2}(\varphi)$ . Эти точки должны лежать на конечной ЛС, в частности, интеграл  $S(\zeta_0(\varphi), \zeta_{m/2}(\varphi))$  должен быть чисто мнимым. Отсюда следует, что при  $m$  четном  $+\infty$  и  $-\infty$  связаны тогда и только тогда, когда

$$\varphi = 2\theta/(m+2). \quad (10)$$

При  $m$  нечетном  $+\infty$  и  $-\infty$  связаны тогда и только тогда, когда  $\varphi = (2\theta - \pi)/(m+2)$ ,  $0 < \theta < \pi$ ;  $\varphi = (2\theta + \pi)/(m+2)$ ,  $-\pi < \theta < 0$ . (11)

Точки  $0$  и  $+\infty$  связаны тогда и только тогда, когда  $\varphi$  имеет вид (10) как при четном, так и при нечетном  $m$ .

3. 3. Асимптотика собственных значений. Точки поворота уравнения (7) имеют вид

$$\zeta_k(\varphi, \varepsilon) = \zeta_k(\varphi) \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_{jk}(\varphi) \varepsilon^j \right],$$

где ряд сходится при малых  $|\varepsilon|$ . Комплекс Стокса, соединяющий  $+\infty$  и  $-\infty$  (или  $0$  и  $+\infty$ ), существует при  $\varphi = \varphi_0(\varepsilon)$ , где  $\varphi_0(\varepsilon)$  — гладкая функция при малых  $\varepsilon \geq 0$ ,  $\varphi_0(0) = \varphi_0$ , а  $\varphi_0$  имеет вид (10) или (11). Асимптотика собственных значений задачи на всей оси дается формулой (5), где следует заменить  $\lambda$  на  $\mu$ ,  $q$  — на  $Q(\zeta, \varepsilon)$ . Контур  $C$  охватывает ЛС, соединяющую точки  $\zeta_0(\varphi_0)$  и  $\zeta_k(\varphi_0)$ , где  $k = m/2$  при  $m$  четном,  $k = (m+1)/2$  при  $m$  нечетном,  $0 < \theta < \pi$ ,  $k = (m-1)/2$  при  $m$  нечетном,  $-\pi < \theta < 0$ . Имеем

$$\left| \oint_C \sqrt{a_0 t^m - e^{i\varphi_0}} dt \right| = |\operatorname{Im}(P_0 - P_k)|,$$

и асимптотика собственных значений имеет вид

$$\lambda_n = A_m c_m e^{i\varphi_0 n} 2^{m/(m+2)} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k n^{-2k/(m+2)} \right].$$

Здесь  $\varphi_0$  имеет вид (10) или (11),

$$A = |a_0|^{1/(m+2)} \left[ \frac{\sqrt{\pi} 2m \Gamma(3/2 + 1/m)}{\Gamma(1/m) c_m} \right]^{(m+2)/(2m)}$$

и  $c_m = 1$  при  $m$  четном,  $c_m = \cos \pi/(2m)$  при  $m$  нечетном.

## § 7. Задача на собственные значения с регулярными особыми точками

### 1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$(1 - z^2) w'' + p(z) w' + [\lambda q(z) + r(z)] w = 0, \quad (1)$$

где функции  $p(z)$ ,  $q(z)$ ,  $r(z)$  голоморфны в односвязной области  $D$ , содержащей отрезок  $I = [-1, 1]$ . Уравнение (1) имеет две особые точки  $z = 1$ ,  $z = -1$ , обе регулярные, с характеристическими показателями  $(0, \rho_+)$ ,  $(0, \rho_-)$ , где  $\rho_{\pm} = 1 \pm p(\pm 1)/2$ . Точка  $z = 1$  будет неособой тогда и только тогда, когда  $p(1) = q(1) = r(1) = 0$ ; этот случай и аналогичный для точки  $z = -1$  исключим из рассмотрения.

В класс уравнений вида (1) входят уравнение Лежандра, гипергеометрическое уравнение, уравнение Матье, уравнение для вытянутых угловых сфероидальных и угловых кулоновских сфероидальных функций с индексом  $m = 0$  и др. Для перечисленных уравнений числа  $\rho_{\pm}$  вещественны.

Пусть  $U$  — малая окрестность точки  $z = 1$ . Тогда в  $U$  существует ФСР  $(w_1^+(z, \lambda), w_2^+(z, \lambda))$  следующего вида (гл. I, § 2):

1) Число  $\rho_+$  — нецелое. Решение  $w_1^+$  голоморфно в  $U$ ,

$$w_2^+(z, \lambda) = (1 - z)^{\rho_+} \tilde{w}_2^+(z, \lambda), \quad (2)$$

функция  $\tilde{w}_2^+$  голоморфна в  $U$ . Введем нормировку:  $w_1^+(1, \lambda) = \tilde{w}_2^+(1, \lambda) = 1$ ; тогда функции  $w_1^+(z, \lambda)$ ,  $\tilde{w}_2^+(z, \lambda)$  голоморфны по совокупности переменных  $(z, \lambda)$  при  $z \in U$ ,  $\lambda \in C$ .

2) Число  $\rho_+ < 0$  — целое. Решение  $w_1^+$  — такое же, как и в 1),

$$w_2^+(z, \lambda) = \theta_+(\lambda) w_1^+(z, \lambda) \ln(1 - z) + (1 - z)^{\rho_+} \tilde{w}_2^+(z, \lambda), \quad (3)$$

функция  $\tilde{w}_2^+$  голоморфна в  $U$  и не равна нулю при  $z = 1$ . Коэффициент  $\theta_+(\lambda)$  — полином от  $\lambda$ .

3) Число  $\rho_+ \geq 0$  — целое. Решение  $w_1^+$  имеет вид (2) и голоморфно в  $U$ ,

$$\tilde{w}_2^+(z, \lambda) = \tilde{w}_3^+(z, \lambda) + \theta_+(\lambda) w_1^+(z, \lambda) \ln(1 - z), \quad (4)$$

где функция  $\tilde{w}_3^+$  голоморфна в  $U$ ,  $\theta_+(\lambda)$  — полином от  $\lambda$ .

В любом из этих случаев уравнение (1) имеет решение, голоморфное в точке  $z = 1$ . Аналогичная ФСР  $(w_1^-(z, \lambda), w_2^-(z, \lambda))$  имеется в окрестности точки  $z = -1$ .

Назовем число  $\lambda$  *собственным значением* уравнения (1) (на интервале  $(-1, 1)$ ), если существует решение  $w(z, \lambda) \not\equiv 0$ , голоморфное в точках  $z = 1, z = -1$ . Это решение назовем *собственной функцией*; из аналитической теории дифференциальных уравнений следует, что собственная функция голоморфна в области  $D$ . Множество всех собственных значений обозначим  $\Sigma$ .

Данная постановка задачи на собственные значения отличается от классической, в которой задаются краевые условия в точках  $z = 1, z = -1$ . Например, для уравнения Лежандра

$$(1 - z^2) w'' - 2zw' + \lambda w = 0$$

ставятся краевые условия

$$|w(-1)| < \infty, \quad |w(1)| < \infty.$$

Для этого уравнения  $\rho_- = \rho_+ = 0$  (вариант 3)), так что одно из решений голоморфно в точке  $z = 1$ , второе имеет логарифмическую особенность (аналогично для точки  $z = -1$ ). В общем случае краевые условия для задачи на собственные значения можно поставить так:

$$|w^{(n_-)}(-1)| < \infty, \quad |w^{(n_+)}(1)| < \infty,$$

где числа  $n_{\pm}$  можно выразить через  $\rho_{\pm}$ .

Спектр  $\Sigma$  совпадает с множеством нулей некоторой целой функции порядка роста не выше  $1/2$ . Поэтому

$$\Sigma |\lambda_n|^{-1/2+\varepsilon} < \infty,$$

где сумма берется по всем  $\lambda_n \in \Sigma \setminus \{0\}$  и  $\varepsilon > 0$  — любое. Более точной информации о поведении собственных значений  $\lambda_n$  при  $n \rightarrow \infty$  в общем случае, по-видимому, получить нельзя. В этом параграфе найдена асимптотика  $\lambda_n$  при условии, что  $q(x) > 0, x \in I$ . Это условие выполняется для всех перечисленных выше классов уравнений.

**2. Ложный спектр.** Если  $\lambda \in \Sigma$ , то уравнение (1) имеет однозначное в области  $D$  решение — собственную функцию (речь идет только о нетривиальных решениях). Это решение однозначно, очевидно, и в области  $D$  с разрезом по отрезку  $I$ , т. е. в  $D \setminus I$ . Поставим следующую задачу. Пусть уравнение (1) при некотором  $\lambda$  имеет решение, однозначное в  $D \setminus I$ . Будет ли  $\lambda$  собственным значением уравнения (1)? Оказывается, что возможны следующие варианты:

I. Числа  $\rho_-, \rho_+$  — нецелые. В этом случае либо  $\lambda \in \Sigma$ , либо линейно зависимы решения  $w_2^-, w_2^+$ , т. е.

$$w_2^+(z, \lambda) \equiv C(\lambda) w_2^-(z, \lambda).$$

II. Число  $\rho_-$  — целое, число  $\rho_+$  — нецелое. В этом случае либо  $\lambda \in \Sigma$ , либо линейно зависимы решения  $w_2^+, w_1^-$ , т. е.

$$w_2^+(z, \lambda) \equiv C(\lambda) w_1^-(z, \lambda).$$

III. Числа  $\rho_-, \rho_+$  — целые. В этом случае  $\lambda \in \Sigma$ .

Обозначим  $\tilde{\Sigma}$  множество всех  $\lambda \notin \Sigma$ , при которых уравнение (1) имеет решение, однозначное в области  $D \setminus I$ . Множество  $\tilde{\Sigma}$  назовем *ложным спектром*. Из утверждений I — III следует, что для того, чтобы  $\lambda \in \Sigma \cup \tilde{\Sigma}$ , необходимо и достаточно, чтобы одна из четырех пар канонических решений  $(w_1^+, w_1^-)$ ,  $(w_1^+, w_2^-)$ ,  $(w_2^+, w_1^-)$ ,  $(w_2^+, w_2^-)$  была линейно зависима.

Если  $\lambda \in \Sigma \cup \tilde{\Sigma}$ , то группа монодромии  $G$  уравнения (1) в области  $D$  допускает исчерпывающее описание. В частности, эта группа разрешима, а в случае III нильпотентна.

3. Асимптотика решений уравнения (1) в области  $D \setminus I$ . Введем обозначения

$$\lambda = \mu^2, \quad S(a, z) = \int_a^z \sqrt{\frac{q(t)}{1-t^2}} dt,$$

$$f(a, z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_a^z \frac{p(t)}{1-t^2} dt \right\},$$

$$w_{1,2}^0(z, \mu; a) = \left( \frac{1-z^2}{q(z)} \right)^{-1/4} f(a, z) \exp \{ \pm i\mu S(a, z) \}.$$

Уравнение (1) имеет при  $\mu \rightarrow \infty$  ФАР вида

$$w_{1,2}(z, \mu) = w_{1,2}^0(z, \mu; a) \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\pm \mu)^{-k} \int_a^z y_k(t) dt \right\}, \quad (5)$$

где знак  $+$  ( $-$ ) берется для решения  $w_1$  ( $w_2$ ). Функции  $y_k(z)$  определяются из рекуррентных соотношений

$$y_{k+1}(z) = \frac{i}{2\sqrt{\tilde{q}(z)}} \left[ y_k'(z) + \tilde{p}(z)y_k(z) + \sum_{j=0}^k y_j(z)y_{k-j}(z) \right],$$

$$y_0(z) = -\frac{\tilde{q}'(z)}{4\tilde{q}(z)} - \frac{\tilde{p}(z)}{2}, \quad (6)$$

$$y_1(z) = \frac{i}{2\sqrt{\tilde{q}(z)}} \left[ y_0'(z) + \tilde{r}(z) + \left( \frac{\tilde{q}'(z)}{4\tilde{q}(z)} \right)^2 - \frac{\tilde{p}^2(z)}{4} \right],$$

где

$$\tilde{q}(z) = q(z)(1-z^2)^{-1}, \quad \tilde{p}(z) = p(z)(1-z^2)^{-1}, \quad \tilde{r}(z) = r(z)(1-z^2)^{-1}.$$

В дальнейшем предполагается, что

$$q(x) > 0, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (7)$$

Поскольку асимптотика решений интересует нас лишь в окрестности отрезка  $I$ , то можно считать, что  $q(z) \neq 0$  в области  $D$ .

Пусть  $\Pi$  — полуплоскость  $\operatorname{Re} \mu > 0$ ,  $|\operatorname{Im} \mu| < A$ , где  $A > 0$  фиксировано. Асимптотика решений будет исследована при  $\mu \in \Pi$ ,  $\mu \rightarrow \infty$ .

3.1. **Линии Стокса.** Пусть  $\lambda > 0$ ; тогда отрезок  $I = [-1, 1]$  является ЛС. Линии уровня  $\operatorname{Re} S(a, z) = \text{const}$ , близкие к  $I$ , — простые замкнутые аналитические кривые, содержащие внутри себя отрезок  $I$ . Функция  $\sqrt{\tilde{q}(z)}$  распадается в области  $D \setminus I$  на две голоморфные ветви. Выберем ветвь корня, отрицательную на верхнем берегу разреза  $I$ :

$$\sqrt{\tilde{q}(x + i0)} < 0, \quad -1 < x < 1; \quad (8)$$

тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{\tilde{q}(x - i0)} &> 0, \quad -1 < x < 1, \\ \sqrt{\tilde{q}(x)} &= -i |\sqrt{\tilde{q}(x)}|, \quad x > 1. \end{aligned}$$

При таком выборе ветви корня имеем

$$\operatorname{Re} [iS(1, z)] < 0, \quad z \in D \setminus I, \quad (9)$$

где интеграл берется по пути, лежащему в  $D \setminus I$ . Линия уровня  $\operatorname{Im} S(1, z) = a$  при малом  $a > 0$  — простая замкнутая кривая, охватывающая отрезок  $I$ . Заменим область  $D$  областью  $\operatorname{Im} S(1, z) < a$ ; полученную область снова обозначим  $D$ .

Область  $D \setminus I$  является областью типа кольца. Функция  $S = S(1, z)$  бесконечнозначна в этой области. Обозначим  $\tilde{D}$  риманову поверхность функции  $S$ , рассматриваемой в  $D \setminus I$  ( $\tilde{D}$  — универсальная накрывающая области  $D \setminus I$ ); тогда функция  $S(1, z)$  однолистка в области  $\tilde{D}$  и отображает ее на полосу  $G: 0 < \operatorname{Im} S < a$ . При этом часть  $\partial G$ , на которой  $\operatorname{Im} S = 0$ , состоит из бесконечного числа одинаковых отрезков  $l_0, l_1, l_{-1}, l_2, l_{-2}, \dots$ , где  $l_0$  — образ верхнего берега разреза  $I$ ,  $l_0$  имеет вид  $[0, ib]$ ,  $b > 0$ .

3.2. **Решение  $w_1$ .** Решения уравнения (1), вообще говоря, являются бесконечнозначными в области  $D \setminus I$  функциями, и их римановы поверхности совпадают с  $\tilde{D}$ . Поэтому необходимо аккуратно определить понятие решения. Фиксируем точку  $a \in \partial D$ ,  $a > 1$ , и зададим росток  $w(z, \mu)$  некоторого решения в этой точке. Аналитическое продолжение этого ростка по всем путям с началом в точке  $a$  приводит к многозначной функции, каждый росток которой — решение уравнения (1). Эту функцию также обозначим  $w(z, \mu)$ . Удалим из полосы  $G$   $\varepsilon$ -окрестности образы всех точек поворота и прообраз полученной области обозначим  $\tilde{D}_\varepsilon^1$ . При  $\mu \in \Pi$ ,  $\operatorname{Re} \mu \geq a_0 \gg 1$  и при любом  $N \geq 1$  уравнение (1) имеет решение вида

$$w_1^N(z, \mu) = w_1^0(z, \mu; a) \exp \left\{ \sum_{j=0}^N \mu^{-j} \int_g^z y_j(t) dt \right\} [1 + O(\mu^{-N-1})], \quad (10)$$



где оценка остаточного члена равномерна по  $z$ , лежащим на любом компакте  $K \subset D_{\varepsilon}^1$ . Решение  $w_1^N$  голоморфно по  $\mu \in \Pi$ ,  $\operatorname{Re} \mu \geq \geq a_0 > 0$  при каждом фиксированном  $z \in D_{\varepsilon}^1$ . AP (10) можно дифференцировать по  $z$  и по  $\mu$  любое число раз. В дальнейшем будем писать  $w_1$  вместо  $w_1^N$ .

Ветвь  $\sqrt[4]{\bar{q}(z)}$  в окрестности точки  $a$  выберем так, чтобы

$$\sqrt[4]{\bar{q}(a)} = e^{i\pi/4} \sqrt[4]{\bar{q}(a)}.$$

Далее, функцию  $w_1^0(z, \mu; a)$  заменим на функцию

$$w_1^0(z, \mu) = [\bar{q}(z)]^{-1/4} f(a, z) \exp\{i\mu S(1, z)\},$$

что приведет к умножению решения  $w_1$  на постоянную.

Существование AP (10) следует из того, что любую точку  $z \in \in D_{\varepsilon}^1$  можно соединить с точкой  $a$  каноническим путем  $\gamma$ . В качестве  $\gamma$  можно взять прообраз отрезка, который лежит в области  $G_{\varepsilon}$  и соединяет образы указанных точек. Исходный росток решения  $w_1$  при  $z = a$  равен  $w_1(a, \mu) = 1 + O(\mu^{-N-1})$ .

Пусть  $-1 < x < 1$ , кривая  $\alpha^+(x)$  соединяет точки  $a$  и  $x$  и  $\operatorname{Im} z > 0$  на этой кривой. Значение решения, полученное при аналитическом продолжении вдоль  $\alpha^+(x)$ , обозначим  $w_1(x + i0, \mu)$ . Если  $\alpha^-(x)$  — кривая, симметричная с  $\alpha^+(x)$  относительно вещественной оси, то значение  $w_1$ , полученное при аналитическом продолжении вдоль  $\alpha^-(x)$ , обозначим  $w_1(x - i0, \mu)$ . Из (10) следует, что при  $-1 + \delta \leq x \leq 1 - \delta$ , где  $0 < \delta < 1$ ,

$$\begin{aligned} w_1(x + i0, \mu) &= -i |\bar{q}(x)|^{-1/4} [1 + O(\mu^{-1})] \times \\ &\times \exp\left\{-i\mu \int_1^x |\sqrt{\bar{q}(t)}| dt - \frac{1}{2} \int_{\alpha^+} \bar{p}(t) dt\right\}, \\ w_1(x - i0, \mu) &= \end{aligned} \quad (11)$$

$$= |\bar{q}(x)|^{-1/4} [1 + O(\mu^{-1})] \exp\left\{i\mu \int_1^x |\sqrt{\bar{q}(t)}| dt - \frac{1}{2} \int_{\alpha^-} \bar{p}(t) dt\right\}.$$

Заметим, что решение  $w_1$  экспоненциально убывает при  $\mu \in \Pi$ ,  $\mu \rightarrow \infty$  в любой точке  $z \in D$ , что следует из (9).

**3.3. Р е ш е н и е  $w_2$ .** Фиксируем точку  $b$ , лежащую на верхнем берегу разреза  $I$ , и пусть  $B = S(1, b)$ , где интеграл берется по пути  $-\alpha^+(b)$ . Множество всех точек  $S \in G_{\varepsilon}^1$ , которые можно соединить с точкой  $B$  кривой, вдоль которой  $\operatorname{Re}(iS)$  не возрастает, обозначим через  $G_{\varepsilon}^2$ , а его прообраз — через  $D_{\varepsilon}^2$ . Проекция множества  $D_{\varepsilon}^2$  на плоскость  $Z$  строится так: из замыкания области  $D \setminus I$  необходимо удалить окрестности точек  $z = -1$ ,  $z = 1$  и нижнего берега разреза  $I$ .

При  $\mu \in \Pi$ ,  $\operatorname{Re} \mu \geq a_0 \gg 1$  и при любом  $N \geq 1$  уравнение (1) имеет решение  $w_2^N$  вида

$$w_2^N(z, \mu) = w_2^0(z, \mu; a) \exp \left\{ \sum_{j=1}^N (-\mu)^{-j} \int_a^z y_j(t) dt \right\} [1 + O(\mu^{-N-1})], \quad (12)$$

оценка остаточного члена равномерна по  $z$ , лежащим на любом компакте  $K \subset D_\varepsilon^2$ . Остальные свойства решения  $w_2^N$  — такие же, как и у решения  $w_1^N$ . Далее будем писать  $w_2$  вместо  $w_2^N$ . Как и выше, заменим функцию  $w_0^0(z, \mu; a)$  на функцию

$$w_2^0(z, \mu) = [\tilde{q}(z)]^{-1/4} f(a, z) \exp \{-i\mu S(1, z)\}.$$

Заметим, что решение  $w_2$  экспоненциально растет при  $\mu \in \Pi$ ,  $\mu \rightarrow \infty$  в каждой точке  $z \in D_\varepsilon^2 \setminus I$  в силу (9). Решения  $w_1, w_2$  образуют ФСР уравнения (1). При том же выборе значения  $\tilde{q}^{-1/4}(a)$ , что и в п. 3.2, имеем

$$\begin{aligned} w_2(x + i0, \mu) &= \\ &= -i |\tilde{q}(x)|^{-1/4} [1 + O(\mu^{-1})] \exp \left\{ i\mu \int_1^x |\sqrt{\tilde{q}(t)}| dt - \frac{1}{2} \int_{\alpha^+}^x \bar{p}(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Однако приведенный выше результат об АР решения  $w_2$  не позволяет найти значение  $w_2(x - i0, \mu)$ .

**3.4. М а т р и ц ы п е р е х о д а.** Найдем асимптотику решения  $w_2$  на нижнем берегу разреза, т. е. значение  $w_2(x - i0, \mu)$ . Фиксируем точку  $x \in (-1, 1)$ , и пусть  $\alpha^\pm = \alpha^\pm(x)$  — описанные в п. 3.2 пути,  $\gamma^+ = \alpha^+(\alpha^-)^{-1}$ , так что  $\gamma^+$  — простая замкнутая кривая, обходящая точку  $z = 1$  в положительном направлении. Положим  $w = (w_1, w_2)^T$ ; тогда

$$w(x - i0, \mu) \equiv T_1(\mu) w(x + i0, \mu).$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} a_\pm &= \exp \{2\pi i \rho_\pm\}, & A &= \exp \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k} \alpha_k \right\}, & (14) \\ \alpha_{2k} &= - \oint_{\gamma^+} y_{2k}(t) dt, & \alpha_{2k+1} &= \left( \int_{\alpha^-} + \int_{\alpha^+} \right) y_{2k+1}(t) dt. \end{aligned}$$

При  $\mu \in \Pi$ ,  $\mu \rightarrow \infty$  имеем

$$\begin{aligned} t_{11}^1(\mu) &= O(\mu^{-\infty}), \quad t_{12}^1(\mu) = A, & (15) \\ t_{21}^1(\mu) &= -A^{-1} a_+^{-1} + O(\mu^{-\infty}), \quad t_{22}^1(\mu) = 1 + a_+^{-1} + O(\mu^{-\infty}). \end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} w_1(x - i0, \mu) &= t_{11}^1 w_1(x + i0, \mu) + t_{12}^1 w_2(x + i0, \mu), \\ w_2(x - i0, \mu) &= t_{21}^1 w_1(x + i0, \mu) + t_{22}^1 w_2(x + i0, \mu) \end{aligned}$$

Так как  $\sqrt{\bar{q}(x-i0)} = -\sqrt{\bar{q}(x+i0)}$ , то  $S(1, x-i0) = -S(1, x+i0)$  и потому

$$\frac{w'_1(x-i0, \mu)}{w_1(x-i0, \mu)} = \frac{w'_2(x+i0, \mu)}{w_2(x+i0, \mu)} + O(\mu^{-\infty}),$$

откуда следует, что  $t_{11}^1(\mu) = O(\mu^{-\infty})$ .

Заменяя решение  $w_1(x-i0, \mu)$ ,  $w_2(x+i0, \mu)$  их АР (10), (12), получаем после сокращения на  $e^{i\mu S}$  тождество

$$t_{12}^1(\mu) = \exp \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \mu^{-k} \int_{\alpha^-} y_k(t) dt - (-\mu)^{-k} \int_{\alpha^+} y_k(t) dt \right) \right\}$$

с точностью до слагаемого порядка  $O(\mu^{-\infty})$ . Функции  $y_{2k}(z)$  однозначны в окрестности точки  $z=1$  и имеют в ней полюс, так что

$$\int_{\alpha^-} y_{2k}(t) dt - \int_{\alpha^+} y_{2k}(t) dt = - \oint_{\gamma^+} y_{2k}(t) dt.$$

Далее,  $y_{2k+1}(z) = \sqrt{\bar{q}(z)} \tilde{y}_{2k+1}(z)$ , где  $\tilde{y}_{2k+1}(z)$  — однозначная в окрестности точки  $z=1$  функция. Поэтому  $\alpha_{2k+1}$  не зависит от выбора точки  $x \in (-1, 1)$ . Тем самым доказана формула (14) для элемента  $t_{12}^1$ . Имеем

$$w^+(x-i0, \mu) = T_1(\mu) w^+(x+i0, \mu),$$

где  $w^+$  — каноническая ФСР (п. 1). Собственные значения матрицы  $T_1(\mu)$  равны 1 и  $\alpha_+^{-1}$ , собственные значения матрицы  $T_1(\mu)$  те же, так как эти матрицы подобны, и их теоремы Виета следуют АР элементов  $t_{21}^1$ ,  $t_{22}^1$ . Формулы (14), (15) позволяют найти АР решения.

**З а м е ч а н и е.** Формулы (14), (15) для матрицы перехода  $T_1(\mu)$  справедливы и в общем случае. Пусть функции  $p(z)$ ,  $q(z)$ ,  $r(z)$  голоморфны в точке  $z=1$ ,  $q(1) \neq 0$  и  $U$  — малая окрестность этой точки. При  $\lambda > 0$  из точки  $z=1$  выходит одна ЛС  $l$ ,

которая задается уравнением  $\operatorname{Re} \left( i \int_1^z \sqrt{\bar{q}(t)} dt \right) = 0$ . Для определенности будем считать, что  $\operatorname{Re}(z-1) < 0$  при  $z \in l \cap U$ ,  $z \neq 1$ , и выберем ветвь  $\sqrt{q(z)}$  в области  $U \setminus l$  так, что  $\operatorname{Re}[iS(1, z)] < 0$  в  $U \setminus l$ . Тогда в области  $U \setminus l$  существует ФСР  $(w_1(z, \lambda), w_2(z, \lambda))$ , для которой справедливы АР (10), (12). В данном случае роль  $l$  играет линия  $l$ , а под  $z+i0$ ,  $z-i0$  понимаются точки, лежащие на верхнем и нижнем берегах разреза  $l$ . Асимптотические формулы для матрицы перехода  $T_1(\mu)$  сохраняются.

Фиксируем точку  $x+i0$ ,  $-1 < x < 1$ , лежащую на верхнем берегу разреза  $l$ , и аналитически продолжим ФСР  $w(x+i0, \mu)$

вдоль простой кривой  $\gamma^-$  с началом в точке  $x + i0$  и концом в точке  $x - i0$ , которая обходит точку  $z = -1$ . Тогда получим ФСР  $w^1(x - i0, \mu) \neq w(x - i0, \mu)$ . Имеем

$$w(x + i0, \mu) = T_2(\mu) w^1(x - i0, \mu).$$

Тем же способом, что и выше, доказывается, что справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} t_{11}^2(\mu) &= 1 + a_-^{-1}, & t_{22}^2(\mu) &= 0, \\ t_{12}^2(\mu) &= -ABa_-^{-1}, & t_{21}^2(\mu) &= -(AB)^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

при  $\mu \in \Pi$ ,  $\mu \rightarrow \infty$  с точностью до слагаемых порядка  $O(\mu^{-\infty})$ . Выражения для  $a_-$ ,  $A$  приведены в (14),

$$B = \exp \left\{ i\mu \oint_{\gamma} \sqrt{\bar{q}(t)} dt + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k} \oint_{\gamma} y_k(t) dt \right\}, \quad (17)$$

где  $\gamma$  — простой замкнутый контур, обходящий отрезок  $I$  в положительном направлении. Главный член  $AP$  имеет вид

$$B = \exp \left\{ -2i\mu \int_{-1}^1 \left| \sqrt{\frac{q(t)}{1-t^2}} \right| dt + \pi i (\rho_+ + \rho_- - 1) \right\} [1 + O(\mu^{-1})],$$

где значение корня — арифметическое.

**4. Асимптотика спектра.** Пусть  $\lambda \in \Sigma$ ,  $w(z, \lambda)$  — собственная функция; тогда в малой окрестности точки  $z = a$ ,  $a \in D$ ,  $a > 1$ , имеем

$$w(z, \lambda) = c(\lambda) w^T(z, \lambda),$$

где  $c(\lambda) = (c_1(\lambda), c_2(\lambda))$ ,  $w(z, \lambda)$  — ФСР  $(w_1(z, \lambda), w_2(z, \lambda))$ . Для того чтобы число  $\lambda$  было точкой спектра, необходимо и достаточно, чтобы решение  $w$  было однозначно в окрестностях особых точек  $z = 1$  и  $z = -1$ , так что должны выполняться соотношения

$$c(\mu)T_1(\mu) = c(\mu), \quad c(\mu)T_2(\mu) = c(\mu).$$

Из первого уравнения находим  $c$  с точностью до множителя:

$$c = (a_+^{-1}, -A), \quad (18)$$

а из второго находим  $B = a_-a_+$ . Следовательно, уравнение (1) имеет бесконечную серию собственных значений  $\lambda_n = \mu_n^2$ , для которых справедливо  $AP$

$$\mu_n \oint_{\gamma} \sqrt{\bar{q}(z)} dz - i \sum_{k=0}^{\infty} \mu_n^{-k} \oint_{\gamma} y_k(z) dz = 2\pi n + 2\pi(\rho_+ + \rho_-), \quad n \rightarrow \infty.$$

Контур  $\gamma$  тот же, что и в формуле (16), ветвь  $\sqrt{\bar{q}(z)}$  в области  $D \setminus I$  выбрана в соответствии с (8). Имеем

$$\oint_{\gamma} \sqrt{\bar{q}(z)} dz = -2 \int_{-1}^1 |\sqrt{\bar{q}(x)}| dx,$$

$$\oint_{\gamma} y_0(z) dz = \pi i \left( \frac{p(1) - p(-1)}{2} - 1 \right),$$

так что главный член асимптотики имеет вид

$$\mu_n = \pi \left[ n - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(p(-1) - p(1)) \right] \left[ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{q(r)}{1-x^2}} dx \right]^{-1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$n \rightarrow \infty. \quad (19)$

Эта формула получена в [43] при условии, что  $p(-1) > 0$ ,  $p(1) < 0$ , но без предположения об аналитичности функций  $p$ ,  $q$ ,  $r$ . Если  $p$ ,  $q$ ,  $r$  вещественны, то  $n$ -я собственная функция имеет ровно  $n$  нулей на интервале  $(-1, 1)$  и формула (19) дает асимптотику  $n$ -го собственного значения. Как и в § 5, п. 2, можно получить AP вида

$$\mu_n = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k n^{-k}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Из формулы (19) следует, что если функция  $p(x)$  комплекснозначна, то собственные значения  $\lambda_n$  при  $n \gg 1$  лежат внутри некоторой параболы в комплексной плоскости  $\lambda$ , содержащей ось  $(0, +\infty)$ . Из (18) получим

$$w_n(x) = a_{-1}^{-1} w_1(x, \lambda_n) - A w_2(x, \lambda_n),$$

что позволяет найти AP собственной функции  $w_n(x)$  на любом отрезке вида  $[-1 + \delta, 1 - \delta]$ ,  $0 < \delta < 1$ . Чтобы найти асимптотику собственной функции вблизи точек  $z = \pm 1$ , можно воспользоваться результатами, приведенными в гл. IV, § 4.

5. Асимптотика ложного спектра. Для того чтобы число  $\lambda$  принадлежало множеству  $\Sigma \cup \tilde{\Sigma}$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$c(\mu) T_1(\mu) T_2(\mu) = c(\mu),$$

т. е. матрица  $T_1(\mu)T_2(\mu)$  должна иметь собственное значение, равное единице. Из формул (15), (16) следует, что либо  $B = a_- a_+$  и тогда  $\lambda \in \Sigma$ , либо  $B = 1$  и тогда  $\lambda \in \tilde{\Sigma}$ , если  $a_- a_+ \neq 1$ . В случае, когда  $a_- \neq 1$ ,  $a_+ \neq 1$ ,  $a_- a_+ = 1$ , не удается различить спектр и ложный спектр. Из уравнения  $B = 1$  и формулы (16) находим AP для точек  $\tilde{\lambda}_n = \tilde{\mu}_n^2$  ложного спектра. Главный член

асимптотики равен

$$\bar{\mu}_n = \left[ \pi n + \frac{\pi}{2} \left( \frac{p(1) - p(-1)}{2} - 1 \right) \right] \left[ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{q(x)}{1-x^2}} \right]^{-1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$n \rightarrow \infty$ .

## § 8. Квазиклассическое приближение в задачах рассеяния

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим уравнение

$$y'' - \lambda^2 q(x) y = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda > 0$  — параметр,  $q(x)$  — вещественнозначная функция. К этому виду приводится уравнение Шрёдингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + [U(x) - E] \psi = 0,$$

описывающее одномерное движение квантовомеханической частицы массы  $m$  с энергией  $E$  в потенциальном поле с потенциальной энергией  $U(x)$ . Предполагается, что существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x) = q_{\pm} \neq 0. \quad (2)$$

В квантовой механике рассматриваются следующие задачи:

**1. Задача об отражении от потенциального барьера бесконечной ширины.** В этом случае

$$q_- < 0, \quad q_+ > 0,$$

и возможен случай  $q_+ = +\infty$  (вариант  $q_- > 0, q_+ < 0$  мы не будем рассматривать). Пусть сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} ||\sqrt{q(x)}| - |\sqrt{q_-}|| dx < \infty; \quad (3)$$

тогда при каждом фиксированном  $\lambda > 0$  уравнение (1) имеет ФСР  $(y_1^-, y_2^-)$  такую, что

$$y_{1,2}^- \sim |q_-|^{-1/4} e^{\pm ik_- x}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad k_- = \lambda |\sqrt{q_-}|. \quad (4)$$

Решение  $y_1^-$  ( $y_2^-$ ) описывает бегущую направо (налево) волну. Если имеется бегущая направо волна  $y_1^-$ , то она отражается от барьера, т. е. решение имеет вид

$$y(x, \lambda) = y_1^-(x, \lambda) + a(\lambda) y_2^-(x, \lambda). \quad (5)$$

При  $x \rightarrow +\infty$  решение обязано обращаться в нуль:

$$y(+\infty, \lambda) = 0. \quad (6)$$

Величина  $R = |a(\lambda)|^2$  называется коэффициентом отражения от барьера, и нетрудно показать, что  $R(\lambda) = 1$ , так что интерес представляет лишь фаза функции  $a(\lambda)$ .

Пусть пределы  $q_+ > 0$ ,  $q_- < 0$  конечны, условие (4) выполнено и сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} \left| \left| \sqrt{q(x)} \right| - \left| \sqrt{q_+} \right| \right| dx < \infty. \quad (7)$$

Тогда уравнение (1) имеет ФСР  $(y_1^-, y_2^-)$  и ФСР  $(y_1^+, y_2^+)$  такую, что при  $x \rightarrow +\infty$

$$y_1^+(x, \lambda) \sim |q_+|^{-1/4} e^{ik_+x}, \quad y_2^+(x, \lambda) \sim |q_+|^{-1/4} e^{-ik_+x}, \quad k_+ = \lambda \left| \sqrt{q_+} \right|. \quad (8)$$

Постановка задачи о рассеянии в этом случае приведена в § 11 гл. II. Имеются два варианта этой задачи.

2. Задача о прохождении сквозь потенциальный барьер. В этом случае функция  $q(x)$  имеет нули.

3. Задача о надбарьерном отражении. В этом случае  $q(x) < 0$  на всей оси.

В этом параграфе вычисляется асимптотика  $S$ -матрицы при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , в предположении, что функция  $q(z)$  голоморфна в окрестности вещественной оси.

В гл. II, § 11, показано, что уравнение (1) имеет ФАР вида

$$y_{1,2}(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \exp \left\{ \pm \lambda S(a, x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\pm \lambda)^{-k} \int_0^x \alpha_k(t) dt \right\}. \quad (9)$$

Здесь обозначено

$$S(a, x) = \int_a^x \sqrt{q(t)} dt, \quad \alpha_0(x) = -\frac{q'(x)}{4q(x)}, \quad (10)$$

функции  $\alpha_k(x)$  определяются формулой (3) § 3 гл. II. Всюду в дальнейшем предполагается, что сходятся интегралы

$$\int_0^{+\infty} |\alpha_k(t)| dt, \quad \int_{-\infty}^0 |\alpha_k(t)| dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Для того чтобы получить главный член асимптотики, достаточно сходимости этих интегралов при  $k = 1$ .

При выводе асимптотических формул вначале предполагается, что  $q(z)$  — целая функция и что сходятся интегралы от функций  $|\alpha_k(z)|$  по тем каноническим путям  $\gamma$ , которые необходимы для решения задачи. Все эти формулы справедливы при менее жестких условиях на функцию  $q(x)$ . В частности, аналитичность этой функции необходима лишь в п. 4.

**2. Отражение от барьера.** Функция  $q(x)$  положительна при  $x \geq a \gg 1$ ; выберем ветви  $\sqrt{q(x)}$ ,  $\sqrt[4]{q(x)}$  положительными при  $x \geq a$ . Уравнение (1) при каждом фиксированном  $\lambda > 0$  имеет решение  $y_2(x, \lambda)$ , для которого справедливо АР (9) при  $x \rightarrow +\infty$ . Это решение удовлетворяет условию  $y_2(+\infty, \lambda) = 0$  и определяется своей асимптотикой с точностью до множителя. Асимптотика (9) — двойная: она пригодна при  $x \geq a$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$  равномерно по  $x$ . При  $x \leq -a$ , где  $a \gg 1$ , функция  $q(x)$  отрицательна. Ветви корней при  $x \leq -a$  выберем так:

$$\sqrt{q(x)} = i \left| \sqrt{q(x)} \right|, \quad \sqrt[4]{q(x)} = e^{i\pi/4} \left| \sqrt[4]{q(x)} \right|.$$

Уравнение (1) при каждом фиксированном  $\lambda > 0$  имеет ФСР  $(\tilde{y}_1(x, \lambda), \tilde{y}_2(x, \lambda))$ , для которой при  $x \rightarrow -\infty$  справедливо АР (9); эти асимптотики — двойные. В определении этих трех решений пока не указан нижний предел интегрирования в интеграле  $S(a, x)$ , но для решений  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$  он будет выбираться одним и тем же. При любом  $\lambda > 0$  имеем

$$\begin{aligned} y_2(x, \lambda) &= a_1(\lambda) \tilde{y}_1(x, \lambda) + a_2(\lambda) \tilde{y}_2(x, \lambda), \\ y_2'(x, \lambda) &= a_1(\lambda) \tilde{y}_1'(x, \lambda) + a_2(\lambda) \tilde{y}_2'(x, \lambda). \end{aligned} \quad (12)$$

Решение  $y_2$  вещественно,

$$\tilde{y}_2(x, \lambda) \equiv \overline{iy_1(x, \lambda)},$$

откуда следует, что

$$a_1(\lambda) = \overline{ia_2(\lambda)}. \quad (13)$$

Решения  $\tilde{y}_j$  пропорциональны решениям  $y_j$ , так что задача о вычислении асимптотики коэффициента  $a(\lambda)$  из (5) сводится к вычислению асимптотики одного из коэффициентов  $a_1(\lambda)$ ,  $a_2(\lambda)$ .

**2.1. Одна точка поворота.** Пусть  $q(x)$  имеет ровно одну, и притом простую, точку поворота  $x_0$ ; тогда  $q(x) > 0$  при  $x > x_0$ ,  $q(x) < 0$  при  $x < x_0$ . Положим  $a = x_0$  в АР (9) для всех трех решений. Тогда при любом  $\lambda > 0$  имеем

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(x, \lambda) &= e^{-i\pi/4} e^{i\lambda B_-(x_0)} y_1^-(x, \lambda), \\ \tilde{y}_2(x, \lambda) &= e^{-i\pi/4} e^{-i\lambda B_-(x_0)} y_2^-(x, \lambda), \end{aligned} \quad (14)$$

$$B_-(x_0) = -x_0 \left| \sqrt{q_-} \right| + \int_{x_0}^{-\infty} (|\sqrt{q(x)}| - |\sqrt{q_-}|) dx,$$

что следует из сравнения асимптотики решений  $y_j, \tilde{y}_j$  при  $\lambda$  фиксированном,  $x \rightarrow -\infty$ .

В данном случае можно найти асимптотику коэффициентов  $a_1(\lambda)$ ,  $a_2(\lambda)$ , не прибегая к матрицам перехода. Из точки поворота  $x_0$  выходят три ЛС  $l = (-\infty, x_0]$ ,  $l_0$ ,  $l_0^*$ , где  $\text{Im } z > 0$  на  $l_0$ . Пусть  $D$  — тонкая полоса, содержащая вещественную ось. Тогда



АР (9) справедливо в  $D \setminus l$  для решения  $y_2$ , в  $D \setminus l_0^*$  для решения  $\tilde{y}_1$  и в  $D \setminus l_0$  для решения  $\tilde{y}_2$ . Из тождеств (12) находим

$$a_1(\lambda) = \frac{y_2}{\tilde{y}_1} \frac{(\tilde{y}'_1/\tilde{y}_2) - (y'_2/y_2)}{(\tilde{y}'_2/\tilde{y}_2) - (\tilde{y}'_1/\tilde{y}_1)}, \quad (15)$$

где значения решений берутся в любой точке  $z_0$ . Пусть  $z_0$  лежит близко к ЛС  $l_0$ ,  $\text{Im } z_0 < 0$ . В силу выбора ветвей  $\sqrt{q(z)}$ ,  $\sqrt[4]{q(z)}$  в области  $D \setminus l_0$  для решения  $y_2$  имеем

$$\sqrt{q(x-i0)} = -i |\sqrt{q(x)}|, \quad \sqrt[4]{q(x-i0)} = e^{-i\pi/4} |\sqrt[4]{q(x)}|$$

при  $x < x_0$ . Поэтому интегралы, стоящие под знаком экспоненты, для АР решений  $\tilde{y}_1$ ,  $y_2$  берутся от функций, совпадающих при  $z = z_0$ , так что

$$\frac{y'_2(z_0, \lambda)}{y_2(z_0, \lambda)} = \frac{\tilde{y}'_1(z_0, \lambda)}{\tilde{y}_1(z_0, \lambda)} + O(\lambda^{-\infty}).$$

Следовательно, с точностью до слагаемого порядка  $O(\lambda^{-\infty})$  имеем

$$a_1(\lambda) = \frac{y_2(z_0, \lambda)}{\tilde{y}_1(z_0, \lambda)} = i \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda)^{-k} \int_{l_-} \alpha_k(z) dz \right\},$$

где контур  $l_-$  идет из  $+\infty$  в  $-\infty$  и обходит точку  $x_0$  снизу. Из (13) находим

$$a_2(\lambda) = \overline{ia_1(\lambda)} = -\exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda)^{-k} \int_{l_+} \alpha_k(z) dz \right\},$$

где контур  $l_+$  идет из  $+\infty$  в  $-\infty$  и обходит точку  $x_0$  сверху. Ветвь функции  $\sqrt{q(z)}$  выбрана так, что  $\sqrt{q(x)} > 0$  при  $x > x_0$ . Из (15) и формул для  $a_1(\lambda)$ ,  $a_2(\lambda)$  находим, что коэффициент  $a(\lambda)$  из (5) равен

$$a(\lambda) = -i \exp \{-2i\lambda B_-(x_0)\} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda)^{-k} \int_l \alpha_k(z) dz \right\}, \quad (16)$$

где контур  $l$  обходит полуось  $(-\infty, x_0]$  в положительном направлении.

Полученные формулы позволяют также найти АР решения  $y_0$  на полуоси  $(-\infty, x_0 - \varepsilon]$ , где  $\varepsilon > 0$  сколь угодно мало, но не зависит от  $\lambda$ . Главный член асимптотики имеет вид

$$y_0(x, \lambda) = 2|q(x)|^{-1/4} \left[ \cos \left( \lambda \int_{x_0}^x |\sqrt{q(t)}| dt - \frac{\pi}{4} \right) + O(\lambda^{-1}) \right].$$

Эта асимптотика равномерна по  $x$ .

2.2. Несколько точек поворота. Пусть функция  $q(x)$  имеет конечное число точек поворота и все они простые; тогда число их нечетно. Обозначим точки поворота  $x_0 < x_1 < \dots < x_{2m}$ . Отрезки  $l_{0j} = [x_{2j-1}, x_{2j}]$  являются ЛС. Кроме того, имеется ЛС  $l = (-\infty, x_0]$ , и из каждой точки поворота  $x_j$  выходят еще по две ЛС  $l_j, l_j^*$ , а  $\text{Im } z > 0$  при  $z \in l_j$ . Решения  $\tilde{y}_j$  выберем так же, как и в п. 2.1; в формуле (9) для решения  $y_2$  положим  $a = x_{2m}$ , так что

$$y_2(x, \lambda) \sim q^{-1/4}(x) \exp\{-\lambda S(x_{2m}, x)\}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Введем элементарные ФСР  $(u_j, v_j)$ , отвечающие  $(l_j, x_j, D_j)$ ,  $(u_j^*, v_j^*)$ , отвечающие  $(l_j^*, x_j, D_j^*)$ , и  $(u_{0j}, v_{0j})$ ,  $(u_{1j}, v_{1j})$ , отвечающие соответственно  $(l_{0j}, x_{2j}, D_{0j})$ ,  $(l_{0j}, x_{2j-1}, D_{0j})$ , и  $(u_{-1}, v_{-1})$ , отвечающую  $(l, x_0, D)$ . Мы не будем описывать выбор канонических областей  $D_j, D_j^*$  и других — они выбираются так же, как и в § 5, п. 3.2. Имеем (§ 5, п. 2.5)

$$y_2(z, \lambda) = e^{-i\pi/12} v_{2m}(z, \lambda),$$

а из выбора решений  $\tilde{y}_j$  следует, что

$$\tilde{y}_1(z, \lambda) = e^{-i\pi/4} v_{-1}(z, \lambda), \quad \tilde{y}_2(z, \lambda) = e^{-i\pi/4} u_{-1}(z, \lambda).$$

Пусть  $\Omega = (\omega_{jk}(\lambda))$  — матрица перехода от  $(u_{2m}, v_{2m})$  к  $(u_{-1}, v_{-1})$ ; тогда

$$y_2(x, \lambda) = e^{i\pi/6} [\omega_{22}(\lambda) \tilde{y}_1(x, \lambda) + \omega_{12}(\lambda) \tilde{y}_2(x, \lambda)],$$

так что

$$a_1(\lambda) = e^{i\pi/6} \omega_{22}(\lambda), \quad a_2(\lambda) = e^{i\pi/6} \omega_{12}(\lambda). \quad (17)$$

Положим  $\Omega_{2m,1}(\lambda) = (\tilde{\omega}_{jk}(\lambda))$  и обозначим

$$\eta_j = \int_{x_{2j}}^{x_{2j+1}} \sqrt{q(x)} dx > 0. \quad (18)$$

Так как

$$\Omega = \Omega_0,_{-1} \Omega_{1,0} \Omega_{2m,1}$$

и матрицы  $\Omega_0,_{-1}, \Omega_{1,0}$  определяются формулами (20), (15) из § 3, то

$$a_2(\lambda) = e^{i\pi/6} e^{i\lambda \eta_0} \alpha_{0,-1}^{-1}(\lambda) \tilde{\omega}_{22}(\lambda). \quad (19)$$

Элемент  $\tilde{\omega}_{22}(\lambda)$  вычислен в § 5, п. 3.4, и окончательно получаем

$$a_2(\lambda) = 2^m \exp\left\{\lambda \sum_{j=0}^m \eta_j + i \frac{\pi}{6} (m-1)\right\} \left[ \prod_{j=1}^m \cos \lambda \xi_j + O(\lambda^{-1}) \right]. \quad (20)$$

Наличие экспоненциально растущего множителя, содержащего  $\sum_{j=0}^m \eta_j$ , связано лишь с тем, что интеграл  $S(a, x)$  берется от точки  $a = x_0$  для решений  $\tilde{y}_j$  и от точки  $a = x_{2m}$  для решения  $y_2$ .

Пусть решение  $y$  имеет вид (5); тогда

$$y(x, \lambda) = \exp \left\{ i \frac{\pi}{4} - i\lambda B_- \right\} a_1^{-1}(\lambda) y_2(x, \lambda). \quad (21)$$

Если уравнение (1) имеет только одну точку поворота  $x_0$ , то  $|a_1(\lambda)| = 1 + O(\lambda^{-1})$ , как показано в п. 2.1, и потому внутри потенциального барьера, т. е. при  $x$  фиксированном,  $x \geq x_0 + \varepsilon$ , имеем

$$|y(x, \lambda)| = |y_2(x, \lambda)| [1 + O(\lambda^{-1})]. \quad (22)$$

Если же имеется несколько точек поворота, то, как следует из (20), имеются серии резонансных значений  $\{\lambda_{jn}\}$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , вида

$$\lambda_{jn} = (n\pi + \pi/2) \xi_j^{-1} + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty,$$

при которых  $|a_1(\lambda_{jn})| = O(n^{-1})$  (напомним, что экспоненциально растущий множитель в (20) следует опустить). Заметим, что точно такую же асимптотику имеют собственные значения уравнения (1) с потенциалом  $\tilde{q}(x)$ , равным  $q(x)$  при  $x_{2j-1} \leq x \leq x_{2j}$  и положительным вне этого отрезка. Мы не будем останавливаться на известном квантовомеханическом объяснении этого эффекта [12].

Для серий  $\{\lambda_{jn}\}$  справедливы те же АР, что и для серий собственных значений (§ 5, (11)). Из (19) и формулы для  $\tilde{\omega}_{22}(\lambda)$  (§ 5, п. 3.1) следует, что

$$|a_1(\lambda_{jn})| = O(n^{-\infty}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Более точный результат можно получить при  $m = 1$  (п. 6).

**3. Задача о прохождении сквозь барьер.** Пусть  $(y_1^-, y_2^-)$  и  $(y_1^+, y_2^+)$  — ФСР, введенные в п. 1. Рассмотрим задачу о прохождении сквозь барьер плоской волны  $y_1^-$ , бегущей слева направо. Решение в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} y &= y_1^- + R_+(\lambda) y_2^-, \quad x < 0, \quad |x| \gg 1, \\ y &= T_+(\lambda) y_1^+, \quad x \gg 1, \end{aligned} \quad (23)$$

т. е. слева от барьера имеются падающая волна  $y_1^-$  и отраженная волна  $R_+(\lambda) y_2^-$ , а справа — прошедшая волна  $T_+(\lambda) y_1^+$ .

Величины  $|R_+(\lambda)|^2$ ,  $|T_+(\lambda)|^2$  называются соответственно коэффициентами отражения от барьера и прохождения сквозь барьер. При всех  $\lambda > 0$  справедливо тождество

$$|T_+(\lambda)|^2 + |R_+(\lambda)|^2 = 1, \quad (24)$$

которое является следствием унитарности  $\mathcal{S}$ -матрицы (гл. II, § 11). Аналогично ставится задача для волны, бегущей справа налево:

$$\begin{aligned} y &= y_2^+ + R_-(\lambda) y_1^+, \quad x \gg 1, \\ y &= T_-(\lambda) y_2^-, \quad x < 0, \quad |x| \gg 1. \end{aligned}$$

Пусть все вещественные точки поворота простые; тогда число их четно:  $x_0 < x_1 < \dots < x_{2m}$ . Решения  $\tilde{y}_{1,2}$ , введенные в п. 2, обозначим  $\tilde{y}_{1,2}^-$  и введем решения  $\tilde{y}_{1,2}^+$ , для которых АР (9) справедливо при  $\lambda > 0$  фиксированном,  $x \rightarrow +\infty$ . Положим  $a = x_{2m-1}$  в формуле (9), т. е.

$$\tilde{y}_{1,2}^+(x, \lambda) \sim q^{-1/4}(x) \exp\{\pm \lambda S(x_{2m-1}, x)\}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

При  $x > x_{2m-1}$  выберем следующие ветви корней:

$$\sqrt{q(x)} = i | \sqrt{q(x)} |, \quad \sqrt[4]{q(x)} = e^{i\pi/4} | \sqrt[4]{q(x)} |;$$

тогда при любом  $\lambda > 0$

$$\tilde{y}_{1,2}^+(x, \lambda) = e^{-i\pi/4} e^{\pm i\lambda B_+} y_{1,2}^+(x, \lambda), \quad (25)$$

$$B_+ = -x_{2m-1} | \sqrt{q_+} | + \int_{x_{2m-1}}^{+\infty} (| \sqrt{q(x)} | - | \sqrt{q_+} |) dx.$$

При каждом фиксированном  $\lambda > 0$  имеем

$$\tilde{y}_1^+(x, \lambda) \equiv a_1(\lambda) \tilde{y}_1^-(x, \lambda) + a_2(\lambda) \tilde{y}_2^+(x, \lambda). \quad (26)$$

Из тождеств (14), (25) и из (23) находим

$$R_+(\lambda) = \frac{a_2(\lambda)}{a_1(\lambda)} e^{-2i\lambda B_-}, \quad T_+(\lambda) = \frac{1}{a_1(\lambda)} e^{i\lambda(B_+ - B_-)}, \quad (27)$$

так что задача сводится к вычислению асимптотики коэффициентов  $a_1(\lambda)$ ,  $a_2(\lambda)$ .

3.1. Две точки поворота. В этом случае можно вычислить асимптотику коэффициентов отражения и прохождения, не прибегая к матрицам перехода, как и в п. 2.1. Из точки поворота  $x_0$  выходят ЛС  $l_{-1} = (-\infty, x_0]$ ,  $l_0$ ,  $l_0^*$ , из точки  $x_1$  — ЛС  $l_1 = [x_1, +\infty)$ ,  $l_1$ ,  $l_1^*$ , где  $\text{Im } z > 0$  при  $z \in l_0$ ,  $z \in l_1$ . Пусть  $D$  — тонкая полоса, содержащая вещественную ось. Продолжим асимптотику решения  $\tilde{y}_1^+(x, \lambda)$  с полуоси  $x > x_1$  на полуось  $x < x_0$ . АР (9) для решения  $\tilde{y}_1^+$  пригодно в  $D \setminus (l_0^* \cup l_{-1})$ , для решения  $\tilde{y}_1^-$  — в  $D \setminus (l_0^* \cup l_1)$ , для решения  $\tilde{y}_2^-$  — в  $D \setminus (l_0 \cup l_1)$ .

Коэффициент  $a_{11}(\lambda)$  определим из соотношения вида (15), в котором следует заменить  $\tilde{y}_j$  на  $\tilde{y}_j^-$  и  $y_2$  на  $\tilde{y}_2^+$ . Как и в п. 2.1, получаем

$$a_1(\lambda) = \frac{\tilde{y}_1^+(z_0, \lambda)}{\tilde{y}_1^-(z_0, \lambda)} + O(\lambda^{-\infty}),$$

где  $\text{Im } z_0 < 0$ , точка  $z_0$  лежит вблизи ЛС  $l_{-1}$  (рис. 24). Воспользуемся АР (9). Имеем

$$a_1(\lambda) = \exp\{\lambda(S_+(x_1, z_0) - S_-(x_0, z_0))\} [q_+(z_0)]^{-1/4} \times \\ \times [q_-(z_0)]^{-1/4} \exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \left| \int_{l_+} \alpha_k(t) dt - \int_{l_-} \alpha_k(t) dt \right| \right\},$$

где знак  $+$  ( $-$ ) относится к ветви, соответствующей решению  $\tilde{y}_1^+$  ( $\tilde{y}_1^-$ ). В силу выбора ветвей

$$S_+(x_1, z_0) - S_-(x_0, z_0) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{q(t)} dt > 0.$$

Далее, контур  $l_+$  идет из  $+\infty$  в точку  $z_0$  и обходит точку  $x_1$  сверху, а точку  $x_0$  — снизу, так как АР для решения  $\tilde{y}_1^+$  пригодно в  $D \setminus (l_1^* \cup l_{-1})$ , контур  $l_-$  идет из  $-\infty$  в точку  $z_0$  ниже вещественной оси. Поэтому ветви  $q_{\pm}^{1/4}(z_0)$  совпадают и окончательно получаем

$$a_1(\lambda) = \exp\{\lambda S(x_0, x_1)\} \times \\ \times \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \int_{l_1} \alpha_k(z) dz\right\}, \quad (28)$$

где контур  $l_1$  идет из  $+\infty$  в  $-\infty$  и обходит точку  $x_1$  сверху, точку  $x_0$  — снизу.

Аналогично, выбирая точку  $\bar{z}_0$  вместо точки  $z_0$ , получаем

$$a_2(\lambda) = -i \exp\{\lambda S(x_0, x_1)\} \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \int_{l_2} \alpha_k(z) dz\right\}, \quad (29)$$

где контур  $l_2$  соединяет  $+\infty$  и  $-\infty$  и обходит обе точки поворота  $x_0, x_1$  сверху. Ветви  $\sqrt{q}(z)$  на контурах  $l_1, l_2$  выбраны так же, как и для решения  $y_1^+$ .

Асимптотика коэффициента  $R_+(\lambda)$  следует из (27), (28), асимптотика коэффициента  $T_+(\lambda)$  имеет вид

$$T_+(\lambda) = -ie^{-2i\lambda B} \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \int_l \alpha_k(z) dz\right\},$$

где контур  $l$  обходит полуось  $(-\infty, x_0]$  снизу. В частности, при  $\lambda \rightarrow +\infty$

$$|R_+(\lambda)|^2 \sim \exp\{-2\lambda S(x_0, x_1)\}, \\ |T_+(\lambda)|^2 = 1 + O(\exp\{-2\lambda S(x_0, x_1)\}),$$

так что коэффициент отражения от барьера экспоненциально мал.

3.2. Несколько точек поворота. Чтобы найти асимптотику коэффициентов  $a_1(\lambda), a_2(\lambda)$ , продолжим асимптотику решения  $\tilde{y}_1^+(x, \lambda)$  с полуоси  $x > x_{2m+1}$  на полуось  $x < x_0$ . В данном случае к ЛС, рассмотренным в п. 2.2, добавляются еще

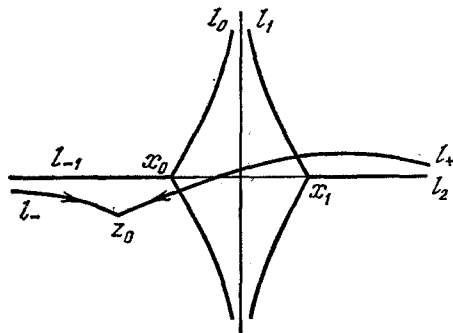


Рис. 21.

ЛС  $l_{2m+1}$ ,  $l_{2m+1}^*$  ( $\text{Im } z > 0$  на  $l_{2m+1}$ ) и ЛС  $l_{2m+2} = [x_{2m+1}, +\infty)$ . Дополнительно к введенным в п. 2.2 элементарным ФСР введем еще ФСР  $(u_{2m+1}, v_{2m+1})$  и  $(u_{2m+2}, v_{2m+2})$ . Имеем

$$\tilde{y}_1^+(x, \lambda) = e^{-i\pi/4} u_{2m+2}(x, \lambda);$$

решения  $\tilde{y}_{1,2}^-$  выражены в п. 2.2 через ФСР  $(u_{-1}, v_{-1})$ . Имеем

$$\Omega_{2m+2, 2m} = \Omega_{2m+2, 2m+1} \Omega_{2m+1, 2m},$$

где асимптотика последних двух матриц имеет вид (15), (20) § 3. Поэтому

$$\Omega_{2m+2, 2m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{i\pi/6 + \lambda \eta_m} \begin{bmatrix} O(\lambda^{-1}) \\ 1 + O(\lambda^{-1}) \end{bmatrix}$$

(обозначение  $\eta_m$  см. в (18)). Далее,

$$\Omega_{2m+2, -1} = \Omega_{2m, -1} \Omega_{2m+2, 2m},$$

а асимптотика матрицы  $\Omega_{2m, -1}$  вычислена в п. 2.2. Отсюда находим

$$\begin{aligned} a_1(\lambda) &= 2^m \exp \left\{ \lambda \sum_{j=0}^{m+1} \eta_j + \varphi \right\} \left[ \prod_{j=1}^m \cos \lambda \xi_j + O(\lambda^{-1}) \right], \\ a_2(\lambda) &= 2^m \exp \left\{ \lambda \sum_{j=0}^m \eta_j + \varphi \right\} \left[ \prod_{j=1}^m \cos \lambda \xi_j + O(\lambda^{-1}) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

В этом случае величина коэффициента прохождения может иметь не порядок  $\exp \left\{ -2\lambda \sum_{j=0}^m \eta_j \right\}$ , который определяется шириной барьера, а значительно меньший, из-за наличия множителя в квадратных скобках в формуле для  $a_1(\lambda)$ . В частности, может оказаться, что  $|T_+(\lambda_n)|^2 = 1 + O(\lambda_n^{-1})$  для некоторой последовательности  $\{\lambda_n\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ . Этот случай будет рассмотрен в п. 5.

**4. Надбарьерное отражение.** В этом случае  $q(x) < 0$  при всех  $x$ . В § 11 гл. II найдена асимптотика коэффициента  $T_+(\lambda)$  и доказано, что  $R_+(\lambda) = O(\lambda^{-\infty})$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Докажем, что коэффициент отражения от барьера экспоненциально мал. Функция  $S(0, x)$  взаимно однозначно отображает вещественную ось  $\mathbf{R}$  на мнимую ось, и потому существует область  $D$  типа полосы, содержащая  $\mathbf{R}$ . При этом  $D = D^*$ ,  $\partial D$  состоит из двух связанных компонент  $\partial D^+$ ,  $\partial D^-$ , симметричных относительно  $\mathbf{R}$ ; пусть  $\text{Im } z > 0$  на  $\partial D^+$ .

**4.1. Одна точка поворота на  $\partial D^+$ .** Обозначим эту точку  $z_0$ ; тогда  $\partial D^- \ni \bar{z}_0$ , и пусть  $z_0$  — простая точка поворота. Из точки  $z_0$  выходят три ЛС  $l_1, l_2, l_3$ , где  $l_1$  имеет своим асимптотическим направлением полуось  $(-\infty, 0)$ ,  $l_3$  — полуось  $(0, +\infty)$  (рис. 22). Воспользуемся для простоты матрицами перехода.

Введем элементарные ФСР  $(u_j, v_j)$ , отвечающие  $(l_j, z_0)$ ; выбор канонических областей можно не указывать, так как матрицы перехода понадобятся лишь с точностью до  $O(\lambda^{-1})$ . Имеем

$$u_1(z, \lambda) \sim c_1 q^{-1/4}(z) \exp\{\lambda S(z_0, z)\}.$$

Эта асимптотика — двойная: она пригодна и при  $z \in D$  фиксированном,  $\lambda \rightarrow +\infty$ , и при  $\lambda > 0$  фиксированном,  $z \in D$ ,  $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$ . Поэтому решение  $u_1$  пропорционально решению  $y_+$ . Так как  $\operatorname{Im} S(z_0, z) > 0$  при  $z \in l_1$  по определению элементарной ФСР (§ 3), то при вещественных  $x$

$$S(z_0, x) = S(z_0, 0) + S(0, x), \\ B = \operatorname{Re} S(z_0, 0) > 0,$$

$$S(0, x) = i \int_0^x |\sqrt{q(t)}| dt.$$

Так как  $D$  — односвязная область, то в  $D$  можно выделить голоморфную ветвь функции  $q^{1/4}(z)$ . Выберем ее так, чтобы  $q^{1/4}(x) = e^{i\pi/4} |q(x)|^{1/4}$  при вещественных  $x$ . По определению элементарной ФСР (§ 3) имеем

$$c_1 = e^{i\varphi_1}, \quad \varphi_1 = \lim_{z \rightarrow z_0, z \in l_1} \arg q^{1/4}(z).$$

Поэтому при любом  $\lambda > 0$

$$u_1(z, \lambda) = e^{i\varphi_1 + i\pi/4} e^{\lambda B + i\lambda A_+} y_1^+(z, \lambda), \\ A_+ = \int_0^\infty (|\sqrt{q(x)}| - |\sqrt{q_+}|) dx. \quad (31)$$

Выразим  $u_3, v_3$  через  $y_1^-, y_2^-$ . Имеем

$$S(z_0, x) = S(z_0, 0) + S(0, x),$$

где на сей раз

$$\operatorname{Re} S(z_0, 0) < 0, \quad \operatorname{Im} S(0, x) < 0.$$

Поэтому

$$u_3(z, \lambda) = e^{-i\pi/4 + i\varphi_2} e^{-\lambda B - i\lambda A_-} y_2^-(z, \lambda), \\ v_3(z, \lambda) = e^{-i\pi/4 + i\varphi_3} e^{\lambda B + i\lambda A_-} y_1^-(z, \lambda), \quad (32)$$

$$A_- = \int_0^{-\infty} (|\sqrt{q(x)}| - |\sqrt{q_-}|) dx,$$

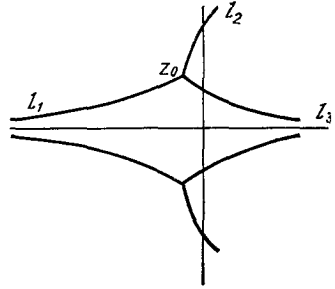


Рис. 22.

где  $\varphi_3 = \lim_{z \rightarrow z_0, z \in l_3} \arg q^{1/4}(z)$ . Выразим  $u_1$  через  $u_3, v_3$ . Так как

$$\Omega_{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \Omega_{12} \Omega_{23} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-i\pi/3} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + O(\lambda^{-1}),$$

то

$$u_1(z, \lambda) = [e^{-i\pi/3} + O(\lambda^{-1})] u_3(z, \lambda) + \\ + i [e^{-i\pi/3} + O(\lambda^{-1})] v_3(z, \lambda).$$

Из этой формулы и (31)–(33) находим

$$R_+(\lambda) = -i \exp \{-2\lambda(B + iA_-)\} [1 + O(\lambda^{-1})], \quad (33)$$

так что  $R_+(\lambda)$  экспоненциально убывает ( $\operatorname{Re} B > 0$ ). Можно придать более изящную форму выражению  $2B$ , именно,

$$2B = \oint_C \sqrt{q(z)} dz,$$

где  $C$  — простой замкнутый контур, содержащий внутри себя точки поворота  $z_0, \bar{z}_0$ .

4.2. Две точки поворота на  $\partial D^+$ . Пусть на  $\partial D^+$  лежат ровно две, и притом простые, точки поворота  $z_1, z_2$ , и пусть, для определенности, из точки  $z_1$  выходит ЛС  $l_1$ , имеющая полуось  $(0, +\infty)$  своим асимптотическим направлением. Тогда из точки  $z_2$  выходит ЛС  $l_3$ , имеющая полуось  $(-\infty, 0)$  своим асимптотическим направлением. Дуга  $l_2$  кривой  $\partial D^+$ , соединяющая точки поворота  $z_1$  и  $z_2$ , также является ЛС. Кроме того, из точки  $z_1$  выходит еще ЛС  $l_4$ , из точки  $z_2$  — ЛС  $l_5$ , которые лежат во внешности области  $D$ .

Выразим ФСР  $u_1, v_1$  через ФСР  $u_3, v_3$ . Для этого перейдем с ЛС  $l_1$  на ЛС  $l_2$  (матрица перехода имеет вид (19) § 3), затем сменим начало  $z_1$  ЛС  $l_2$  на  $z_2$  (матрица перехода имеет вид (14) § 3) и с ЛС  $l_2$  на ЛС  $l_3$  ((19) § 3). Окончательно получим

$$\Omega_{31} = e^{i(\pi/3 + \varphi_0)} \begin{bmatrix} -i(\alpha + \alpha^{-1}) & \alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = e^{i\lambda \xi_0}, \quad \xi_0 = \left| \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{q(z)} dz \right|. \quad (34)$$

Явный вид числа  $\varphi_0$  несуществен. Из этой формулы и соотношений (31)–(33) получаем

$$R_+(\lambda) = -2i [\cos \lambda \xi_0 + O(\lambda^{-1})] \exp \{-i\lambda \xi_0 - 2\lambda B_2 - 2i\lambda A_-\}, \quad (35)$$

$$B_2 = \int_{z_2}^0 \sqrt{q(z)} dz, \quad \operatorname{Re} B_2 > 0.$$

Заметим, что

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \oint_C \sqrt{q(z)} dz,$$



где  $C$  — замкнутый контур, охватывающий точки поворота  $z_1, z_2$ . В этой формуле вместо  $O(\lambda^{-1})$  можно получить асимптотический ряд.

В данном случае возникает явление резонанса. Коэффициент отражения  $R_+(\lambda)$ , как видно из (35), экспоненциально мал, но при значениях  $\lambda_n$  вида

$$\lambda_n = (n\pi + \pi/2) \xi_0^{-1}$$

он становится еще меньше. Можно показать, что выражение  $\cos \lambda \xi_0 + O(\lambda^{-1})$  имеет порядок  $O(\tilde{\lambda}_n^{-\infty})$  при значениях  $\tilde{\lambda}_n$  вида

$$\tilde{\lambda}_n = \lambda_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k n^{-k}.$$

4.3. Простой полюс на  $\partial D^+$ . Пусть  $\partial D^+$  содержит простой полюс  $z_1$ . Так как из точки  $z_1$  выходит ровно одна ЛС  $l_0$ , то она должна оканчиваться в точке поворота  $z_0 \in \partial D^+$ . Будем предполагать, что  $z_0$  — простая точка поворота и что  $\partial D^+$  не содержит других точек поворота и полюсов (рис. 23). Из точки  $z_1$  выходят также ЛС  $l_1, l_3$ , описанные в п. 4.1.

Выразим ФСР  $(u_1, v_1)$  через ФСР  $(u_3, v_3)$ . Для этого необходимо сделать следующие переходы (в скобках указаны номера формул из § 3, которые дают вид матриц перехода): с ЛС  $l_1$  на ЛС  $l_0$  ((19), но обратная матрица, так как переход совершается по часовой стрелке), от  $(l_0, z_1)$  к  $(l_0, z_0)$  (14), с правого берега ЛС  $l_0$  на левый ((18),  $n = 1$ , обратная матрица), от  $(l_0, z_0)$  к  $(l_0, z_1)$  (14) и с ЛС  $l_0$  на ЛС  $l_3$  ((19), обратная матрица). Поэтому

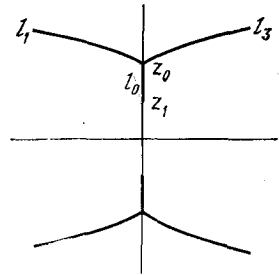


Рис. 23.

$$\Omega_{31} = e^{i\pi/3} \begin{bmatrix} 2 - \alpha^2 - \alpha^{-2} & -i\alpha^2 \\ -i\alpha^{-2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = e^{i\lambda \xi_0}, \quad \xi_0 = \left| \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{q(z)} dz \right|. \quad (36)$$

Выражая  $u_1$  через  $u_3, v_3$  и учитывая (31)–(33), получаем

$$R_+(\lambda) = 2i [\cos 2\lambda \xi_0 + O(\lambda^{-1})] \exp \{-2\lambda (B + A_- + \xi_0)\}, \quad (37)$$

где  $B = S(z_0, 0)$ ,  $\operatorname{Re} B > 0$ . В этом случае также имеются резонансные значения  $\lambda$  вида

$$\lambda_n = \frac{1}{2} \left( \pi n + \frac{\pi}{2} \right) \xi_0^{-1}.$$

5. Адиабатический инвариант. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2(\varepsilon t) x = 0, \quad (38)$$

где  $\omega(t) > 0$  при вещественных  $t$ ,  $\omega \in C^\infty(\mathbf{R})$  и существуют конечные пределы  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \omega(t) = \omega_\pm > 0$ . Уравнение (38) имеет вид

(1), где  $\varepsilon = \lambda^{-1}$ ,  $\omega^2 = -q$ . Адиабатический инвариант  $J(t, \varepsilon)$  был введен в § 11 гл. II и была получена формула (18), которая выражает полное изменение  $J(\varepsilon) = J(+\infty, \varepsilon) - J(-\infty, \varepsilon)$  через  $S$ -матрицу. Поэтому  $J(\varepsilon)$  экспоненциально убывает при  $\varepsilon \rightarrow +0$  в условиях пп. 4.1—4.3, а из асимптотической формулы для  $T_+(\lambda)$  и формул (33), (35), (37) для  $R_+(\lambda)$  вытекают асимптотические формулы для  $J(\varepsilon)$ .

**6. Задача о наиболее полном прохождении сквозь барьер.** Пусть функция  $q(x)$  удовлетворяет условиям п. 3,  $D_+(\lambda) = |T_+(\lambda)|^2$  — коэффициент прохождения сквозь барьер для волны, бегущей направо. Если функция  $q(x)$  имеет две простые точки поворота, то  $D_+(\lambda)$  монотонно убывает при  $\lambda \gg 1$ . Если же имеется более двух точек поворота, то функция  $D_+(\lambda)$  немонотонна при  $\lambda \gg 1$  и имеет точки локального максимума  $\lambda_n$ . Асимптотику значений  $D_+(\lambda_n)$  удастся вычислить в случае, когда имеются четыре простые точки поворота  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  [57]. В этом случае имеются ЛС  $l_j, l_j^*$ ,  $1 \leq j \leq 4$ , выходящие из точек поворота  $x_j$ ,  $\text{Im } z > 0$  при  $z \in l_j$ , и три вещественные ЛС  $l_0 = (-\infty, x_1)$ ,  $l_0 = (x_2, x_3)$ ,  $l_0 = (x_4, +\infty)$ . В силу вещественности функции  $q(x)$  канонические области  $D_0 \supset l_0, D_5 \supset l_5$  можно выбрать симметричными относительно вещественной оси и такими, что все разрезы в области  $S(D_j)$  направлены в сторону, противоположную лучу  $S(l_j)$ . Соединим эти области цепочкой канонических областей так же, как и в § 5, п. 3. Введем элементарные ФСР  $(u_j, v_j)$ ,  $(u_{j'}, v_{j'})$  и обозначим

$$\xi = \int_{x_2}^{x_3} |\sqrt{q(x)}| dx, \quad \eta_1 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{q(x)} dx, \quad \eta_2 = \int_{x_3}^{x_4} \sqrt{q(x)} dx, \quad (39)$$

$$\delta_j = e^{-2\lambda\eta_j}, \quad \gamma = e^{i\lambda\xi}.$$

Рассмотрим матрицы перехода

$$\Omega_{32} = e^{-i\pi/3} (a_{jk}), \quad \Omega_{30} = -ie^{\lambda\eta_1} (b_{jk}), \quad \Omega_{50} = -e^{-\lambda(\eta_1+\eta_2)} (c_{jk}). \quad (40)$$

Имеем

$$\begin{aligned} c_{11} &= b_{12}, \quad c_{12} = \delta_2 \alpha_{51}^{-1} b_{11} + i\alpha_{41} b_{12}, \\ c_{21} &= b_{22} = \bar{c}_{12}, \quad c_{22} = \delta_2 \alpha_{54}^{-1} b_{21} + i\alpha_{44} b_{22} = \bar{c}_{11}, \\ a_{11} &= 0, \quad a_{21} = \gamma^{-1}, \quad a_{12} = \gamma (\alpha_{30} \alpha_{02})^{-1}, \\ a_{22} &= i\alpha_{30}^{-1} (\gamma \alpha_{22} + \gamma^{-1} \alpha_{3'2}^{-1}), \\ b_{11} &= \alpha_{10}^{-1} a_{21}, \quad b_{12} = \alpha_{10}^{-1} a_{22}, \quad b_{21} = i\alpha_{01} a_{21}, \\ b_{22} &= \delta_1 a_{12} + i\alpha_{01} a_{21}. \end{aligned} \quad (41)$$

Из тождества

$$u_5(x) = \delta_1 \delta_2 (c_{11} u_0(x) + c_{21} v_0(x))$$

находим

$$D_+ = \sqrt{q_+/q_-} \delta_1 \delta_2 |c_{21}|^2, \quad R_+ = |c_{11}|^2 |c_{21}|^{-2}. \quad (42)$$

Выясним, возможен ли случай, когда барьер полностью прозрачен, т. е.  $D_+(\lambda) = 0$  при некотором  $\lambda$ . Тогда  $R_+(\lambda) = 0$ , так что  $c_{11} = 0$  и

$$\gamma \alpha_{22'} + \gamma^{-1} \alpha_{3'3}^{-1} = 0. \quad (43)$$

Из § 3, (23), следует, что

$$\alpha_{22'} = (1 + \tilde{\delta}_1)^{1/2} e^{i\varphi_1}, \quad \alpha_{3'3} = (1 + \tilde{\delta}_2)^{-1/2} e^{i\varphi_2}, \\ \tilde{\delta}_j = \delta_j [1 + O(\lambda^{-1})], \quad \varphi_j = 1 + O(\lambda^{-1})$$

и функции  $\varphi_j(\lambda)$  вещественны. Уравнение  $c_{11} = 0$  принимает вид

$$\exp\{i(2\lambda\xi + \varphi_1 + \varphi_2)\} = -\sqrt{\frac{1 + \tilde{\delta}_2}{1 + \tilde{\delta}_1}}. \quad (44)$$

Отсюда следует, что если  $\eta_1 \neq \eta_2$ , то  $D_+(\lambda) < 1$  при  $\lambda \gg 1$ , т. е. полное прохождение через барьер невозможно.

Особого внимания заслуживает случай, когда  $q(x)$  — четная функция. Уравнение (1) при любом  $\lambda > 0$  имеет четное и нечетное решения, так что собственные значения матрицы  $C(\lambda)$  равны  $\pm 1$  и потому  $\overline{c_{11}(\lambda)} = -c_{11}(\lambda)$ . Поэтому величина (см. (43))  $A = \alpha_{10}^{-1} \alpha_{30}^{-1} (\gamma \alpha_{22'} + \gamma^{-1} \alpha_{3'3}^{-1})$  вещественна,  $A = 2 \cos \lambda \xi + O(\lambda^{-1})$  и уравнение  $A = 0$ , а стало быть и уравнение  $D_+(\lambda) = 1$ , имеет бесконечно много решений. По-видимому, это возможно лишь в том случае, если функция  $q(x+T)$  при некотором  $T$  является четной.

Вычислим значения  $D_+(\lambda)$  в точках локального максимума. Имеем из (42)

$$D_+(\lambda) = \left[ 1 + \sqrt{\frac{q_-}{q_+}} |c_{11}|^2 e^{2\lambda(\eta_1 + \eta_2)} \right]^{-1}. \quad (45)$$

Представим уравнение (44) в виде

$$e^{i\psi(\lambda)} = \chi(\lambda) - 1.$$

Поскольку  $\alpha_{jk} = 1 + O(\lambda^{-1})$  при всех  $j, k$ , то

$$|c_{11}|^2 = \left[ 4(1 - \chi) \cos^2 \frac{\psi}{2} + \chi^2 \right] [1 + O(\lambda^{-1})].$$

В точках экстремума функции  $D_+(\lambda)$  имеем

$$(\eta_1 + \eta_2) |c_{11}|^2 - \chi' \cos \psi - (1 - \chi) (\psi' \sin \psi + \chi') = 0,$$

и так как  $\psi'(\lambda) = 2\xi + O(\lambda^{-2})$ , то  $\cos \psi \sim -1$  в точках максимума  $\lambda_n$ . Поэтому для  $\lambda_n$  справедливо AP

$$2\lambda_n \xi + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n^{-k} \oint_C \alpha_k(z) dz = 2n\pi + \pi, \quad n \rightarrow \infty, \quad (46)$$

где  $C$  — простой замкнутый контур, охватывающий отрезок  $[x_2, x_3]$  и ориентированный положительно,  $\sqrt{q(x)} > 0$  при  $x \in C$ ,  $x > x_3$ , функции  $\alpha_k(z)$  определяются формулой (3) § 3 гл. II. Главный член асимптотики равен

$$\lambda_n = -\xi^{-1} [\pi n + \pi/2] + O(n^{-1}).$$

Если  $\eta_1 < \eta_2$ , то  $\chi \sim \varepsilon/2$  в точке  $\lambda = \lambda_n$ , так что

$$\psi = 2\pi n - \pi \sim \frac{\eta_1 - \eta_2}{4} e^{-\lambda_n \eta_1}.$$

Следовательно, при  $n \rightarrow \infty$

$$D_+(\lambda_n) = 4 \sqrt{\frac{q_+}{q_-}} \exp \{-2\lambda_n |\eta_1 - \eta_2| [1 + Q(n^{-1})]\}, \quad \eta_1 \neq \eta_2, \quad (47)$$

так что  $D_+(\lambda_n)$  — экспоненциально малая величина. Однако значение  $D_+(\lambda_n)$  экспоненциально велико по сравнению со значением  $D_+(\lambda_n)$  в случае, когда имеются только две точки поворота и барьер имеет ту же ширину, т. е.

$$\eta = \int_{x_1}^{x_2} |\sqrt{q(x)}| dx = \eta_1 + \eta_2,$$

так как в этом случае  $D_+(\lambda_n) \sim \exp \{-\lambda_n (\eta_1 + \eta_2)\}$ .

Пусть  $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ . Тогда точки экстремума определяются из уравнения

$$\psi' \beta + \chi (2\xi \chi + \chi') + O(\chi^3) = 0,$$

и так как  $\chi = e^{-2\lambda \eta} [1 + O(\lambda^{-1})]$ , то  $\beta = O(\chi^2 \lambda^{-1})$ . Отсюда находим

$$D_+(\lambda_n) = 1 + O(n^{-2}), \quad \eta_1 = \eta_2, \quad (48)$$

при  $n \rightarrow \infty$ , где  $O(n^{-2}) \ll 0$ . В этом случае имеет место почти полное прохождение при  $\lambda = \lambda_n$ .

Если  $\eta_1 \neq \eta_2$ , то  $D_+(\lambda_n) \ll 1$ . Однако всегда существуют комплексные значения  $\tilde{\lambda}_n$  с экспоненциально малой мнимой частью такие, что  $D_+(\tilde{\lambda}_n) = 1$ . Именно,

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_n - \lambda_n &= \frac{i\delta_2}{4\xi} [1 + O(n^{-1})], \quad \eta_2 < \eta_1, \\ \tilde{\lambda}_n - \lambda_n &= -\frac{i\delta_1}{4\xi} [1 + O(n^{-1})], \quad \eta_1 < \eta_2. \end{aligned} \quad (49)$$

Действительно, решения  $y_j^\pm(x, \lambda)$  голоморфны по  $\lambda$  в полосе вида  $0 < \operatorname{Re} \lambda < \infty$ ,  $|\operatorname{Im} \lambda| < c$ , и то же самое верно для элементов  $s_{jk}(\lambda)$  матрицы рассеяния. Поэтому уравнение (43) имеет

комплексное решение  $\tilde{\lambda}_n$ , близкое к  $\lambda_n$ , причем

$$\psi(\tilde{\lambda}_n) = 2\pi n + \pi + \frac{i}{2}(\delta_2 - \delta_1) + o(|\delta_1| + |\delta_2|),$$

$$\psi(\tilde{\lambda}_n) - \psi(\lambda_n) = (\tilde{\lambda}_n - \lambda_n) \psi'(\lambda_n) [1 + O(n^{-1})],$$

и так как  $\psi'(\lambda_n) = 2\xi + O(n^{-1})$ , то из (43) следует (49).

**7. Квазистационарные уровни.** Рассмотрим задачу о прохождении сквозь барьер (п. 1, задача 2) и будем искать такие значения  $\lambda$ , при которых существует решение вида

$$y = y_1^+, \quad y = Ay_2^-.$$

Решение  $y$  при  $|x| \gg 1$  представляет собой расходящуюся волну, а соответствующие значения  $\lambda$  называются *квазистационарными уровнями*. Если  $\lambda$  вещественно, то такого решения не существует, поскольку  $S$ -матрица невырождена. Однако существует бесконечно много комплексных квазистационарных уровней  $\tilde{\lambda}_n$  с экспоненциально малой мнимой частью. Если  $q(x)$  удовлетворяет условиям п. 5, то

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_n - \lambda_n &= \frac{i}{4\xi} e^{-2\lambda_n \eta_1} [1 + O(n^{-1})], & \eta_2 < \eta_1, \\ \tilde{\lambda}_n - \lambda_n &= \frac{i}{4\xi} e^{-2\lambda_n \eta_2} [1 + O(n^{-1})], & \eta_1 < \eta_2, \\ \tilde{\lambda}_n - \lambda_n &= \frac{i}{2\xi} e^{-2\lambda_n \eta} [1 + O(n^{-1})], & \eta_1 = \eta_2 = \eta. \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь  $\lambda_n$  определяются формулой (46) и все символы  $O$  — чисто мнимые величины. Действительно,  $\tilde{\lambda}_n$  определяются из уравнения  $c_{21} = 0$ , которое имеет вид

$$\gamma \alpha_{22}' + \gamma^{-1} \alpha_{33}^{-1} = \varepsilon_2,$$

так что

$$e^{i\psi} + 1 = \delta_1 \gamma^2 (1 + \delta_1)^{-1/2} (\alpha_{01} \alpha_{02}')^{-1}. \quad (51)$$

Уравнение  $e^{i\psi} + 1 = 0$  имеет бесконечно много решений  $\lambda_n$  вида (43). Положим  $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n + \lambda_n'$ . Если  $\eta_1 < \eta_2$ , то уравнение (51) имеет вид

$$e^{i\psi} + 1 = -\frac{\delta_1}{2} [1 + O(\lambda^{-1})];$$

если  $\eta_1 = \eta_2$ , то оно имеет вид

$$e^{i\psi} + 1 = -\delta [1 + O(\lambda^{-1})],$$

откуда и следует (50).

**8. Рассеяние при энергиях, близких к максимуму потенциальной энергии.** Эталонной моделью служит уравнение Шрёдингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + (E - V(x)) \psi = 0,$$

где  $h > 0$  — малый параметр,  $V(\pm\infty) = 0$ . Пусть потенциал  $V(x)$  имеет единственную точку максимума  $x_0$ ,  $V''(x_0) < 0$ . Тогда при значениях  $E$ , близких к  $E_0 = V(x_0)$ , имеются две близкие точки поворота, вещественные при  $E < E_0$  и комплексные при  $E > E_0$ . В этом случае АР решений при  $x$ , близких к  $x_0$ , выражаются через функции Вебера (гл. IV, § 7) и только так можно найти асимптотику  $T_{\pm}(h, E)$ ,  $R_{\pm}(h, E)$  при  $h \rightarrow 0$ , равномерную по  $E$ , близким к  $E_0$ . Однако асимптотику отношений  $T_{\pm}/R_{\pm}$  можно найти, не прибегая к эталонному уравнению. Рассмотрим уравнение

$$y'' - \lambda^2 q(x, \alpha) y = 0, \quad (52)$$

где  $\alpha$  — параметр,  $\alpha \in J = [-\alpha_0, \alpha_0]$ . Пусть  $q(x, \alpha) \in C^{\infty}(R \times J)$ ,

$$q(x, 0) \leq 0, \quad q(0, 0) = 0, \quad q''_{xx}(0, 0) < 0, \quad q'_{\alpha}(0, 0) > 0,$$

так что  $q(x, \alpha) = ax^2 + bx + c\alpha x + \dots$  при малых  $|x|$ ,  $|\alpha|$ . Остальные условия на функцию  $q(x, \alpha)$  те же, что и в задаче о прохождении сквозь барьер (п. 1); требуется лишь равномерность этих условий по  $\alpha \in J$ . Число  $\alpha_0 > 0$  предполагается достаточно малым.

Пусть  $\alpha < 0$  фиксировано; тогда уравнение (52) имеет две комплексные точки поворота  $z_0(\alpha)$ ,  $\bar{z}_0(\alpha)$  и ЛС имеют тот же вид, что и на рис. 21. Пусть  $\tilde{y}$  — такое решение, что

$$\tilde{y}(z, \lambda, \alpha) \sim c q^{-1/4}(z, \alpha) \exp\{\lambda S(z_0(\alpha), z)\}$$

при  $z \in l_3(\alpha)$ ,  $z \rightarrow \infty$ , и эта асимптотика — двойная (по  $z$  и по  $\lambda$ ). Ветвь  $S$  выбрана так, что

$$\operatorname{Im} S(z_0(\alpha), z) > 0, \quad z \in l_3(\alpha); \quad \lim_{z \rightarrow z_0(\alpha)} c_0 \arg q^{-1/4}(z, \alpha) = 0.$$

Тогда при всех  $\alpha > 0$ ,  $\alpha < 0$

$$\tilde{y}(x, \lambda, \alpha) = \exp\{i\pi/12 + \lambda c + i\lambda B_+(\alpha)\} y_1^+(x, \lambda, \alpha),$$

$$c = S(z_0(\alpha), 0), \quad \operatorname{Re} c > 0,$$

$$B_+(\alpha) = \int_0^{+\infty} [V|q(x, \alpha)| - V|q_+(\alpha)|] dx.$$

Если  $\alpha < 0$  фиксировано, то АР для  $\tilde{y}$  пригодно всюду в окрестности вещественной оси, кроме некоторых окрестностей ЛС  $l_1(\alpha)$ ,  $l_2(\alpha)$ . Но при  $\alpha \rightarrow 0$  точки поворота  $z_0(\alpha)$ ,  $\bar{z}_0(\alpha)$  сливаются, так что из области применимости асимптотики выпадает полуось  $(-\infty, 0]$ . Тем не менее асимптотика применима в точке  $\tilde{z}$  такой, что  $\operatorname{Re} \tilde{z} < 0$ ,  $\operatorname{Im} \tilde{z} > 0$  (в точке  $\tilde{z}$  асимптотика неприменима).

Введем решения

$$\tilde{y}_j(z, \lambda, \alpha) \sim c_j q^{-1/4}(z, \alpha) \exp\{\lambda S_j(z_j(\alpha), z)\}, \quad j = 1, 2.$$

АР для решений  $\tilde{y}_{1,2}$  справедливы при  $z \rightarrow \infty$ , соответственно  $z \in \in L_1(\alpha)$ ,  $z \in l^*(\alpha)$ ,

$\text{Im } S_1(z_0(\alpha), z) < 0$ ,  $z \in L_1(\alpha)$ ;  $\text{Im } S_2(\overline{z_0(\alpha)}, z) > 0$ ,  $z \in l^*(\alpha)$ ,  
и вдоль соответствующей ЛС

$$\lim_{z \rightarrow z_j(\alpha)} \arg [c_j q^{-1/4}(z, \alpha)] = 0.$$

Имеем

$$\tilde{y}_1(x, \lambda, \alpha) = \exp \left\{ -\frac{i\pi}{12} + \lambda c + i\lambda B_-(\alpha) \right\} y_1^-(x, \lambda, \alpha),$$

$$\tilde{y}_2(x, \lambda, \alpha) = \exp \left\{ \frac{i\pi}{12} + \lambda \bar{c} - i\lambda B_-(\alpha) \right\} y_2^-(x, \lambda, \alpha),$$

$$B_-(\alpha) = \int_0^{\infty} [V|q(x, \alpha)| - V|q_-(\alpha)|] dx.$$

Далее, при  $\lambda > 0$ ,  $\alpha > 0$

$$\tilde{y}(z, \lambda, \alpha) = A(\lambda, \alpha) \tilde{y}_1(z, \lambda, \alpha) + B(\lambda, \alpha) \tilde{y}_2(z, \lambda, \alpha).$$

В точке  $\tilde{z}$  решения  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{y}_2$  экспоненциально велики при  $\lambda \gg 1$ , решение  $\tilde{y}_1$  экспоненциально мало, и стандартным способом находим

$$B(\lambda, \alpha) = \frac{\tilde{y}(\tilde{z}, \lambda, \alpha)}{\tilde{y}_2(\tilde{z}, \lambda, \alpha)} = [-i + O(\lambda^{-1})] e^{2\lambda c}. \quad (53)$$

Коэффициент  $A$  найти не удается. Это позволяет найти отношение

$$R_+/T_+ = B \exp \{-i\lambda (B_+(\alpha) + B_-(\alpha))\}. \quad (54)$$

Так как  $|R_+|^2 + |T_+|^2 = 1$ , то

$$|R_+| = \exp \left\{ -\lambda \int_{z_0(\alpha)}^{z_0(\alpha)} \sqrt{q(t)} dt \right\} [1 + O(\lambda^{-1})], \quad (55)$$

где правая часть экспоненциально мала при  $\alpha < 0$  фиксированном,  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

Формулы (54), (55) сохраняются и при  $\alpha \leq 0$ . В частности, при  $\alpha = 0$

$$|R_+(0, \alpha)| = \frac{1}{\sqrt{2}} + O(\lambda^{-1}), \quad |T_+(0, \alpha)| = \frac{1}{\sqrt{2}} + O(\lambda^{-1}).$$

### § 9. Уравнения Штурма — Лиувилля с периодическим потенциалом

1. Основные свойства решений. Рассмотрим уравнение

$$w'' + \lambda^2 q(x) w = 0, \quad (1)$$

где  $q(x)$  — непрерывная периодическая функция с периодом  $T > 0$ ,  $\lambda > 0$  — параметр. При фиксированном  $\lambda$  справедлива

**Теорема Флоке — Ляпунова.** Уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений либо вида

$$w_1(x, \lambda) = e^{\mu_1 x} p_1(x, \lambda), \quad w_2(x, \lambda) = e^{\mu_2 x} p_2(x, \lambda), \quad (2a)$$

либо вида

$$w_1(x, \lambda) = e^{\mu_1 x} p_1(x, \lambda), \quad w_2(x, \lambda) = e^{\mu_2 x} [x p_1(x, \lambda) + p_3(x, \lambda)], \quad (2b)$$

где  $p_j(x, \lambda)$  — периодические с периодом  $T$ , функции.

Числа  $\mu_1(\lambda)$ ,  $\mu_2(\lambda)$  называются характеристическими показателями, числа  $\rho_j(\lambda) = \exp\{T\mu_j(\lambda)\}$  — мультипликаторами. Случай (2б) может иметь место только тогда, когда  $\mu_1(\lambda) = \mu_2(\lambda)$ .

Пусть  $Y(x, \lambda)$  — ФМ уравнения (1):

$$Y(x, \lambda) = \begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) \\ y'_1(x, \lambda) & y'_2(x, \lambda) \end{bmatrix},$$

где  $y_1(x, \lambda)$ ,  $y_2(x, \lambda)$  — ФСР уравнения (1). Тогда мультипликаторы являются корнями квадратного уравнения

$$\det [Y(x_0 + T, \lambda) - \rho Y(x_0, \lambda)] = 0,$$

где  $x_0$  — любое.

Всюду в дальнейшем предполагается, что функция  $q(x)$  вещественнозначна, так что если  $w(x, \lambda)$  — решение уравнения (1), то функция  $\overline{w(x, \lambda)}$  также является решением. Пусть эти решения образуют ФСР. Тогда мультипликаторы определяются из уравнения

$$\rho^2 - 2a\rho + 1 = 0, \quad a = \operatorname{Re} \left\{ \left| \frac{w(0, \lambda)}{w'(0, \lambda)} \quad \frac{w(T, \lambda)}{w'(T, \lambda)} \right| \left| \frac{w(0, \lambda)}{w'(0, \lambda)} \quad \frac{w(0, \lambda)}{w'(0, \lambda)} \right|^{-1} \right\}. \quad (3)$$

Поэтому  $\rho_1 \rho_2 = 1$ , и если  $\rho_1, \rho_2$  не вещественны, то  $\bar{\rho}_2 = \rho_1$ ,  $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$ .

Число  $\lambda$  принадлежит зоне устойчивости, если все решения уравнения (1) ограничены на вещественной оси, и зоне неустойчивости (лакуне) в противном случае. Так как

$$\rho_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1},$$

то зоны неустойчивости определяются неравенством  $|a| \geq 1$ . В этом случае оба мультипликатора вещественны и образуют пару  $\rho, \rho^{-1}$ . Если  $\lambda$  принадлежит зоне устойчивости, т. е.  $|\rho| < 1$ , то мультипликаторы комплексно сопряжены и образуют пару  $e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}$ ,  $0 < \varphi < \pi$ .

**2. Оценки ширины лакун.** Пусть  $\Delta_n$  — ширина  $n$ -й лакуны: тогда, как известно,  $\Delta_n = O(n^{-1})$  и, более того,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0$ :



Известно, что если  $q(x) > 0$ ,  $q(x) \in C^m(\mathbf{R})$ , то  $\Delta_n = O(n^{-m-1})$  при  $n \rightarrow \infty$ . Покажем, что если  $q(x) > 0$ ,  $q(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$ , то  $\Delta_n = O(n^{-\infty})$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Уравнение (1) имеет решение  $w(x, \lambda)$ , для которого при  $\lambda \rightarrow +\infty$  справедливо AP, равномерное на каждом конечном отрезке (гл. I, § 10):

$$w(x, \lambda) = \exp \left\{ \int_0^x y(t, \lambda) dt \right\}, \quad y(x, \lambda) = \sum_{k=-1}^{\infty} \lambda^{-k} \alpha_k(x). \quad (4)$$

Все функции  $\alpha_k(x)$  периодичны, с периодом  $T$ , функции  $\alpha_{2k}(x)$  — вещественные, функции  $\alpha_{2k+1}(x)$  — чисто мнимые и

$$\alpha_{-1}(x) = i \sqrt{q(x)}, \quad \alpha_0(x) = -\frac{1}{4} \frac{d}{dx} \ln q(x).$$

Положим  $y(x, \lambda) = y_1(x, \lambda) + iy_2(x, \lambda)$  и покажем, что

$$\tilde{y}_1(T, \lambda) = \int_0^T y_1(x, \lambda) dx = O(\lambda^{-\infty}), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Имеем (слагаемые порядка  $O(\lambda^{-\infty})$  опускаем)

$$y' + y^2 + \lambda^2 q = 0, \quad y_1' + y_1^2 - y_2^2 + \lambda^2 q = 0, \quad y_2' + 2y_1 y_2 = 0,$$

так что

$$\int_0^T y_1(x, \lambda) dx = -\frac{1}{2} \int_0^T \frac{y_2'(x, \lambda)}{y_2(x, \lambda)} dx = 0.$$

Из (3), (4) находим

$$a(\lambda) = e^{\tilde{y}_1(T, \lambda)} \cos \tilde{y}_2(T, \lambda) + O(\lambda^{-\infty}) = \cos \tilde{y}_2(T, \lambda) + O(\lambda^{-\infty}). \quad (6)$$

Если  $\lambda_{1n}, \lambda_{2n}$  — концы лакуны  $\Delta_n$ , то в обеих этих точках  $a(\lambda) = 1$  или  $a(\lambda) = -1$ . Пусть  $\tilde{\lambda}_n$  — середина лакуны; тогда справедливо AP

$$\tilde{y}_2(T, \tilde{\lambda}_n) = n\pi + O(\lambda_n^{-\infty}),$$

из которого вытекает AP для  $\tilde{\lambda}_n$  по нечетным степеням  $n^{-1}$ :

$$\tilde{\lambda}_n = n\pi \left[ \int_0^T \sqrt{q(x)} dx \right]^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k n^{-2k-1}. \quad (7)$$

Из (6) следует, что  $\Delta_n = O(n^{-\infty})$ . Кроме того, найдена асимптотика мультипликаторов:

$$\rho_{1,2}(\lambda) = \cos \tilde{y}_2(T, \lambda) \pm \sqrt{\cos^2 \tilde{y}_2(T, \lambda) - 1 + O(\lambda^{-\infty})} + O(\lambda^{-\infty}),$$

главный член которой равен

$$\rho_{1,2}(\lambda) = \cos \left[ \lambda \int_0^T \sqrt{q(x)} dx \right] \pm \pm \sqrt{\cos^2 \left[ \int_0^T \sqrt{q(x)} dx \right] + O(\lambda^{-1}) + O(\lambda^{-1})}.$$

**3. Лакуны для аналитических потенциалов.** Если функция  $q(z)$  голоморфна в некоторой окрестности вещественной оси, то ширина  $n$ -й лакуны, вообще говоря, экспоненциально убывает при  $n \rightarrow \infty$ . Покажем это при некоторых предположениях относительно  $q(z)$ .

**3.1. Л и н и С т о к с а.** Пусть  $q(z)$  — целая функция, положительная на вещественной оси  $q(z) \neq \text{const}$ . Тогда функция  $iS(0, z)$  (где

$$S(0, z) = \int_0^z \sqrt{q(t)} dt$$

и  $\sqrt{q(x)} > 0$  при вещественных  $x$ ) взаимно однозначно отображает вещественную ось  $Ox$  на мнимую ось в комплексной плоскости  $S'$ . Поэтому ось  $Ox$  содержится в области  $D$  типа полосы и  $D = D^*$  (эта область симметрична относительно оси  $Ox$ ). Граница области  $D$  состоит из двух связанных компонент  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$ ; пусть  $\text{Im } z > 0$  при  $z \in \Gamma^+$  для определенности. Кривые  $\Gamma^\pm$  инвариантны относительно сдвига на  $T$  параллельно оси  $Ox$ . На кривой  $\Gamma_T^+ = \Gamma^+ \cap \{0 \leq \text{Re } z \leq T\}$  имеется хотя бы одна точка поворота уравнения (1). Асимптотика ширины  $n$ -й лакуны  $\Delta_n$  определяется числом точек поворота, лежащих на  $\Gamma^+$ , и их кратностями. Рассмотрим основной случай: на  $\Gamma^+$  лежит ровно одна, и притом простая, точка поворота  $z_0$ . Из этой точки выходят три ЛС; пусть  $l_1, l_2 \in \Gamma^+$ ,  $l_1$  лежит слева от  $l_2$ ,  $l_3 \notin \Gamma^+$ .

**3.2. Фундаментальные системы решений.** На ЛС  $l_1$  выберем ветвь функции  $\sqrt{q(z)}$  такую, что

$$\text{Im } [iS(z_0, z)] > 0, \quad z \in l_1.$$

Как и в §§ 3, 5, можно показать существование области  $D_1$  такой, что  $\partial D_1 \supset l_2 \cup l_3$ . Функция  $iS(z_0, z)$  взаимно однозначно отображает область  $D_1$  на полуплоскость  $\text{Re}(iS) > 0$  с конечным или бесконечным числом вертикальных разрезов. Обозначим через  $D_2$  область, полученную из области  $D_1$  сдвигом на  $T$ . Пусть функция  $q(z)$  удовлетворяет в области  $D_1$  условиям § 4, п. 1. Этим условиям удовлетворяют, в частности, тригонометрические полиномы, положительные на вещественной оси. Тогда (§ 4) уравнение (1) при каждом фиксированном  $\lambda > 0$  имеет решение вида

$$w(z, \lambda) = q^{-1/4}(z) \exp \{-i\lambda S(z_0, z)\} [1 + \lambda^{-1} \varepsilon_1(z, \lambda)], \quad (8)$$

где  $\varepsilon_1(z, \lambda) \rightarrow 0$ , если  $z \rightarrow \infty$  в области  $D_1$  так, что  $\operatorname{Re} [iS(z_0, z)] \rightarrow +\infty$ . Это решение с точностью до множителя определяется условием  $\lim_{z \rightarrow \infty} w = 0, z \in D_1$ . Как показано в § 3, AP (8) при  $\lambda \rightarrow +\infty$  справедливо всюду в комплексной плоскости  $z$ , за исключением окрестностей некоторых ЛС, т. е. в такой области  $|\varepsilon_1(z, \lambda)| \leq c$  при  $\lambda \geq \lambda_0 \gg 1$ . В частности, AP (8) при  $\lambda \rightarrow +\infty$  пригодно в области  $D_1 \cup D \cup D_1^* \cup D_2 \cup D_2^*$ , из которой удалены окрестности ЛС  $l_2, l_2^*$ . Аналогично определяется решение  $w_2(z, \lambda)$ , ассоциированное с областью  $D_2$ :

$$w_2(z, \lambda) = q^{-1/4}(z) \exp\{-i\lambda S(z_0 + T, z)\} [1 + \lambda^{-1}\varepsilon_2(z, \lambda)]. \quad (9)$$

Ветвь функции  $q^{-1/4}(z)$  выбрана так, что  $q^{-1/4}(x) > 0$  при вещественных  $x$ .

Покажем, что при каждом фиксированном  $\lambda > 0$  справедливо тождество

$$w_1(z, \lambda) = w_2(z + T, \lambda). \quad (10)$$

Пусть  $z \rightarrow \infty$  в области  $D_1$  так, что  $\operatorname{Re} [iS(z_0, z)] \rightarrow +\infty$ ; тогда  $w_1(z, \lambda) \rightarrow 0$ , и так как  $z + T \in D_2$ , то  $w_2(z, \lambda) \rightarrow 0$ . Следовательно,  $w_1(z + T, \lambda) \equiv Aw_2(z, \lambda)$ . Сокращая обе части этого тождества на  $q^{-1/4}(z)$  и учитывая выбор ветвей функции  $S$ , получаем

$$1 + \lambda^{-1}\varepsilon_1(z + T, \lambda) = A [1 + \lambda^{-1}\varepsilon_2(z + T, \lambda)].$$

Устремляя  $z$  к бесконечности в области  $D$  так, как указано выше, и учитывая, что  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ , получаем тождество (10).

Введем ФСР  $\{w_j(z, \lambda), \overline{w_j(\bar{z}, \lambda)}\}$ ,  $j = 1, 2$ , и пусть  $W_j(z, \lambda)$  — соответствующие ФМ. Имеем

$$W_1(z, \lambda) = W_2(z, \lambda) \Omega(\lambda). \quad (11)$$

В силу выбора ФСР для элементов  $\omega_{jk}(\lambda)$  матрицы  $\Omega(\lambda)$  справедливы тождества

$$\omega_{22}(\lambda) = \overline{\omega_{11}(\lambda)}, \quad \omega_{21}(\lambda) = \overline{\omega_{12}(\lambda)}.$$

Так как  $W_1(z, \lambda) = W_2(z + T, \lambda)$ , то

$$W_2(z + T, \lambda) = W_2(z, \lambda) \Omega(\lambda)$$

и мультипликаторы являются собственными значениями матрицы монодромии  $\Omega(\lambda)$ . Они определяются из уравнения

$$\rho^2 - 2\rho \operatorname{Re} \omega_{11} + |\omega_{11}|^2 - |\omega_{12}|^2 = 0,$$

и так как  $\rho_1 \rho_2 = 1$ , то справедливо тождество

$$|\omega_{11}(\lambda)|^2 = |\omega_{12}(\lambda)|^2 + 1. \quad (12)$$

Найдем асимптотику элементов  $\omega_{11}, \omega_{12}$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Имеем

$$w_1(z, \lambda) = \omega_{11} w_2(z, \lambda) + \omega_{21}(\lambda) w_3(z, \lambda), \quad w_3(z, \lambda) = \overline{w_2(\bar{z}, \lambda)}.$$

Условимся обозначать  $f_j(z)$  ветвь многозначной функции  $f(z)$ , отвечающей решению  $w_j$ .

Пусть  $z \rightarrow \infty$  в области  $D_2^*$  так, что  $\operatorname{Re} [iS(z_0, z)] \rightarrow -\infty$ ; тогда  $w_1 \rightarrow \infty$ ,  $w_2 \rightarrow \infty$ ,  $w_3 \rightarrow 0$ . В силу этого

$$\omega_{11}(\lambda) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w_1(z, \lambda)}{w_2(z, \lambda)}.$$

Заменяя решения их АР, получаем

$$\omega_{11}(\lambda) = \left[ \frac{q_2(z)}{q_1(z)} \right]^{1/4} \exp \{i\lambda [S_2(z_0 + T, z) - S_1(z_0, z)] [1 + O(\lambda^{-1})],$$

где в качестве  $z$  можно взять любую точку из области  $D_2^*$ , поскольку отношение корней и экспонента от  $z$  не зависит. В силу выбора ветвей  $q_j^{1/4}(z)$  отношение этих корней равно единице. В области  $D_2^* \cup D \cup \partial D$  ветви  $S_1, S_2$  совпадают, и поэтому

$$S_2(z_0 + T, z) - S_1(z_0, z) = \int_{z_0+T}^{z_0} \sqrt{q(t)} dt > 0,$$

где интеграл берется по ЛС  $l_2$ . В силу периодичности и вещественности функции  $q(x)$  этот интеграл равен

$$\alpha = \int_0^T \sqrt{q(x)} dx. \quad (13)$$

Окончательно получаем

$$\omega_{11}(\lambda) = e^{i\lambda\alpha} [1 + O(\lambda^{-1})].$$

Нетрудно получить АР для  $\omega_{11}(\lambda)$  по степеням  $\lambda^{-1}$ :

$$\omega_{11}(\lambda) = \exp \{iy_2(T, \lambda) + O(\lambda^{-\infty})\},$$

где  $y_2$  указано в формуле (6).

Пусть  $z \rightarrow \infty$  в области  $D_2$  так, что  $\operatorname{Re} [iS_1(z_0, z)] \rightarrow -\infty$ ; тогда  $w_1 \rightarrow \infty$ ,  $w_2 \rightarrow 0$ ,  $w_3 \rightarrow \infty$ . В силу этого

$$\omega_{21}(\lambda) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w_1(z, \lambda)}{w_3(z, \lambda)}.$$

Из определения решения  $w_3$  следует, что при  $z \in D_2$  фиксированном,  $\lambda \rightarrow +\infty$  справедливо

$$w_3(z, \lambda) = q_2^{-1/4}(z) \exp \{i\lambda S_2(\bar{z}_0 + T, z)\} [1 + O(\lambda^{-1})].$$

Фиксируем точку  $z_1 \in D_2$ , которая лежит над линией  $l_1$  и близко к ней. Значение  $q_j^{1/4}(z)$  мы получим, аналитически продолжив ветвь корня из точки  $x = 0$  вдоль пути  $\gamma_j$ . Так как АР (8) непригодно на ЛС  $l_2$ , то путь  $\gamma_1$  пройдет слева от точки  $z_0$ . Путь  $\gamma_2$  пройдет справа от точки  $z_0$ , так как АР для решения  $w_3$  пригодно на ЛС  $l_2$ .

Следовательно,  $[q_2(z_1)/q(z_1)]^{1/4} = i$ . Далее,

$$S_1(z_0, z) + S_2(\bar{z}_0 + T, z) = \int_{\bar{z}_0+T}^{z_0+T} \sqrt{q(t)} dt + \alpha = \beta + \alpha, \quad (14)$$

$$\beta = \int_{z_0}^{z_0} \sqrt{q(t)} dt > 0.$$

Окончательно получаем

$$\omega_{21}(\lambda) = i \exp\{-\lambda\beta - i\lambda\alpha\} [1 + O(\lambda^{-1})]. \quad (15)$$

Из (12)–(15) находим, что

$$\omega_{11}(\lambda) = \exp\{i(\lambda\alpha + \varphi(\lambda))\} \sqrt{1 + \exp\{-2\lambda\beta\}(1 + \psi(\lambda))}, \quad (16)$$

где  $\varphi(\lambda)$ ,  $\psi(\lambda)$  — AP по степеням  $\lambda^{-1}$ , которые начинаются с  $\lambda^{-1}$ , функции  $\varphi(\lambda)$ ,  $\psi(\lambda)$  вещественны.

**4. Асимптотика  $\Delta_n$ .** Пусть  $n$ -я лагуна есть  $(\lambda_{1n}, \lambda_{2n})$ ,  $\lambda_{1n} < \lambda_{2n}$ ; тогда AP для  $\lambda_{jn}$  по степеням  $n^{-1}$  совпадают и имеют вид (7). Ограничимся случаем, когда  $n$  четно. Тогда

$$\operatorname{Re} \omega_{11}(\lambda_{1n}) = \operatorname{Re} \omega_{11}(\lambda_{2n}) = 1$$

и потому

$$\cos[\alpha\lambda_{jn} + \varphi(\lambda_{jn})] = 1 - \frac{1}{2} \exp\{-2\beta\lambda_{jn}\} [1 + O(n^{-1})], \quad j = 1, 2. \quad (17)$$

Пусть  $\tilde{\lambda}_n$  — точка лагуны, в которой  $\cos[\alpha\lambda + \varphi(\lambda)] = 1$ ; тогда

$$\lambda_{1n} = \tilde{\lambda}_n - \alpha_n, \quad \lambda_{2n} = \tilde{\lambda}_n + \beta_n, \quad \alpha_n > 0, \quad \beta_n > 0.$$

Разлагая левые части уравнений (17) по формуле Тейлора в точке  $\tilde{\lambda}_n$  и складывая эти выражения, получаем

$$\Delta_n = \frac{2}{\alpha} \exp\left\{-\frac{n\lambda\beta}{\alpha}\right\} [1 + O(n^{-1})], \quad (18)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  указаны в (13), (14).

**5. Дополнения.** Пусть на кривой  $\Gamma_T^+ = \Gamma^+ \cap \{0 \leq \operatorname{Re} z \leq T\}$  имеются две простые точки поворота  $z_1, z_2$ . Тогда

$$\Delta_n = \frac{2|\cos(n\pi\gamma/\alpha) + O(n^{-1})|}{\alpha\sqrt{\beta+1}} \exp\left\{-\frac{n\lambda\beta}{\alpha}\right\}.$$

Здесь  $\alpha$  имеет тот же вид, что и выше,

$$\beta = \int_{z_1}^{z_1} \sqrt{q(z)} dz, \quad \gamma = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{q(z)} dz > 0.$$

Пусть  $q(z)$  — мероморфная функция, и пусть на  $\Gamma_T^+$  лежат одна простая точка поворота  $z_0$  и один простой полюс  $z_1$ , причем ЛС, соединяющая  $z_0$  и  $z_1$ , лежит в  $[D]$  (кривая  $\Gamma_T^+$  имеет тот же вид, что и выше). Тогда

$$\Delta_n = \frac{8 |\sin(n\pi\gamma/\alpha) + O(n^{-1})|}{\alpha^2 \sqrt{1+\beta}} \exp \left\{ -\frac{n\pi\beta}{\alpha} \right\},$$

где  $\alpha, \beta$  те же, что и в (13), (15),

$$\gamma = \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{q(t)} dt > 0.$$

Эти формулы доказаны с помощью матриц перехода, которые применяются для вычисления матрицы монодромии  $\Omega(\lambda)$ . В обоих этих случаях возникают явления резонансного характера.

ГЛАВА IV  
УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА  
С ТОЧКАМИ ПОВОРОТА

В этой главе рассматриваются уравнения вида

$$y'' + \lambda^2 q(x, \lambda^{-1}) y = 0, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

имеющие точки поворота. Приведены асимптотические формулы для решений, пригодные в вещественной или в комплексной окрестности точки поворота.

§ 1. Простая точка поворота. Вещественный случай

**1. Формальные асимптотические решения.** Рассмотрим уравнение

$$y'' - \lambda^2 q(x) y = 0, \tag{1}$$

где  $\lambda > 0$  — большой параметр,  $x \in I = [a, b]$ . Пусть выполнены условия:

1) Функция  $q(x)$  вещественна,  $q(x) \in C^\infty(I)$ .

2) Уравнение (1) имеет одну, и притом простую, точку поворота  $x_0$ ,  $a < x_0 < b$ .

Тогда  $q(x_0) = 0$ ,  $q'(x_0) \neq 0$ ; пусть  $q'(x_0) > 0$  для определенности. При малых  $|x - x_0|$  уравнение (1) можно приближенно заменить уравнением  $y'' - \lambda^2 q'(x_0)(x - x_0)y = 0$ , решения которого — функции Эйри  $w(\lambda^{2/3}(q'(x_0))^{2/3}(x - x_0))$ .

ФАР уравнения (1) будем искать в форме, предложенной Ф. Олвером [32]:

$$y = Aw(\lambda^{2/3}\xi(x)) + \lambda^{-1/3}Bw'(\lambda^{2/3}\xi(x)),$$

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} A_n(x), \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} B_n(x). \tag{2}$$

Здесь  $\xi(x)$ ,  $A_n(x)$ ,  $B_n(x)$  — неизвестные функции,  $w(t)$  — решение уравнения Эйри  $w'' - tw = 0$ . Подставляя (2) в уравнение (1) и приравнявая нулю коэффициенты при функциях  $w, w'$ ,

получаем

$$\lambda^2 A (\xi'^2 \xi - q) + 2\lambda B' \xi' \xi + \lambda B (\xi' \xi)' + A'' = 0,$$

$$\lambda^2 B (\xi'^2 \xi - q) + \lambda (2A' \xi' + A \xi'') + B'' = 0.$$

Подставим в эту систему АР для функций  $A(x)$ ,  $B(x)$  и приравняем нулю коэффициенты при степенях  $\lambda^{-1}$ ; тогда для функции  $\xi(x)$  получим уравнение

$$\xi'^2(x) \xi(x) = q(x). \quad (3)$$

Положим

$$\xi(x) = \left( \frac{3}{2} \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt \right)^{2/3} \equiv \left( \frac{3}{2} S(x_0, x) \right)^{2/3}. \quad (4)$$

Функция  $\xi(x)$  вещественна,  $\xi(x) \in C^\infty(I)$ ,  $\operatorname{sgn} \xi(x) = \operatorname{sgn}(x - x_0)$  и

$$\xi(x) \sim [q'(x_0)]^{2/3} (x - x_0), \quad x \rightarrow x_0.$$

Для функций  $A_n, B_n$  получаем рекуррентную систему уравнений

$$2 \sqrt{\xi' \xi} (B_n \sqrt{\xi' \xi})' + A''_{n-1} = 0,$$

$$2 \sqrt{\xi'} (A_n \sqrt{\xi'})' + B''_{n-1} = 0,$$

$$n = 0, 1, \dots, \quad A_{-1} = B_{-1} = 0.$$

В частности,  $A_0(x) = c [\xi'(x)]^{-1/2}$ . Функции  $A_n(x), B_n(x)$  обязаны быть гладкими при  $x \in I$ , что приводит к тождествам

$$A_{2n+1}(x) \equiv 0, \quad B_{2n}(x) \equiv 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Из рекуррентных соотношений находим

$$A_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}} \left[ c_n - \int_{x_0}^x \frac{B''_{n-1}(t)}{\sqrt{\xi'(t)}} dt \right], \quad (5)$$

$$B_n(x) = - \frac{1}{2 \sqrt{\xi(x) \xi'(x)}} \int_{x_0}^x \frac{A''_{n-1}(t)}{\sqrt{\xi(t) \xi'(t)}} dt,$$

где  $c_n$  — постоянные. В этих формулах  $\sqrt{\xi'(x)} > 0$  и для определенности  $\sqrt{\xi(x)} > 0$  при  $x > x_0$ ,  $\sqrt{\xi(x)} = i |\sqrt{\xi(x)}|$  при  $x < x_0$  (на самом деле выбор ветви  $\sqrt{\xi(x)}$  несуществен). Заметим, что нижний предел интегрирования в (5) — точка поворота  $x_0$ ; при любом другом выборе этого предела функции  $A_n, B_n$  будут иметь особенности в точке  $x_0$ . Окончательно получаем ФАР



уравнения (1):

$$y = \left[ \frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{2n}(x)}{\lambda^{2n}} \right] w(\lambda^{2/3}\xi(x)) + \\ + \lambda^{-4/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n+1}(x)}{\lambda^{2n}} w'(\lambda^{2/3}\xi(x)). \quad (6)$$

Другой вид ФАР был предложен Т. Черри [66]:

$$y = Aw(\lambda^{2/3}\xi), \quad A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)\lambda^{-n}, \quad \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(x)\lambda^{-n}. \quad (7)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1) и приравнявая нулю коэффициенты при  $w$ ,  $w'$ , получаем соотношения

$$\lambda^2 A (\xi \xi'^2 - q) + A'' = 0, \quad 2A' \xi' + A \xi'' = 0.$$

Заменяя функции  $A$ ,  $\xi$  их асимптотическими разложениями и приравнявая нулю коэффициенты при степенях  $\lambda^{-1}$ , получаем рекуррентную систему уравнений

$$\xi_0 \xi_0'' - q = 0, \quad 2A_0' \xi_0' + A_0 \xi_0'' = 0, \\ A_0 \xi_0' (\xi_1 \xi_0' + 2\xi_0 \xi_1') = 0, \dots,$$

из которой последовательно находятся функции  $\xi_0$ ,  $A_0$ ,  $\xi_1$ ,  $A_1$ , ... Функции  $\xi_0(x)$  и  $A_0(x)$  совпадают с найденными выше функциями  $\xi(x)$  и  $A(x)$ , но формулы для последующих членов разложения (7) оказываются более сложными, чем формулы (5). Другие способы построения ФАР приведены в п. 3.3.

**2. Функции Эйри.** Функциями Эйри называются решения уравнения Эйри

$$y'' - xy = 0. \quad (8)$$

**2.1. Интегральные представления и ряды.** Решения уравнения Эйри выражаются через функции Бесселя порядка  $1/3$ :

$$y(x) = \sqrt{x} Z_{1/3} \left( i \frac{2}{3} x^{3/2} \right).$$

Но поскольку уравнение Эйри играет важную роль в прикладных задачах и в асимптотической теории линейных дифференциальных уравнений, функции Эйри выделены в самостоятельный класс.

В литературе приняты два рода обозначений для функций Эйри:  $Ai(x)$ ,  $Bi(x)$  и  $v(x)$ ,  $w_1(x)$ ,  $w_2(x)$  (обозначения В. Фока) (мы будем использовать последние обозначения). Связь между этими функциями такова:

$$Ai(x) = \frac{v(x)}{\sqrt{\pi}}, \quad Bi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (w_1(x) + w_2(x)).$$

Функции  $Ai(x)$ ,  $Bi(x)$  вещественны при вещественных  $x$ .

Функции  $v(x)$ ,  $w_1(x)$ ,  $w_2(x)$  имеют интегральные представления:

$$v(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(xt+t^3/3)} dt,$$

$$w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{\infty e^{-2\pi i/3}}^0 + \int_0^{\infty} \right) e^{xt-t^3/3} dt,$$

$$w_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{\infty e^{2\pi i/3}}^0 + \int_0^{\infty} \right) e^{xt-t^3/3} dt.$$

Все функции Эйри — целые функции  $x$ . Справедливы тождества

$$v(z) = \frac{w_1(z) - w_2(z)}{2i}, \quad \overline{w_2(z)} = w_1(\bar{z}).$$

В частности, при вещественных  $x$  функция  $v(x)$  вещественна и  $\overline{w_2(x)} = w_1(x)$ .

Если  $y(x)$  — решение уравнения Эйри, то функция  $y(e^{2\pi i/3}x)$  также есть решение. Это приводит к тождествам типа

$$w_1(xe^{2\pi i/3}) = e^{i\pi/3} w_2(x), \quad w_2(xe^{-2\pi i/3}) = 2e^{i\pi/6} v(x).$$

Функция  $v$  разлагается в ряд

$$v(z) = \frac{1}{3^{2/3} \sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma((n+1)/3)}{n!} \sin \left[ \frac{2}{3}(n+1)\pi \right] (3^{1/3}z)^n,$$

сходящийся при всех  $z$ . Отметим также формулы

$$w_1(0) = \frac{2\sqrt{\pi} e^{-i\pi/6}}{3^{2/3} \Gamma(2/3)}, \quad w_1'(0) = \frac{2\sqrt{\pi} e^{-i\pi/6}}{3^{4/3} \Gamma(4/3)},$$

$$v(0) = \text{Im } w_1(0), \quad v'(0) = \text{Im } w_1'(0).$$

2.2. Асимптотические разложения. При вещественных  $x \rightarrow +\infty$  справедливы асимптотические разложения

$$w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{2x^{3/2}/3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-3n/2},$$

$$v(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{-2x^{3/2}/3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^{-3n/2}, \quad (9)$$

$$a_n = \frac{\Gamma(3n+1/2)}{(2n)!} 9^{-n}.$$

Эти разложения можно дифференцировать по  $x$  любое число раз. При вещественных  $x \rightarrow -\infty$  справедливы асимптотические

разложения

$$w_1(x) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} (-x)^{-1/4} \exp \left\{ i \left( \frac{2}{3} (-x)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\} \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} a_n (-x)^{-3n/2}, \quad (10)$$

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-x)^{-1/4} \operatorname{Im} \left\{ \exp \left\{ i \left( \frac{2}{3} (-x)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\} \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} a_n (-x)^{-3n/2} \right\},$$

где  $\sqrt{-x} > 0$ ,  $\sqrt[4]{-x} > 0$ ,  $a_n$  указаны в (9).

В частности, функция  $v(x)$  экспоненциально убывает при  $x \rightarrow +\infty$  и осциллирует при  $x \rightarrow -\infty$ :

$$v(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{-2x^{3/2}/3}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} |x|^{-1/4} \left[ \sin \left( \frac{2}{3} |x|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) + O(|x|^{-3/2}) \right], \quad x \rightarrow -\infty.$$

Функции  $w_1(x)$ ,  $w_2(x)$  сильно осциллируют при  $x < 0$  и экспоненциально возрастают при  $x \rightarrow +\infty$ .

Приведем асимптотические формулы для функций Эйри при комплексных  $z$ . Пусть  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  — лучи  $\arg z = \pi$ ,  $\arg z = \pi/3$ ,  $\arg z = -\pi/3$  (см. рис. 3). Эти лучи есть ЛС. Удалим из комплексной плоскости сектор  $S_2$ , содержащий ЛС  $l_2$ , т. е.  $|\arg z - \pi/3| \geq \varepsilon > 0$  вне  $S_2$ . Асимптотика функции  $w_1(z)$  вне  $S_2$  дается формулой (9), где ветви  $\sqrt[4]{z}$ ,  $\sqrt{z}$  положительны при положительных  $z$ . В секторе  $S_2$

$$w_1(z) = -w_1(ze^{2\pi i/3}) - w_1(ze^{-2\pi i/3}).$$

2.3. Нули функций Эйри. Все нули функции  $v(z)$  и ее производной — вещественные, простые и лежат на полуоси  $(-\infty, 0)$ . Все нули функций  $w_1(z)$ ,  $w_1'(z)$  лежат на луче  $\arg z = \pi/3$ , все нули функций  $w_2(z)$ ,  $w_2'(z)$  — на луче  $\arg z = -\pi/3$ , т. е. нули всех функций Эйри и их производных лежат на ЛС  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ .

Нули  $t_s$ ,  $t'_s$  функций  $v(x)$ ,  $v'(x)$  имеют следующую асимптотику:

$$t_s = \left[ \frac{3}{2} \pi \left( s - \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3} + O(s^{-4/3}),$$

$$t'_s = \left[ \frac{3}{2} \pi \left( s - \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3} + O(s^{-4/3}).$$

### 3. Асимптотика решений.

3.1. У р а в н е н и е (1). Пусть условия 1), 2) выполнены. Тогда при любом  $N \geq 1$  уравнение (1) имеет решение вида

$$y_0(x, \lambda) = \left[ \frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}} + \sum_{n=1}^N \frac{A_{2n}(x)}{\lambda^{2n}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{2N+2}}\right) \right] v(\lambda^{2/3}\xi(x)) + \\ + \lambda^{-4/3} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n+1}(x)}{\lambda^{2n+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{2N+2}}\right) \right] v'(\lambda^{2/3}\xi(x)). \quad (11)$$

Здесь  $v$  — функция Эйри — Фока, коэффициенты AP  $A_n, B_n$  определяются из (5), где  $c_n = 0$  при  $n \geq 1$ . Оценки остаточных членов равномерны по  $x \in I$ . AP (11) можно дифференцировать по  $x$  и по  $\lambda$  любое число раз, с сохранением равномерной по  $x \in I$  оценки остаточных членов.

Это замечание относится ко всем приведенным ниже AP. Главный член асимптотики имеет вид

$$y_0(x, \lambda) = \left[ \frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] v(\lambda^{2/3}\xi(x)) - \\ - \frac{1}{2\lambda^{4/3}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\xi'(x)\xi(x)}} \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{\sqrt{\xi'(t)}}\right)'' \frac{dt}{\sqrt{\xi'(t)\xi(t)}} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] v'(\lambda^{2/3}\xi(x)). \quad (12)$$

В частности, в точке поворота

$$y_0(x_0, \lambda) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{3^{2/3}\Gamma(2/3)(q'(x_0))^{2/3}}. \quad (13)$$

Решение  $y_0$  быстро осциллирует при  $x \leq x_0$ ; главный член асимптотики равен

$$y_0(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}} v(\lambda^{2/3}\xi(x)) + O\left(\frac{1}{\lambda^{4/3}}\right), \quad x \leq x_0.$$

Функция  $v(t)$  имеет бесконечно много нулей  $t_k, \dots < t_k < < t_{k-1} < \dots < t_1 < 0$ . Поэтому вблизи нулей  $x_k$  в главный член асимптотики необходимо включить слагаемое, содержащее  $v'$  — см. (12). При  $t \geq 0$   $v(t) \neq 0$ , и главный член асимптотики имеет вид

$$y_0(x, \lambda) = v(\lambda^{2/3}\xi(x)) \frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\lambda^{2/3}}\right) \right].$$

Уравнение (1) имеет также решения вида

$$y_j(x, \lambda) = \left[ \frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}} + \sum_{n=1}^N \frac{A_{2n}(x)}{\lambda^{2n}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{2N+2}}\right) \right] \left[ w_j(\lambda^{2/3}\xi(x)) + \right. \\ \left. + \lambda^{-4/3} \left[ \sum_{n=0}^N \frac{B_{2n}(x)}{\lambda^{2n}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{2N+2}}\right) \right] w'_j(\lambda^{2/3}\xi(x)) \right], \quad j = 1, 2, \quad (14)$$

где  $w_1, w_2$  — функции Эйри. Главный член асимптотики равен

$$y_j(x, \lambda) = w_j(\lambda^{2/3} \xi(x)) [1 + O(\lambda^{-2/3})].$$

Решения  $y_j$  быстро осциллируют при  $x \leq x_0$  и экспоненциально растут при  $x \geq x_0 + \delta$ ,  $\delta > 0$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Их можно выбрать комплексно сопряженными:  $y_2(x, \lambda) = \overline{y_1(x, \lambda)}$ .

Функции Эйри можно заменить их асимптотическими разложениями при условии, что  $\lambda^{2/3} |\xi(x)| \gg 1$ , т. е. при  $|x - x_0| \gg \lambda^{-2/3}$ . Поэтому толщина пограничного слоя, в котором формулы (11), (14) нельзя упростить, имеет порядок  $O(\lambda^{-2/3})$ .

3.2. Ф о р м у л ы с в я з и. Пусть  $\delta > 0$  фиксировано и не зависит от  $\lambda$ . Тогда при  $x \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$  для решений  $y_j$  справедливы АР того же вида, что и в гл. II, § 3:

$$y_1(x, \lambda) = \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi}} q^{-1/4}(x) e^{\lambda S} [1 + \lambda^{-1} \phi_1^+(x, \lambda)], \quad x \geq x_0 + \delta, \quad (15)$$

$$y_1(x, \lambda) = \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} |q(x)|^{-1/4} e^{i\lambda|S|} [1 + \lambda^{-1} \phi_1^-(x, \lambda)], \quad x \leq x_0 - \delta,$$

$$y_0(x, \lambda) = \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{2\pi}} q^{-1/4}(x) e^{-\lambda S} [1 + \lambda^{-1} \phi_0(x, \lambda)], \quad x \geq x_0 + \delta,$$

$$y_0(x, \lambda) = \frac{\lambda^{-1/6}}{2\sqrt{\pi}} |q(x)|^{-1/4} \exp\left\{i\lambda|S| - \frac{i\pi}{4}\right\} [1 + \lambda^{-1} \psi_+(x, \lambda)] - \\ - \exp\left\{-i\lambda|S| + \frac{i\pi}{4}\right\} [1 + \lambda^{-1} \psi_-(x, \lambda)], \quad x \leq x_0 - \delta. \quad (16)$$

В этих формулах  $S = \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt$ ,  $S > 0$  при  $x > x_0$ , и  $\psi_j^\pm$ ,  $\phi_j^\pm$  — АР по степеням  $\lambda^{-1}$ . Формулы (15), (16) называются *формулами связи*: с их помощью можно, зная АР решения по одну сторону точки поворота, найти АР решения по другую сторону.

Пусть  $I = (-\infty, b]$ , условия 1), 2) выполнены и  $q(x)$  — полином. Тогда АР вида (11), (14) справедливы при  $\lambda \rightarrow +\infty$  равномерно по  $x \in I$ . Кроме того, эти АР — двойные, т. е. они пригодны при  $\lambda > 0$  фиксированном,  $x \rightarrow -\infty$ . Это справедливо и в том случае, когда сходятся все интегралы  $\int_{-\infty}^x |\alpha_k(x)| dx$ ,  $k = 1, 2, \dots$

3.3. Д о п о л н и т е л ь н ы е п а р а м е т р ы. Рассмотрим уравнение

$$y'' - \lambda^2 q(x, \alpha) y = 0 \quad (17)$$

на отрезке  $I$ . Здесь  $\alpha$  — вещественный параметр,  $\alpha \in J = [-\alpha_0, \alpha_0]$ ,  $\alpha_0 > 0$ . Введем условия:

1) Функция  $q(x, \alpha)$  вещественна,  $q \in C^\infty(I \times J)$ .

2)  $q(x_0, 0) = 0$ ,  $q'_x(x_0, 0) \neq 0$ ,  $q'_\alpha(x_0, 0) \neq 0$  и  $q(x, 0) \neq 0$  при  $x \in I$ ,  $x \neq x_0$ .

Пусть  $q'_x(x_0, 0) > 0$ ,  $q'_\alpha(x_0, 0) < 0$  для определенности. Тогда при малых  $\alpha_0$  уравнение (17) имеет на отрезке  $I$  единственную, и притом простую, точку поворота  $x = x_0(\alpha)$ , где  $x_0(0) = 0$ ,  $x_0(\alpha) \in C^\infty(J)$ . Будем искать ФАР уравнения (17) в виде (2), где  $A_n, B_n, \xi$  — функции от  $(x, \alpha)$ . Тогда получим

$$\xi(x, \alpha) = \left( \frac{3}{2} \int_{x_0(\alpha)}^x \sqrt{q(t, \alpha)} dt \right)^{2/3}.$$

Коэффициенты  $A_n, B_n$  определяются формулами (5), в которых следует положить  $C_n = 0$ ,  $x_0 = x_0(\alpha)$ . Если  $\alpha_0$  достаточно мало, то  $A_n, B_n, \xi \in C^\infty(I \times J)$ . Уравнение (17) имеет решение вида

$$y_0(x, \lambda, \alpha) =$$

$$\begin{aligned} &= \left[ \frac{1}{\sqrt{\xi'_x(x, \alpha)}} + \sum_{n=1}^N \frac{A_n(x, \alpha)}{\lambda^n} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right) \right] v(\lambda^{2/3}\xi(x, \alpha)) + \\ &+ \lambda^{-1/3} \left[ \sum_{n=0}^N \frac{B_n(x, \alpha)}{\lambda^n} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right) \right] v'(\lambda^{2/3}\xi(x, \alpha)) \end{aligned} \quad (18)$$

и решения  $y_1, y_2$  такого же вида, но вместо  $v$  следует подставить  $w_1, w_2$ . Оценки остаточных членов равномерны по  $(x, \alpha) \in I \times J$ . Различие между формулами (6) и (17) состоит в том, что в первой из них обращаются в нуль коэффициенты  $A_{2n+1}$  и  $B_{2n}$ .

Во многих задачах возникает уравнение вида

$$y'' - \lambda^2 q(x, \lambda^{-1}) y = 0. \quad (19)$$

Пусть  $J$  — интервал  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  и выполнены условия:

- 1) Функция  $q(x, \varepsilon)$  вещественна,  $q \in C^\infty(I \times J)$ .
- 2) Справедливо асимптотическое разложение

$$q(x, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j(x) \varepsilon^j, \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

равномерное по  $x \in I$ . Здесь  $q_j(x) \in C^\infty(I)$ , АР можно дифференцировать по  $x$  любое число раз.

3) Функция  $q_0(x)$  удовлетворяет условиям 1), 2) из п. 1.

Тогда при  $\varepsilon_0 \ll 1$ ,  $\varepsilon \in J$ , уравнение (19) имеет единственную точку поворота  $x = x_0(\varepsilon)$ , где  $x_0(\varepsilon) \rightarrow x_0$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$  и справедливо АР

$$x_0(\varepsilon) = x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j x_j, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad x_1 = -\frac{q_1(0)}{q_0(0)}.$$

Уравнение (19) имеет решения  $y_0, y_1, y_2$ , для которых справедливы АР вида (18) при  $\alpha = \lambda^{-1}$ . Функция  $\xi(x, \varepsilon)$  должна удовлетворять уравнению (3); возьмем ее в виде

$$\xi(x, \varepsilon) = \left( \frac{3}{2} \int_{x_0(\varepsilon)}^{x+x_0(\varepsilon)-x_0} \sqrt{q(t, \varepsilon)} dt \right)^{2/3}.$$

Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty$  равномерно по  $x \in I$

$$\xi(x, \varepsilon) = \xi_0(x) [1 + \lambda^{-1} \xi_1(x) + O(\lambda^{-2})],$$

$$\xi_0(x) = \left( \frac{3}{2} \int_{x_0}^x \sqrt{q(t, 0)} dt \right)^{2/3},$$

$$\xi_1(x) = \frac{1}{3} \xi_0^{-1}(x) [q_0'(0)]^{-1} \int_{x_0}^x \frac{q_0'(0) q_1(t) - q_0'(t) q_1(0)}{t - x_0} dt.$$

Можно иначе построить ФАР уравнения (19). Будем искать ФАР в виде (2), функцию  $\xi(x)$  определим формулой (4), где  $q = q_0(x)$ . Тогда для коэффициентов  $A_n, B_n$  получим рекуррентные соотношения

$$2 \sqrt{\xi' \xi} (B_n \sqrt{\xi' \xi})' + A_{n-1}'' - \sum_{k=1}^{n+1} A_{n+1-k} q_k = 0,$$

$$2 \sqrt{\xi'} (A_n \sqrt{\xi'})' + B_{n-1}' - \sum_{k=1}^{n+1} B_{n+1-k} q_k = 0,$$

$$n = 0, 1, \dots, A_{-1} = B_{-1} = 0.$$

Функции  $A_n(x), B_n(x)$  обязаны быть гладкими на отрезке  $I$ . При  $n = 0$  получаем систему

$$2 \sqrt{\xi' \xi} (B_0 \sqrt{\xi' \xi})' - q_1 A_0 = 0,$$

$$2 \sqrt{\xi'} (A_0 \sqrt{\xi'})' - q_1 B_0 = 0,$$

откуда находим

$$A_0(x) = \frac{c_0}{\sqrt{\xi'(x)}} \operatorname{ch} \left[ \int_{x_0}^x \alpha(t) dt \right],$$

$$B_0(x) = \frac{c_1}{\sqrt{\xi'(x) \xi(x)}} \operatorname{sh} \left[ \int_{x_0}^x \alpha(t) dt \right],$$

$$\alpha(x) = \frac{q_1(x)}{2 \sqrt{q_0(x)}}.$$

Аналогично вычисляются высшие приближения.

3.4. Асимптотические формулы А. А. Дороницына [43]. Рассмотрим уравнение

$$y'' + [\lambda^2 q(x) + p(x)] y = 0 \quad (20)$$

на отрезке  $I = [a, b]$ ,  $a < 0 < b$ , где  $q(x)$  — вещественнозначная,  $p(x)$  — комплекснозначная функции. Пусть

$$q(x) = xr(x), \quad r(x) > 0, \quad x \in I,$$

и  $r(x) \in C^1(I)$ ,  $q(x) \in C(I)$ . Уравнение (20) имеет при  $x \in I$  единственную, и притом простую, точку поворота  $x = 0$ .

Рассмотрим ФСР  $\{U_1, U_2\}$  уравнения Эйри

$$U'' + tU = 0$$

такую, что

$$U_1(0) = 1, \quad U_1'(0) = 0, \quad U_2(0) = 0, \quad U_2'(0) = 1.$$

Эти функции можно выразить через  $Ai(t)$ ,  $Bi(t)$ :

$$U_1(t) = \frac{3^{2/3} \Gamma(2/3)}{2} \left[ Ai(t) + \frac{Bi(t)}{\sqrt{3}} \right],$$

$$U_2(t) = \frac{3^{1/3} \Gamma(1/3)}{2} \left[ -Ai(t) + \frac{Bi(t)}{\sqrt{3}} \right].$$

Пусть  $\xi(x)$  имеет вид (4), где  $x_0 = 0$ ,

$$\varphi(x, \lambda) = \lambda^{2/3} \xi(x), \quad f(x) = p(x) + \sqrt{\xi'(x)} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}} \right).$$

Уравнение (20) имеет при  $\lambda \geq \lambda_0 \gg 1$  ФСР  $\{y_1, y_2\}$  такую, что

$$y_j(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}} U_j(\lambda^{2/3} \xi(x)) \left[ 1 + \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{|q(t)|}} dt + O\left(\frac{1}{\lambda^{4/3}}\right) \right], \quad x \leq 0. \quad (21)$$

При  $x \geq 0$  имеем

$$y_1(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}} U_1(\lambda^{2/3} \xi(x)) + \frac{1}{\lambda \sqrt{\xi'(x)}} \left[ \frac{1}{2\sqrt{3}} U_1(\lambda^{2/3} \xi(x)) - \frac{\sqrt[3]{3} \Gamma^2(2/3)}{2\pi} U_2(\lambda^{2/3} \xi(x)) \right] \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{r(t)}} dt +$$

$$+ \frac{f(x)}{\lambda^{4/3} [\xi'(x)]^{5/2}} [U_1(\lambda^{2/3} \xi(x)) V_{12}(\lambda^{2/3} \xi(x)) - U_2(\lambda^{2/3} \xi(x)) V_{11}(\lambda^{2/3} \xi(x))] + o(\lambda^{-1/3} U(\lambda^{2/3} \xi(x))), \quad (22)$$

где обозначено

$$U(t) = \sqrt{U_1^2(t) + U_2^2(t)},$$

$$V_{11}(t) = Y_{11}(t) - \frac{3^{1/3} \Gamma(2/3)}{\pi} \sqrt{t}, \quad (23)$$

$$V_{12}(t) = Y_{12}(t) - \sqrt{\frac{t}{3}}, \quad V_{22}(t) = Y_{22}(t) + 1 - \frac{\Gamma^2(1/3)}{\pi 3^{1/3}} \sqrt{t},$$



$$\begin{aligned} Y_{11}(t) &= U_1'^2(t) + tU_1^2(t), \\ Y_{12}(t) &= U_1'(t)U_2'(t) + tU_1(t)U_2(t), \\ Y_{22}(t) &= U_2'^2(t) - 1 + tU_2^2(t). \end{aligned} \quad (23)$$

Решение  $y_2$  при  $x \geq 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} y_2(x, \lambda) &= \frac{U_2(\lambda^{2/3}\xi(x))}{\sqrt{\xi'(x)}} + \\ &+ \frac{1}{\lambda \sqrt{\xi'(x)}} \left[ \frac{\Gamma^2(1/3)}{2\pi^{3/2}} U_1(\lambda^{2/3}\xi(x)) - \frac{1}{2 \cdot 3^{1/2}} V_2(\lambda^{2/3}\xi(x)) \right] \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{q(t)}} dt + \\ &+ \frac{1}{\lambda^{4/3} \sqrt{\xi'(x)}} \left[ \frac{f(x)}{(\xi'(x))^2} U_1(\lambda^{2/3}\xi(x)) U_{22}(\lambda^{2/3}\xi(x)) - \right. \\ &\left. - U_2(\lambda^{2/3}\xi(x)) V_{12}(\lambda^{2/3}\xi(x)) - \frac{f(0)}{(\xi'(0))^2} U_1(\lambda^{2/3}\xi(x)) \right] + \\ &+ o(\lambda^{-4/3} U(\lambda^{2/3}\xi(x))). \end{aligned} \quad (24)$$

Эти асимптотические формулы, а также аналогичные АР для производных  $y_1'$ ,  $y_2'$  получены в [43].

**4. Более общая зависимость от параметра.** Рассмотрим уравнение

$$y'' - [\lambda^2 f(x, \lambda) + g(x, \lambda)] y = 0 \quad (25)$$

на интервале  $I: a_1 < x < a_2$ , где  $a_1, a_2$  могут быть конечными или бесконечными. Пусть при каждом фиксированном  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$  выполнены условия:

1) Функция  $f(x, \lambda) (x - x_0)^{-1}$ , где  $x_0 \in I$ , вещественнозначна, не обращается в нуль и принадлежит  $C^2(I)$ .

2) Функция  $g(x, \lambda)$  комплекснозначна,  $g \in C^2(I)$ .

Уравнение (25) имеет единственную, и притом простую, точку поворота  $x = x_0$ .

**4.1. Основные оценки.** Пусть  $f(x, \lambda) > 0$  при  $x > x_0$  для определенности. Функции

$$V(t) = 2^{5/6} 3^{1/6} \pi^{1/2} \text{Ai}((3/2)^{2/3} t),$$

$$\bar{V}(t) = 2^{5/6} 3^{-1/3} \pi^{1/2} \text{Bi}((3/2)^{2/3} t)$$

образуют ФСР эталонного уравнения

$$y'' - (3/2)^2 ty = 0,$$

причем  $V(0) = \bar{V}(0)$ . Введем вспомогательные функции  $\xi, f, \Omega$ :

$$\xi(x, \lambda) = - \left( \int_{x_0}^x |f(t, \lambda)|^{1/2} dt \right)^{2/3}, \quad a_1 < x \leq x_0,$$

$$\xi(x, \lambda) = \left( \int_x^{x_0} |f(t, \lambda)|^{1/2} dt \right)^{2/3}, \quad x_0 \leq x < a_1,$$

$$\bar{f}(x, \lambda) = (2/3)^2 |f(x, \lambda)| |\xi|^{-1}, \quad \Omega(t) = 1 + \sqrt{|t|}$$

и функцию контроля ошибки

$$h(x, \lambda) = \left[ \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda) \frac{d^2}{dx^2} \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda) - g(x, \lambda) \tilde{f}^{-1/2}(x, \lambda) \right] \frac{1}{\Omega(\lambda^{2/3}\xi)}.$$

Функция  $\xi(x, \lambda)$  строго монотонно возрастает при  $x \in I$ . Для эталонного уравнения имеем  $x_0 = 0$ ,  $g \equiv 0$ ,  $\xi = x$ ,  $\tilde{f} \equiv 1$ ,  $h \equiv 0$ .

Рассмотрим уравнение

$$\bar{V}(t) = V(t) \operatorname{tg} \pi/6.$$

Оно не имеет неотрицательных корней; пусть  $-t_0$  — наименьший по модулю отрицательный корень, так что  $t_0 \approx 0,279$ . Введем весовую функцию

$$E(t) = \sqrt{\bar{V}(t)/V(t)}, \quad t \geq -t_0; \quad E(t) = \sqrt{\operatorname{tg} \pi/6}, \quad t \leq -t_0,$$

которая непрерывна и не возрастает на вещественной оси. Положим

$$M(t) = \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} V^2(t) + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} \bar{V}^2(t) \right)^{1/2},$$

$$N(t) = \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} V'^2(t) + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} \bar{V}'^2(t) \right)^{1/2}$$

при  $t \leq -t_0$  и

$$M(t) = (2V(t) \bar{V}(t))^{1/2},$$

$$N(t) = \left[ \frac{V'^2(t) \bar{V}^2(t) + \bar{V}'^2(t) V^2(t)}{V(t) \bar{V}(t)} \right]^{1/2}$$

при  $t \geq -t_0$ . Заметим, что

$$M(t) \sim 2 \cdot 3^{-1/4} |t|^{-1/4}, \quad N(t) \sim (3/2) M(t), \quad |t| \rightarrow \infty.$$

Обозначим

$$\rho(x_1, x_2) = \left| \int_{x_1}^{x_2} |h(x, \lambda)| dx \right|.$$

Уравнение (25) имеет решения  $w_1, w_2$  такие, что

$$w_1(x, \lambda) = \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda) [\bar{V}(\lambda^{2/3}\xi) + \varepsilon_1],$$

$$w_2(x, \lambda) = \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda) [V(\lambda^{2/3}\xi) + \varepsilon_2]. \quad (26)$$

Для остаточных членов справедливы оценки

$$\frac{|\varepsilon_j(x, \lambda)|}{M(\lambda^{2/3}\xi)}, \quad \frac{\left| \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_j(x, \lambda) \right|}{\lambda^{2/3} \tilde{f}^{1/2}(x, \lambda) N(\lambda^{2/3}\xi)} \leq$$

$$\leq \frac{\sigma_j}{\rho} E^{\pm 1}(\lambda^{2/3}\xi) \left[ \exp \left\{ \frac{\delta}{\lambda^{2/3}} \rho(a_j, x) \right\} - 1 \right]. \quad (27)$$

Здесь  $j = 1, 2$ , знак плюс берется при  $j = 1$ ,

$$\begin{aligned}\delta &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{3} \Omega(t) M^2(t) \right), \\ \sigma_1 &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{3} \Omega(t) |\bar{V}(t)| E^{-1}(t) M(t) \right), \\ \sigma_2 &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{3} \Omega(t) |V(t)| E(t) M(t) \right).\end{aligned}$$

Эти оценки можно упростить, используя неравенства

$$\sigma_1 \leq \rho, \sigma_2 \leq \rho, |E(t)M(t)| \leq |\bar{V}(t)|, |E^{-1}(t)M(t)| \leq |V(t)|.$$

Именно,

$$|\varepsilon_1(x, \lambda)| \leq |\bar{V}(\lambda^{2/3}\xi)| \left[ \exp \left\{ \frac{\rho}{\lambda^{2/3}} \rho(a_1, x) \right\} - 1 \right], \quad (28)$$

$$|\varepsilon_2(x, \lambda)| \leq |V(\lambda^{2/3}\xi)| \left[ \exp \left\{ \frac{\rho}{\lambda^{2/3}} \rho(a_2, x) \right\} - 1 \right].$$

Отсюда видно, что если  $\lambda^{-2/3}\rho(a_1, a_2) = o(1)$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$ , то формулы (26), (27) принимают вид

$$\begin{aligned}w_j(x, \lambda) &= \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda) |V_j(\lambda^{2/3}\xi) + o(|V_j(\lambda^{2/3}\xi)|), \\ V_1 &= \bar{V}, V_2 = V.\end{aligned}$$

Оценки (26), (27) являются аналогами ВКБ-оценок (гл. II, § 2). Эти оценки и все последующие результаты п. 4 принадлежат Ф. Олверу [95].

4.2. Ф о р м у л ы с в я з и. Пусть выполнены дополнительные условия:

3)  $\int_{x_0}^x \sqrt{|f(t, \lambda)|} dt$  расходится при  $x \rightarrow a_1 + 0$  и при  $x \rightarrow a_2 - 0$ .

4) Сходится интеграл

$$\int_{a_1}^{a_2} \left| |f|^{-1/4} \frac{d^2}{dx^2} |f|^{-1/4} - g |f|^{-1/2} \right| dx.$$

Тогда при каждом фиксированном  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$  уравнение (25) имеет решения  $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$  такие, что

$$\begin{aligned}\tilde{w}_1(x, \lambda) &= |f(x, \lambda)|^{-1/4} \left[ \cos \left( \lambda \int_x^{x_0} |f(t, \lambda)|^{1/2} dt \right) + \frac{\pi}{4} + o(1) \right], \\ & \quad x \rightarrow a_1 + 0,\end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}\tilde{w}_2(x, \lambda) &= f^{-1/4}(x, \lambda) \exp \left\{ -\lambda \int_x^{x_0} \sqrt{|f(t, \lambda)|} dt \right\} [1 + o(1)], \\ & \quad x \rightarrow a_2 - 0.\end{aligned}$$

Эти решения единственным образом определяются своими асимптотиками. Формулы связи описывают асимптотику решения  $\tilde{w}_1$  при  $x \rightarrow a_2 - 0$  и решения  $\tilde{w}_2$  при  $x \rightarrow a_1 + 0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1(x, \lambda) &= (1+k) f^{-1/4}(x, \lambda) \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^{\infty} \sqrt{f(t, \lambda)} dt \right\} [1 + o(1)], \\ & \quad x \rightarrow a_2 - 0, \\ \tilde{w}_2(x, \lambda) &= \\ &= 2(1+\gamma) |f(x, \lambda)|^{-1/4} \left[ \cos \left( \lambda \int_x^{x_0} |f(t, \lambda)|^{1/2} dt - \frac{\pi}{4} - \beta \right) + o(1) \right], \\ & \quad x \rightarrow a_1 + 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь  $k, \gamma, \beta$  — постоянные,

$$\begin{aligned} |k| &\leq \sqrt{2} \frac{\sigma_1}{\rho} \left[ \exp \left\{ \frac{\rho}{\lambda^{2/3}} \rho(a_1, a_2) \right\} - 1 \right], \\ |\gamma|, \frac{2|\rho|}{\pi} &\leq \frac{\sigma_2}{\rho} \left[ \exp \left\{ \frac{\rho}{\lambda^{2/3}} \rho(a_1, a_2) \right\} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

4.3. Асимптотические оценки остаточных членов. Пусть функция  $f$  не зависит от  $\lambda$ , так что уравнение (25) имеет вид

$$y'' - [\lambda^2 f(x) + g(x, \lambda)] y = 0. \quad (32)$$

Пусть выполнены приведенные выше условия и при  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$  выполняются оценки

$$|g(x, \lambda)| \leq c\lambda^\alpha, \quad x \in I, \quad \int_{a_1}^{a_2} |g(x, \lambda)| |f(x)|^{-1/2} dx \leq c\lambda^\alpha,$$

где  $\alpha < 1$ . Тогда

$$\rho(a_1, a_2) \leq c\lambda^{\alpha-1/3}, \quad \alpha_0 = \max(\alpha, 0)$$

и из (28) следует, что

$$w_j(x, \lambda) = \tilde{f}^{-1/4}(x) [V_j(\lambda^{2/3}\xi) + O(\lambda^{\alpha_0-1} V_j(\lambda^{2/3}\xi))].$$

Постоянные  $k, \gamma, \beta$ , которые входят в формулы связи (30), имеют порядок  $O(\lambda^{\alpha_0-1})$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

## § 2. Простая точка поворота. Комплексный случай

1. Асимптотика решений в окрестности точки поворота. Рассмотрим уравнение

$$w'' - \lambda^2 q(z) w = 0, \quad (4)$$

где  $q(z)$  — голоморфная в окрестности  $U$  точки  $z = 0$  функция,  
 $q(0) = 0, q'(0) \neq 0.$  (2)

Точка  $z = 0$  является простой точкой поворота уравнения (1).

Асимптотические формулы для решений на интервале вещественной оси, приведенные в § 1, оказываются пригодными и в комплексной окрестности этой точки. Результаты приведены ниже; кроме того, будет рассмотрен иной, чем в § 1, подход к проблеме точки поворота, который был предложен в [107].

1.1. Э т а л о н н а я с и с т е м а. Рассмотрим систему из двух уравнений

$$\varepsilon w' = A(z, \varepsilon) w, \quad (3)$$

где матрица-функция  $A(z, \varepsilon)$  голоморфна по  $(z, \varepsilon)$  в области  $D: |z| \leq r, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ , так что

$$A(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z) \varepsilon^n.$$

Числа  $r, \varepsilon_0$  предполагаются достаточно малыми. Пусть

$$A_0(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Оказывается, что с помощью преобразования

$$w = T(z, \varepsilon) u \quad (5)$$

систему (3) можно привести к виду

$$\varepsilon u' = A_0(z) u. \quad (6)$$

Решения полученной системы равны

$$u_1 = w(\varepsilon^{-2/3} z), u_2 = \varepsilon^{1/3} w'(\varepsilon^{-2/3} z),$$

где  $w(t)$  — решение уравнения Эйри  $w'' - tw = 0$ . Матрица  $T(z, \varepsilon) \in C^\infty(D)$ , при каждом фиксированном  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  голоморфна по  $z$  при  $|z| \leq r$  и разлагается в асимптотический ряд

$$T(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(z) \varepsilon^n, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (7)$$

равномерный по  $z$ . Кроме того,  $\det T_0(0) = 1$ .

Покажем, как вычислить матрицы  $T_n(z)$ ; тем самым будут получены АР решений системы (3) в полной комплексной окрестности точки поворота  $z = 0$ . Подставляя (5), (7) в систему (3), получаем из (6) рекуррентную систему уравнений

$$A_0 T_0 - T_0 A_0 = 0, \quad (8)$$

$$A_0 T_n - T_n A_0 = \frac{d}{dz} T_{n-1} - \sum_{k=1}^n A_k T_{n-k}, \quad n \geq 1.$$

Из вида матрицы  $A_0(z)$  следует, что всякое решение первого из уравнений (8) имеет вид

$$T_0(z) = t_1(z) I + t_2(z) A_0(z), \quad (9)$$

где  $t_1(z)$ ,  $t_2(z)$  — произвольные функции.

Далее, матричное уравнение

$$A_0(z) X(z) - X(z) A_0(z) = F(z),$$

где  $A_0(z)$  имеет вид (4), разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\text{Sp } F(z) = 0, \quad \text{Sp } (F(z) A_0(z)) = 0.$$

Этот факт доказывается элементарно. Поэтому второе из уравнений (8) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\text{Sp} \left( \frac{dT_0}{dz} - A_1 T_0 \right) = 0, \quad \text{Sp} \left( A_0 \frac{dT_0}{dz} - A_0 A_1 T_0 \right) = 0,$$

что приводит к системе уравнений для функций  $t_1(z)$ ,  $t_2(z)$ :

$$\begin{aligned} t_1' &= at_1 + bt_2, & zt_2' &= bt_1 + \left( za - \frac{1}{2} \right) t_2, \\ a(z) &= \frac{1}{2} \text{Sp } A_1(z), & b(z) &= \frac{1}{2} \text{Sp } (A_0(z) A_1(z)). \end{aligned} \quad (10)$$

Эту систему можно записать в виде  $zt' = B(z)t$ , причем

$$B(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b(0) & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы  $B(0)$  равны  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -1/2$ , и потому система (10) имеет решение  $t(z)$ , голоморфное в точке  $z = 0$  (гл. I, § 2). Это решение можно нормировать условием  $t_1(0) = 1$ . Полученная матрица  $T_0(z)$  голоморфна в точке  $z = 0$ , и  $\det T_0(0) = 1$  (см. (9)). Аналогично доказывается, что матрицы  $T_1(z)$ ,  $T_2(z)$ , ... можно выбрать так, чтобы они были голоморфны в точке  $z = 0$  и удовлетворяли системе (8).

Проинтегрируем систему (10). Сделаем подстановку

$$t_1(z) = A(z) \tilde{t}_1(z), \quad t_2(z) = z^{-1/2} A(z) \tilde{t}_2(z),$$

$$A(z) = \exp \left\{ \int_0^z a(t) dt \right\}.$$

Тогда получим систему

$$\tilde{t}_1' = f\tilde{t}_2, \quad \tilde{t}_2' = f\tilde{t}_1, \quad f(z) = z^{-1/2} b(z).$$

Функции  $\tilde{t}_1(z)$ ,  $\tilde{t}_2(z)$  удовлетворяют уравнению

$$y'' = \frac{f'(z)}{f(z)} y' + f^2(z) y,$$

всякое решение которого имеет вид

$$y(z) = c_1 \exp \left\{ \int_0^z f(t) dt \right\} + c_2 \exp \left\{ - \int_0^z f(t) dt \right\}.$$

Если  $c_1 = c_2$ , то решение  $y(z)$  голоморфно в точке  $z = 0$ ; если  $c_1 = -c_2$ , то функция  $z^{-1/2} y(z)$  голоморфна в точке  $z = 0$ . Окончательно получаем

$$t_1(z) = A(z) \operatorname{ch} B(z), \quad t_2(z) = A(z) z^{-1/2} \operatorname{sh} B(z), \quad (11)$$

где

$$A(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^z \operatorname{Sp} A_1(t) dt \right\}, \quad (12)$$

$$B(z) = \frac{1}{2} \int_0^z t^{-1/2} \operatorname{Sp} (A_0(t) A_1(t)) dt.$$

Эталонная система (3) имеет при  $|z| \leq r$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$  решения вида

$$\begin{aligned} w_1(z, \varepsilon) &= [t_1(z) + O(\varepsilon)] w(\varepsilon^{-2/3} z) + \varepsilon^{1/3} [t_2(z) + O(\varepsilon)] w'(\varepsilon^{-2/3} z) \\ w_2(z, \varepsilon) &= [zt_2(z) + O(\varepsilon)] w(\varepsilon^{-2/3} z) + \varepsilon^{1/3} [t_1(z) + O(\varepsilon)] w'(\varepsilon^{-2/3} z). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $w(t)$  — любое решение уравнения Эйри, оценки остаточных членов равномерны по  $z$ ,  $|z| \leq r$ . Функции  $t_1(z)$ ,  $t_2(z)$  определены формулами (11), (12). Для этих решений существуют АР по степеням  $\varepsilon$ .

1.2. Понятие простой точки поворота системы (3). Рассмотрим систему (3), где  $A(z, \varepsilon)$  удовлетворяет всем условиям п. 1.1, за исключением того, что матрица  $A_0(z)$  имеет вид (4). Пусть  $z = 0$  — точка поворота системы (3), т. е. корни характеристического уравнения

$$p^2 - p \operatorname{Sp} A_0(z) + \det A_0(z) = 0$$

совпадают при  $z = 0$ . Пусть  $D(z)$  — дискриминант этого уравнения:

$$D(z) = (a_{11}(z) - a_{22}(z))^2 + 4a_{12}(z) a_{21}(z);$$

тогда  $D(0) = 0$ . Точка поворота  $z = 0$  называется *простой*, если  $D'(0) \neq 0$ , так что

$$D(0) = 0, \quad D'(0) \neq 0. \quad (14)$$

Сделаем подстановку

$$w(z) = \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int_0^z \operatorname{Sp} A_0(t) dt \right\} \tilde{w}(z);$$

тогда система (3) примет вид

$$\tilde{w}'(z) = \tilde{A}(z, \varepsilon) \tilde{w}, \quad \tilde{A}(z, \varepsilon) = A(z, \varepsilon) - \frac{1}{2} \text{Sp } A_0(z) I, \quad (15)$$

так что  $\text{Sp } \tilde{A}_0(z) \equiv 0$ . Нетрудно проверить, что условие (14) сохраняется, т. е.  $\tilde{D}(0) = 0$ ,  $\tilde{D}'(0) \neq 0$ . Имеем

$$\tilde{A}_0(z) = \begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & -a(z) \end{bmatrix}, \\ a^2(0) + b(0)c(0) = 0.$$

Собственные значения матрицы  $\tilde{A}_0(0)$  равны нулю, но  $\tilde{A}_0(0) \neq 0$ . Действительно, в противном случае  $a(0) = b(0) = c(0) = 0$  и  $\tilde{D}(z)$  имеет в точке  $z = 0$  нуль кратности не меньше 2, что противоречит условию  $\tilde{D}'(0) \neq 0$ . Поэтому матрица  $\tilde{A}_0(0)$  приводится к жордановой нормальной форме

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Покажем, что существует голоморфная в точке  $z = 0$  матрица  $T(z)$  такая, что  $\det T(0) \neq 0$  и

$$T^{-1}(z) \tilde{A}_0(z) T(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{D}(z) & 0 \end{bmatrix} \equiv \tilde{B}_0(z). \quad (10)$$

Из этого соотношения следует, что

$$T(z) = \begin{bmatrix} ay + bt & y \\ cy - at & t \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где  $y(z)$ ,  $t(z)$  — некоторые функции.

1) Пусть  $a(0) = 0$ ; тогда либо  $b(0) \neq 0$ ,  $c(0) = 0$ , либо  $b(0) = 0$ ,  $c(0) \neq 0$ . Ограничимся первым вариантом. Тогда можно положить

$$t(z) = 1, \quad y(z) = 0.$$

2) Пусть  $a(0) \neq 0$ ; тогда  $b(0) \neq 0$ ,  $c(0) = 0$ . Положим

$$y(z) = 1, \quad t(z) = 0;$$

тогда  $\det T(0) \neq 0$ .

Подстановка  $\tilde{w}(z) = T(z)v(z)$ , где  $T(z)$  имеет вид (17), приводит систему (15) к виду  $v' = \tilde{B}(z, \varepsilon)v$ , где  $\tilde{B}_0(z)$  имеет вид (16). Сделаем преобразование

$$v = P(z)u, \quad \xi = \xi(z),$$

$$P(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi(z) \end{bmatrix}, \quad \xi(z) = \left( \frac{3}{2} \int_0^z \sqrt{-D(t)} dt \right)^{2/3}. \quad (18)$$

По условию  $D(z) \sim az$ ,  $z \rightarrow 0$ ,  $a \neq 0$ , так что

$$\xi(z) \sim (-D'(0))^{1/3} z, \quad z \rightarrow 0.$$



Фиксируем значение кубического корня; тогда полученная ветвь функции  $\xi(z)$  будет голоморфна и однолистка в точке  $z = 0$ , так что  $\xi(z)$  взаимно однозначно отображает малую окрестность  $U$  точки  $z = 0$  на малую окрестность  $V$  точки  $\xi = 0$ . Система примет вид

$$\frac{du}{d\xi} = B(\xi, \varepsilon)u, \quad B_0(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \xi & 0 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где матрица  $B(\xi, \varepsilon)$  обладает теми же аналитическими свойствами по переменным  $\xi, \varepsilon$ , что и матрица  $A(z, \varepsilon)$  по переменным  $z, \varepsilon$ . Решения системы (19) имеют вид (13), где  $z$  следует заменить на  $\xi$ . Приведем связь между  $w$  и  $u$ :

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^z \text{Sp } A_0(t) dt \right\} \begin{bmatrix} ay + bt & \xi \\ cy - at & t\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$a = (a_{11} - a_{22})/2, \quad b = a_{12}, \quad c = a_{21}$$

и  $a_{jk}(z)$  — элементы матрицы  $A_0(z)$ . Вид функций  $y(z), t(z), \xi(z)$  был указан выше.

1.3. У р а в н е н и е (1). Замена  $\xi = \xi(z), w = \tilde{w}/\xi'$ , где  $\xi(z)$  имеет вид (18), приводит уравнение (1) к виду

$$\tilde{w}''_{\xi\xi} - [\lambda^2\xi + f(\xi)]\tilde{w} = 0, \quad f(\xi) = \frac{1}{2} \frac{\xi'''}{\xi'^3} - \frac{3}{4} \frac{\xi''^2}{\xi'^4}. \quad (21)$$

Полученное уравнение эквивалентно системе вида (3), (4):

$$\varepsilon \begin{bmatrix} \tilde{w} \\ \varepsilon\tilde{w}' \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \xi & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon^2 f(\xi) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{w}' \end{bmatrix}, \quad (22)$$

где  $\varepsilon = \lambda^{-1}$ . Полученные в § 1 асимптотические формулы (например, (13), (14)) пригодны в малой окрестности точки поворота  $z = 0$ .

**2. Глобальная асимптотика решений.** Рассмотрим уравнение (1), где  $q(z)$  — полином степени  $n \geq 1$ , для простоты, и  $z = 0$  — простая точка поворота. Из точки  $z = 0$  выходят три ЛС  $l_1, l_2, l_3$ ;  $l_2$  лежит слева от  $l_1, l_3$  — слева от  $l_2$ .

Пусть  $D$  — каноническая область,  $D$  содержит ЛС  $l_1, \partial D \supset l_2 \cup l_3, U$  — малая окрестность точки  $z = 0$ . Функция  $\xi = \xi(z)$  взаимно однозначно отображает область  $D$  на сектор  $S$  в комплексной плоскости с вершиной в точке  $\xi = 0$ , раствором  $4\pi/3$  и с конечным числом разрезов — образов граничных ЛС. Нормируем функцию  $\xi(z)$  условием:  $S$  есть сектор  $\pi/3 < \arg \xi < 5\pi/3$ . Линии  $l_1, l_2, l_3$  отображаются соответственно в лучи  $\arg \xi = \pi, \arg \xi = 5\pi/3, \arg \xi = \pi/3$ . Пусть  $D_\varepsilon$  — область  $D$ , из которой удалены окрестности всех граничных ЛС (гл. III, § 3, п. 2.1),  $\tilde{D} = D_\varepsilon \cup U$ , где  $U$  — малая окрестность точки  $z = 0$ .

Уравнение (1) имеет в области  $\tilde{D}$  ФСР

$$w_j(z, \lambda) = w_j(\lambda^{2/3}\xi(z))A_{jN}(z, \lambda) + \lambda^{-1/3}w_j(\lambda^{2/3}\xi(z))B_{jN}(z, \lambda), \quad (23)$$

где  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$  — функции Эйри — Фока (§ 1), выбор ветви функции  $\xi(z)$  указан выше. Далее,

$$A_{jN}(z, \lambda) = 1 + \sum_{k=1}^N \lambda^{-k} A_k(z) + \lambda^{-N-1} R_{jN}(z, \lambda),$$

$$B_{jN}(z, \lambda) = \sum_{k=0}^N \lambda^{-k} B_k(z) + \lambda^{-N-1} \tilde{R}_{jN}(z, \lambda),$$

функции  $A_k(z)$ ,  $B_k(z)$  те же, что и в (2) § 1. При  $z \in \bar{D}$  справедливы оценки

$$|A_k(z)| \leq c_k (1 + |z|)^{-\alpha_k}, \quad |B_k(z)| \leq c_k (1 + |z|)^{-\alpha_k - (n+2)/6},$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \left( \frac{n-1}{3} + k \right).$$

Для остаточных членов при  $z \in \bar{D}$ ,  $\lambda \geq \lambda_0 > 1$  справедливы оценки

$$|R_{jN}| \leq c_{N+1} (1 + |z|)^{-\alpha_{N+1}},$$

$$|\tilde{R}_{jN}| \leq c_{N+1} (1 + |z|)^{-\alpha_{N+1} - (n+2)/6}.$$

Число  $N \geq 0$  можно взять любым, эти АР можно дифференцировать по  $z$  и по  $\lambda$  любое число раз.

Качественное поведение решений таково. Если  $z \in D$ ,  $z \rightarrow \infty$  и  $\pi < \arg \xi(z) < 5\pi/3$ , то решение  $w_1(z, \lambda)$  экспоненциально убывает при каждом фиксированном  $\lambda > 0$ . При  $z \rightarrow \infty$ ,  $\pi/3 < \arg \xi(z) < \pi$  решение  $w_1(z, \lambda)$  экспоненциально растет. Эти утверждения справедливы для решения  $w_2(z, \lambda)$ , если поменять местами указанные секторы.

Асимптотические разложения вида (23) справедливы и в том случае, если  $q(z)$  — целая функция и выполняются условия § 4 гл. III.

### § 3. Некоторые эталонные уравнения

#### 1. Решения первого рода. Рассмотрим уравнение

$$w'' - \frac{m^2}{4} z^{m-2} w = 0, \quad m > 0. \quad (1)$$

Ветви всех функций вида  $z^\alpha$  выбраны в плоскости с разрезом по полуоси  $(-\infty, 0]$  так, что  $z^\alpha > 0$  при  $z \in (0, +\infty)$ . Число  $m$  может быть нецелым.

Это уравнение при  $m = 3$  есть уравнение Эйри и возникает при исследовании асимптотики решений уравнения второго порядка в окрестности простой точки поворота (§ 1). При  $m \geq 4$  целое число  $z = 0$  является точкой поворота порядка  $m - 2$  для уравнения (1), при  $m = 1$  — точкой поворота порядка  $-1$  и одновременно регулярной особой точкой типа  $R_1$ .

Уравнение (1) имеет решение

$$U(z) = \sqrt{2z/\pi} K_{1/m}(z^{m/2}), \quad (2)$$

где  $K$  — функция Макдональда [22].

Приведем асимптотические формулы для решения  $U(z)$ .  
Имеем

$$U(0) = \frac{2^{(2-m)/(2m)}}{\pi^{1/2}} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right). \quad (3)$$

Главный член асимптотики  $U'(z)$  при  $z \rightarrow 0$  равен

$$-\frac{2^{(2-5m)/(2m)}}{\pi^{1/2}} \Gamma\left(\frac{1}{m} - 1\right) z^{m-1}, \quad 0 < m < 1; \quad (4)$$

$$\frac{\ln z}{(8\pi)^{1/2}}, \quad m = 1; \quad \frac{2^{-(2+m)/(2m)}}{\pi^{1/2}}, \quad m > 1.$$

Если  $z \rightarrow \infty$ ,  $|\arg z| \leq (3 - \delta)\pi/m$ , то

$$U(z) \sim z^{1/2-m/4} \exp\{-z^{m/2}\}, \quad U'(z) \sim -\frac{m}{2} z^{m/4-1/2} \exp\{-z^{m/2}\}, \quad (5)$$

где  $\delta$  — любая постоянная такая, что  $0 < \delta < 1$ .

В секторе  $|\arg z| \leq 2\pi/m$  имеют место более точные оценки:

$$U(z) = z^{1/2-m/4} \exp\{-z^{m/2}\} [1 + \theta_0(z)],$$

$$\frac{d}{dz} (z^{m/4-1/2} U(z)) = -\frac{m}{2} z^{m/4-1/2} \exp\{-z^{m/2}\} [1 + \theta_1(z)]. \quad (6)$$

Для остаточных членов справедливы оценки

$$|\theta_j(z)| \leq \theta(z^{m/2}), \quad j = 0, 1, \quad (7)$$

$$\theta(z) = \exp\left\{\left|\frac{\pi(4-m^2)}{8m^2z}\right|\right\} - 1.$$

В частности, при  $j = 0, 1$  имеем

$$\theta_j(z) = O(z^{-m/2}), \quad z \rightarrow \infty, \quad |\arg z| \leq 2\pi/m.$$

Решение  $U(x)$  экспоненциально убывает при  $x$  вещественных,  $x \rightarrow +\infty$ , и при  $m = 3$  выражается через функцию Эйри — Фока  $v(x)$  (§ 1). Всякое решение уравнения (1), не пропорциональное  $U(x)$ , экспоненциально растет при  $x \rightarrow +\infty$ .

## 2. Решения второго рода. Функции

$$U_j(z) = U(ze^{-2j\pi i/m}), \quad j = 0, \pm 1, \dots, \quad (8)$$

являются решениями уравнения (1) и стремятся к нулю при  $z \rightarrow \infty$ ,  $z \in S_j$ , где  $S_j$  — сектор

$$(2j - 1)\pi/m \leq \arg z \leq (2j + 1)\pi/m. \quad (9)$$

Лучи  $\arg z = (2j - 1) \pi/m$  есть ЛС уравнения (1). Справедливы асимптотические формулы

$$U_j(z) = \exp \left\{ ij \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m} \right) \right\} z^{1/2-m/4} \exp \{ - (ze^{-2\pi ji/m})^{m/2} \} [1 + \theta_j^0(z)],$$

$$\frac{d}{dz} [z^{m/4-1/2} U_j(z)] =$$

$$= - \frac{m}{2} \exp \left\{ - ij \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m} \right) \right\} z^{m/2-1/4} \exp \{ - (ze^{-2\pi ji/m})^{m/2} \} \times$$

$$\times [1 + \theta_j^1(z)]$$

в секторе

$$(2j - 2) \pi/m \leq \arg z \leq (2j + 2) \pi/m. \quad (11)$$

Для остаточных членов  $\theta_j^k(z)$  имеет место оценка (7).

Вронскиан пары таких решений равен

$$W(U_j(z), U_k(z)) = im \exp \{ - (j + k)\pi i/m \} \lambda_{jk}, \quad (12)$$

$$\lambda_{jk} = \frac{\sin((k-j)\pi/m)}{\sin(\pi/m)}.$$

Эта формула верна при всех  $m$ ; если  $1/m$  — целое, то

$$\lambda_{jk} = (-1)^{(k-j-1)m} (k - j).$$

Решения  $U_j(z)$ ,  $U_k(z)$  образуют ФСР, если

- 1)  $1/m$  — целое,  $k \neq j$ ;
- 2)  $1/m$  — нецелое,  $k \neq j \pmod{m}$ .

Если  $m \geq 2$  — целое, то имеется ровно  $m$  секторов  $S_j$  вида (9) и ровно  $m$  различных решений  $U_j(z)$ .

**3. Формулы связи.** Любая тройка решений  $U_j(z)$ ,  $U_k(z)$ ,  $U_l(z)$  связана соотношением

$$\sin \frac{(k-l)\pi}{m} e^{j\pi i/m} U_j(z) + \sin \frac{(l-j)\pi}{m} e^{k\pi i/m} U_k(z) +$$

$$+ \sin \frac{(j-k)\pi}{m} e^{l\pi i/m} U_l(z) = 0. \quad (13)$$

Отметим важный частный случай:

$$U_j(z) = \mp e^{(k-j\pm 1)\pi i/m} \lambda_{jk} U_{k\pm 1}(z) \pm e^{(k-j)\pi i/m} \lambda_{j,k\pm 1} U_k(z). \quad (14)$$

Формулы связи в сочетании с формулами (10) позволяют найти асимптотику любого решения  $U_j(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  в любом секторе  $S_j$ .

#### § 4. Кратные и дробные точки поворота

**1. Формальные асимптотические решения.** Рассмотрим уравнение

$$y'' - [\lambda^2 q(x) + r(x)] y = 0 \quad (1)$$

на интервале  $I = (0, a]$ ,  $a > 0$ . Введем условия:

1) Функция  $q(x)$  вещественнозначна,  $q(x) \in C^\infty(I)$ ,  $r(x) \in C^\infty$  при  $x \in [0, a]$ .

2)  $q(x) = x^{m-2}q_1(x)$ ,  $m > 0$ , функция  $q_1(x)$  не обращается в нуль при  $x \in [0, a]$ .

Число  $m$  может не быть целым. Если  $m \geq 3$  — целое, то  $x = 0$  — точка поворота порядка  $m - 3$ . Перенесем это определение на все значения  $m > 0$ .

При малых  $x > 0$  уравнение (1) можно приближенно заменить уравнением

$$y'' - \lambda^2 x^{m-2} q_1(0) y = 0.$$

Поэтому будем искать ФАР уравнения (1) в таком же виде, как и в § 1, (2):

$$y = Aw(\lambda^{2/m}\xi) + \lambda^{-1+2/m}Bw'(\lambda^{2/m}\xi), \quad (2)$$

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} A_n(x), \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} B_n(x),$$

где  $\xi(x)$ ,  $A_n(x)$ ,  $B_n(x)$  — неизвестные функции. В качестве функции  $w(t)$  возьмем решение эталонного уравнения (1) из § 3:

$$w'' = \frac{m^2}{4} t^{m-2} w. \quad (3)$$

Подставляя (2) в (1) и приравнявая нулю коэффициенты при  $w$ ,  $w'$ , получаем

$$\begin{aligned} \lambda^2 A \left( q - \frac{m^2}{4} \xi'^2 \xi^{m-2} \right) + \lambda \frac{m^2}{4} (2B' \xi' \xi^{m-2} + B(\xi' \xi^{m-2})') + (A'' - rA) &= 0, \\ \lambda^2 B \left( \frac{m^2}{4} \xi' \xi^{m-2} - q \right) + \lambda (2A' \xi' + A\xi'') + B'' &= 0. \end{aligned}$$

Выберем функцию  $\xi(x)$  так, чтобы коэффициент при  $\lambda^2 A$  обратился в нуль; тогда получим уравнение для  $\xi(x)$ . Возьмем эту функцию в виде

$$\xi(x) = \left[ \int_0^x \sqrt{q(t)} dt \right]^{2/m} \equiv (S(0, x))^{2/m}, \quad (4)$$

где  $S(0, x)$  — функция, введенная в гл. II, § 1. Имеем

$$\xi(x) \sim \left( \frac{2}{m} q_1(0) \right)^{1/m} x, \quad x \rightarrow +0. \quad (5)$$

Выбор ветви функции  $\xi(x)$  определяется выбором значения  $(q_1(0))^{1/m}$ . Функция  $\xi(x)$  бесконечно дифференцируема при  $0 \leq x \leq a$ , функция  $|\xi(x)|$  строго монотонно возрастает.

Для функций  $A_n(x)$ ,  $B_n(x)$  получаем рекуррентную систему уравнений

$$\begin{aligned} 2\sqrt{f}(B_n \sqrt{f})' + A_{n-1}'' - rA_{n-1} &= 0, \\ 2\sqrt{\xi'}(A_n \sqrt{\xi'})' + B_{n-1}'' - rB_{n-1} &= 0, \\ f = \frac{m^2}{4} \xi'(x) \xi^{m-2}(x) = \frac{q(x)}{\xi'(x)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Эта система того же типа, что и система из § 1, так что

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \frac{c_0}{\sqrt{\xi'(x)}}, \\ A_n(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\xi'(x)}} \left[ c_n + \int_0^x \frac{B_{n-1}''(t) - r(t) B_{n-1}(t)}{\sqrt{\xi'(t)}} dt \right], \\ B_n(x) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi'(x)}{q(x)}} \int_0^x \frac{A_{n-1}''(t) - r(t) A_{n-1}(t)}{\sqrt{q(t)}} \sqrt{\xi'(t)} dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть функция  $q_1(z)$  голоморфна в малой окрестности  $U$  точки  $z = 0$ ,  $\mathbf{R}^-$  — полуось  $(-\infty, 0]$ . Ветвь функции  $z^{m-2}$  при нецелом  $m$  в области  $U \setminus \mathbf{R}^-$  выбрана положительной при  $z \in U$ ,  $z > 0$ . Тогда построенная выше функция  $\xi(z)$  голоморфна в  $U \setminus \mathbf{R}^-$ . Если  $m$  — целое число, то функция  $\xi(z)$  голоморфна в области  $U$ .

**2. Осциллирующие решения.** Рассмотрим уравнение

$$y'' + [\lambda^2 x^{m-2} p(x) + q(x)] y = 0 \quad (8)$$

при следующих условиях:

1)  $m > 0$ ,  $p(x) > 0$  при  $x \in I = [0, a]$ ,  $a > 0$ ;

2)  $p(x) \in C^2(I)$ ,  $q(x) \in C^1(I)$ .

Приведем асимптотические формулы А. А. Дородницына [43]. Вместо  $\xi(x)$  возьмем функцию

$$\omega(x) = \left( \frac{m}{2} \int_0^x \sqrt{t^{m-2} p(t)} dt \right)^{2/m}. \quad (9)$$

**2.1. Решения эталонного уравнения.** Уравнение

$$U'' + t^{m-2} U = 0$$

имеет ФСР

$$U_1(t) = m^{-1/m} \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) \sqrt{t} J_{-1/m}\left(\frac{2}{m} t^{m/2}\right), \quad (10)$$

$$U_2(t) = m^{-1/m} \Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right) \sqrt{t} J_{1/m}\left(\frac{2}{m} t^{m/2}\right).$$

При  $m = 1/n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , в качестве  $U_1(t)$  возьмем функцию

$$U_1(t) = -\frac{\pi n^n}{(n-1)!} \sqrt{t} N_n(2nt^{1/(2n)}). \quad (11)$$

Эти решения разлагаются в ряды

$$\begin{aligned} U_2(t) = t \left[ 1 - \frac{t^m}{1! m(m+1)} + \frac{t^{2m}}{2! m^2(m+1)(2m+1)} - \right. \\ \left. - \frac{t^{3m}}{3! m^3(m+1)(2m+1)(3m+1)} + \dots \right], \end{aligned}$$

$$U_1(t) = 1 - \frac{t^m}{1! m(m-1)} + \frac{t^{2m}}{2! m^2(m-1)(2m-1)} - \frac{t^{3m}}{3! m^3(m-1)(2m-1)(3m-1)} + \dots, \quad m \neq \frac{1}{n}, \quad (12)$$

$$U_1(t) = 1 + \frac{n^2}{1!(n-1)} t^{1/n} + \frac{n^4 t^{2/n}}{2!(n-1)(n-2)} + \dots \\ \dots + \frac{n^{2(n-1)} t^{1-1/n}}{(n-1)!(n-1)!} + \frac{n^{2n} t}{n!(n-1)!} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) + \dots \\ \dots - \frac{2n^{2n}}{(n-1)!} \left( \frac{1}{2n} \ln t + \ln n + C \right) t \left[ \frac{1}{n!} - \frac{n^2}{1!(n-1)!} t^{1/n} + \dots \right], \\ m = \frac{1}{n},$$

где  $C$  — постоянная Эйлера. При  $t \rightarrow +\infty$  справедливы асимптотические формулы

$$U_1(t) = m^{(m-2)/(2m)} \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-(m-2)/4} \times \\ \times \left\{ \cos \theta_-(t) [1 + O(t^{-m})] + \frac{m^2 - 4}{16m} t^{-m/2} \sin \theta_-(t) [1 + O(t^{-m})] \right\}, \\ m \neq \frac{1}{n}, \quad (13)$$

$$U_2(t) = m^{-(m-2)/(2m)} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-(m-2)/4} \left\{ \sin \theta_+(t) [1 + O(t^{-m})] - \right. \\ \left. - \frac{m^2 - 4}{16m} t^{-m/2} \cos \theta_+(t) [1 + O(t^{-m})] \right\},$$

где обозначено

$$\theta_{\pm}(t) = \frac{2}{m} t^{m/2} \pm \frac{\pi(m-2)}{4m}.$$

При  $m = 1/n$  имеем

$$U_1(t) = - \frac{\sqrt{\pi} n^{n-1/2}}{(n-1)!} t^{1/2-1/(4n)} \left[ \sin \left( 2nt^{1/(2n)} - \frac{1}{2} \pi n - \frac{\pi}{4} \right) [1 + O(t^{-1/n})] + \right. \\ \left. + \frac{4n^2 - 1}{16n} t^{-1/(2n)} \cos \left( 2nt^{1/(2n)} - \frac{1}{2} \pi n - \frac{\pi}{4} \right) [1 + O(t^{-1/n})] \right]. \quad (14)$$

Введем обозначения

$$Y_j(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}} U_j(\lambda^{2/m} \omega(x)), \\ U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}, \quad Y' = \sqrt{Y_1'^2 + Y_2'^2}, \\ f(x) = q(x) + \sqrt{\omega'(x)} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}}. \quad (16)$$

2.2. Метод исследования. Полагая  $y(x) = Y_j(x) + u_j(x)$ , для  $u_j(x)$  получаем интегральное уравнение

$$u_j(x) = \lambda^{-2/m} \int_0^x K(x, \tau) Y_j(\tau) d\tau + \lambda^{-2/m} \int_0^x K(x, \tau) u_j(\tau) d\tau, \quad j = 1, 2,$$

ядро которого имеет вид

$$K(x, \tau) = f(\tau) [Y_1(x) Y_2(\tau) - Y_1(\tau) Y_2(x)].$$

Из асимптотики функций  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$  следует, что эти функции ограничены на полуоси  $0 \leq t < \infty$  при  $m \geq 2$ , и интегральное уравнение можно решать методом последовательных приближений. Если же  $0 < m < 2$ , то функции  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$  неограничены на полуоси  $0 \leq t < \infty$ , но ограничены функции  $\lambda^{(m-2)/(2m)} U_{1,2}(\lambda^{2/m} \omega(x))$  при  $\lambda > 0$ ,  $x \geq 0$ . В этом случае к интегральному уравнению также применим метод последовательных приближений.

В первые приближения входят интегралы вида

$$Y_{jk}(x) = \int_0^x U_j(t) U_k(t) dt. \quad (17)$$

Асимптотические формулы для решений существенно зависят от того, сходятся ли эти интегралы при  $x > 0$  и являются ли величины  $Y_{jk} (+\infty)$  конечными или бесконечными. Приходится различать пять случаев: 1)  $m > 4$ ; 2)  $m = 4$ ; 3)  $2 \leq m < 4$ ; 4)  $1 < m \leq 2$ ; 5)  $0 < m \leq 1$ .

2.3.  $m > 4$ . Уравнение (8) имеет ФСР вида

$$y_j(x) = Y_j(x) + \lambda^{-4/m} \left\{ \frac{f(x)}{[\omega'(x)]^2} [Y_1(t) V_{j2}(t) - Y_2(t) V_{j1}(t)] + \frac{f(0)}{[\omega'(0)]^2} [C_{j2} Y_1(t) - C_{j1} Y_2(t)] \right\} + o(\lambda^{-4/m} U(t)). \quad (18)$$

Здесь обозначено

$$t = \lambda^{2/m} \omega(x), \quad V_{jk}(t) = Y_{jk}(t) - Y_{jk}(\infty), \quad C_{jk} = Y_{jk}(\infty),$$

$$C_{11} = \pi \operatorname{cosec} \frac{\pi}{m} m^{-(m-2)/m} \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m-4}{m}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m-2}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m-3}{m}\right)}, \quad (19)$$

$$C_{12} = C_{21} = \pi \operatorname{cosec} \frac{\pi}{m} m^{-2(m-2)/m} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m-4}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-3}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m-2}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)}$$

$$C_{22} = m^{(3m-4)/m} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{3}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m-4}{m}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m-2}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)}.$$



Аналогичные формулы справедливы для  $y_j'$ : в (18) следует заменить  $Y_j$  на  $Y_j'$  и в остаточном члене  $U$  на  $Y'$ .

2.4.  $2 \leq m < 4$ . В этом случае асимптотика ФСР имеет вид

$$y_j(x) = Y_j(x) + \frac{1}{\lambda} \int_0^x \frac{f(t) dt}{V p(t)} [C_{j1} Y_1(x) + C_{j2} Y_2(x)] + \\ + O[\lambda^{-4/m} U(\lambda^{2/m} \omega(x))], \quad j = 1, 2, \quad (20)$$

$$C_{11} = -C_{22} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{m},$$

$$C_{12} = -\frac{1}{2\pi} m^{-(m-2)/m} \Gamma^2\left(\frac{m-1}{m}\right),$$

$$C_{21} = \frac{1}{2\pi} m^{-(m-2)/m} \Gamma^2\left(\frac{1}{m}\right).$$

Асимптотические формулы для  $y_j'$  получаются из этих формул заменой  $Y_j$  на  $Y_j'$  и  $U$  на  $Y'$  в остаточном члене.

2.5.  $1 < m \leq 2$ . В этом случае асимптотические формулы (19) сохраняются, с той лишь разницей, что остаточный член имеет вид  $O(\lambda^{-2} U(\lambda^{2/m} \omega(x)))$ ,  $O(\lambda^{-2} Y'(x))$  для решений и их производных соответственно.

2.6.  $0 < m \leq 1$ . В этом случае

$$y_1(x) = Y_1(x) + O(\lambda^{-1} U(\lambda^{2/m} \omega(x))). \quad (21)$$

Для решения  $y_2(x)$  справедливы те же формулы, что и в п. 2.5, если число  $1/m$  — нецелое. Если же  $m = 1/n$ ,  $n \geq 1$  — целое, то

$$y_2(x) = Y_2(x) + \frac{1}{\lambda} \frac{(n!)^2}{2\pi n^{2n-1}} Y_1(x) \int_0^x \frac{f(t) dt}{V p(t)} + O(\lambda^{-2} U(\lambda^{2n} \omega(x))). \quad (22)$$

2.7.  $m = 4$ . В этом случае интегралы  $Y_{jk}(t)$  расходятся и при  $t = 0$ , и при  $t \rightarrow \infty$ , что приводит к усложнению асимптотических формул [43]. В п. 3 приведен другой вариант этих формул.

Если функции  $p(x)$ ,  $q(x)$  бесконечно дифференцируемы при  $x \in I$ , то с помощью метода, изложенного в п. 2.2, можно получить асимптотические ряды для решений вида (2).

3. Целые значения  $m \geq 1$  [95, 97].

3.1. Эталонные уравнения и их решения. Имеются три варианта.

I.  $m > 0$  — четное число, эталонное уравнение имеет вид

$$w'' = \frac{m^2}{4} t^{m-2} w. \quad (23)$$

II.  $m > 0$  — четное число, эталонное уравнение имеет вид

$$w'' = -\frac{m^2}{4} t^{m-2} w. \quad (24)$$

III.  $m > 0$  — нечетное число, эталонное уравнение имеет вид (23).

Рассмотрим подробно эти случаи.

I. Эталонное уравнение (23) имеет ФСР  $\{U_m(t), U_m(-t)\}$ , где

$$U_m(t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} K_{1/m}(t^{m/2}), \quad t > 0, \quad (25)$$

$K$  — функция Макдональда. Вронскиан этих решений равен

$$W(U_m(t), U_m(-t)) = m \operatorname{cosec} \pi/m.$$

Частные случаи:

$$U_2(t) = e^{-t}, \quad U_4(t) = \sqrt{2}U(0, 2t),$$

где  $U(a, t)$  — функция параболического цилиндра. При  $t = 0$  имеем

$$U_m(0) = \pi^{-1/2} 2^{(2-m)/(2m)} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right),$$

$$U'_m(0) = \pi^{-1/2} 2^{-(2+m)/(2m)} \Gamma\left(-\frac{1}{m}\right).$$

При  $t \rightarrow +\infty$  функция  $U_m(t)$  экспоненциально убывает:

$$U_m(t) \sim t^{(2-m)/4} e^{-t^{m/2}}.$$

При  $t < 0$  имеем

$$U_m(t) = \sqrt{\frac{2|t|}{\pi}} \left[ \pi \operatorname{cosec} \frac{\pi}{m} I_{1/m}(|t|^{m/2}) + K_{1/m}(|t|^{m/2}) \right], \quad (26)$$

где  $I_{1/m}$  — функция Бесселя мнимого аргумента, и функция  $U_m(t)$  экспоненциально растет при  $t \rightarrow -\infty$ :

$$U_m(t) = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{m} |t|^{(2-m)/4} \exp\{|t|^{m/2}\} [1 + O(t^{-m/2})].$$

II. Эталонное уравнение (24) имеет ФСР  $W_m(t), W_m(-t)$ , где

$$W_m(t) = -\sqrt{\frac{\pi t}{2}} \left[ \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m} J_{1/m}(t^{m/2}) + Y_{1/m}(t^{m/2}) \right], \quad t > 0, \quad (27)$$

$$W_m(t) = \sqrt{\frac{\pi |t|}{2}} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m} J_{1/m}(|t|^{m/2}) - Y_{1/m}(|t|^{m/2}) \right], \quad t < 0,$$

$Y_{1/m}$  — функция Неймана. Вронскиан этих решений равен

$$W(W_m(t), W_m(-t)) = \frac{m}{\cos \pi/m}.$$

Частные случаи:

$$W_2(t) = \sqrt{2} \cos(t + \pi/4), \quad W_4(t) = 2^{3/4} W(0, 2t),$$

где  $W(a, t)$  — модифицированная функция параболического цилиндра. Решение  $W_m(t)$  осциллирует при  $t \rightarrow \pm\infty$ :

$$W_m(t) = \frac{t^{(2-m)/4}}{\cos \pi/(2m)} \left[ \cos \left( t^{m/2} + \frac{\pi}{4} \right) + O(t^{-m/2}) \right], \quad t \rightarrow +\infty,$$

$$W_m(t) = \frac{|t|^{(2-m)/4}}{\sin \pi/(2m)} \left[ \cos \left( |t|^{m/2} - \frac{\pi}{4} \right) + O(t^{-m/2}) \right], \quad t \rightarrow -\infty.$$

Приведем оценки для ФСР. Пусть  $t = q_m$  — наименьший положительный корень уравнения

$$W_m(t) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m} W_m(-t).$$

Введем весовую функцию  $E_m(t)$ , равную

$$\sqrt{\operatorname{ctg} \pi/(2m)}, \quad t \geq q_m; \quad \sqrt{\operatorname{tg} \pi/(2m)} \quad t \leq -q_m; \quad (28)$$

$$\sqrt{\frac{W_m(-t)}{W_m(t)}}, \quad -q_m \leq t \leq q_m.$$

Функции  $W_m(t)$ ,  $W_m(-t)$  не имеют нулей на отрезке  $[-q_m, q_m]$ , так что  $E_m(t)$  — непрерывная на всей оси неубывающая функция,  $E_m(-t) = E_m^{-1}(t)$ . Введем положительные четные функции  $M_m(t)$ ,  $N_m(t)$ , через которые выражаются модули решений из ФСР и их производных:

$$W_m(t) = E_m^{-1}(t) M_m(t) \sin \theta_m(t), \quad W'_m(t) = E_m^{-1}(t) N_m(t) \sin \omega_m(t). \quad (29)$$

При  $t \rightarrow \pm\infty$

$$M_m(t) \sim \sqrt{\frac{2}{\sin \frac{\pi}{m}}} |t|^{(2-m)/4}, \quad N_m(t) \sim m \sqrt{\frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{m}}} |t|^{(m-2)/4}. \quad (30)$$

III. Эталонное уравнение (23) имеет ФСР  $V_m(t)$ ,  $\bar{V}_m(t)$ , где

$$V_m(t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} K_{1/m}(t^{m/2}), \quad (31)$$

$$\bar{V}_m(t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \left[ \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{m}} I_{1/m}(t^{m/2}) + K_{1/m}(t^{m/2}) \right], \quad t > 0.$$

Вронскиан этих решений равен  $m/\sin \pi/m$ . Имеем  $V_m(0) = \pi^{-1/2} 2^{(2-m)/(2m)} \Gamma(1/m)$ ,  $V'_m(0) = \pi^{-1/2} 2^{-(2+m)/(2m)} \Gamma(-1/m)$ ,  $\bar{V}_m(0) = V_m(0)$ ,  $\bar{V}'_m(0) = -V'_m(0)$ . При  $m = 3$  эти решения

выражаются через функции Эйри:

$$V_3(t) = 2^{5/6} 3^{1/6} \pi^{1/2} \text{Ai} \left( \left( \frac{3}{2} \right)^{2/3} t \right), \quad \bar{V}_3(t) = 2^{5/6} 3^{-1/3} \pi^{1/2} \text{Bi} \left( \left( \frac{3}{2} \right)^{2/3} t \right).$$

При  $t \geq 0$  функции  $V_m(t)$ ,  $\bar{V}_m(t)$  положительны,  $V_m(t)$  монотонно убывает,  $\bar{V}_m(t)$  монотонно возрастает, и

$$V_m(t) = t^{(2-m)/4} e^{-t^{m/2}} [1 + O(t^{-m/2})],$$

$$\bar{V}_m(t) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{m}} t^{(2-m)/4} e^{t^{m/2}} [1 + O(t^{-m/2})]$$

при  $t \rightarrow +\infty$ . При  $t < 0$  имеем

$$V_m(t) = \sqrt{\frac{\pi|t|}{2}} \left[ \text{ctg} \frac{\pi}{2m} J_{1/m}(|t|^{m/2}) - Y_{1/m}(|t|^{m/2}) \right],$$

$$\bar{V}_m(t) = -\sqrt{\frac{\pi|t|}{2}} \left[ \text{tg} \frac{\pi}{2m} J_{1/m}(|t|^{m/2}) + Y_{1/m}(|t|^{m/2}) \right]. \quad (32)$$

Оба решения осциллируют при  $t \rightarrow -\infty$  со сдвигом фазы на  $\pi/2$ :

$$V_m(t) = \frac{1}{\sin \pi/(2m)} |t|^{(2-m)/4} \left[ \cos \left( |t|^{m/2} - \frac{\pi}{4} \right) + O(t^{-m/2}) \right],$$

$$\bar{V}_m(t) = \frac{1}{\cos \pi/(2m)} |t|^{(2-m)/4} \left[ \cos \left( |t|^{m/2} + \frac{\pi}{4} \right) + O(t^{-m/2}) \right].$$

Пусть  $t = -q_m$  — наименьший по модулю корень уравнения

$$\bar{V}_m(t) = \text{tg} \frac{\pi}{2m} V_m(t).$$

Введем весовую функцию  $E_m(t)$ , равную

$$\sqrt{\bar{V}_m(t)/V_m(t)}, \quad t \geq -q_m; \quad \sqrt{\text{tg} \pi/(2m)}, \quad t \leq -q_m. \quad (33)$$

Функция  $E_m(t)$  положительна, непрерывна на всей оси и не убывает. Функции  $M_m(t)$ ,  $N_m(t)$  введем по формулам, аналогичным (29):

$$V_m(t) = E_m^{-1}(t) M_m(t) \sin \theta_m(t), \quad \bar{V}_m(t) = E_m(t) M_m(t) \cos \theta_m(t), \quad (34)$$

$$V'_m(t) = E_m^{-1}(t) N_m(t) \sin \omega_m(t), \quad \bar{V}'_m(t) = E_m(t) N_m(t) \sin \omega_m(t).$$

При  $|t| \rightarrow \infty$  для  $M_m$ ,  $N_m$  справедливы асимптотические формулы (30), в которых следует заменить  $t$  на  $|t|$ . Приведем приближенные значения для  $q_m$ :  $q_2 = 0,000$ ,  $q_3 = 0,279$ ,  $q_4 = 0,431$ ,  $q_5 = 0,528$ ,  $q_6 = 0,596$ .

3.2. Вспомогательные функции. Рассмотрим уравнение

$$w'' = [\lambda^2 f(x, \lambda) + g(x, \lambda)] w \quad (35)$$

на конечном или бесконечном интервале  $I = (a_1, a_2)$ ,  $0 \in I$ , где  $\lambda > 0$  — параметр. Введем условия:

1) Функция  $x^{-2+m}f(x, \lambda)$  вещественна при вещественных  $\lambda$ , не обращается в нуль на интервале  $I$  и принадлежит классу  $C^2(I)$  при каждом фиксированном  $\lambda > 0$ .

2) Функция  $g(x, \lambda)$  непрерывна на интервале  $I$  при каждом фиксированном  $\lambda > 0$ .

Положим

$$\begin{aligned} \xi(x, \lambda) &= - \left( \int_x^0 \sqrt{|f(t, \lambda)|} dt \right)^{2/m}, \quad x \leq 0, \\ \xi(x, \lambda) &= \left( \int_0^x \sqrt{|f(t, \lambda)|} dt \right)^{2/m}, \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Функция  $\xi(x, \lambda)$  монотонно возрастает по  $x$  и принадлежит  $C^2(I)$ . Введем функции

$$\tilde{f}(x, \lambda) = \frac{4}{m^2} |f(x, \lambda)| |\xi|^{2-m}, \quad \Omega_m(t) = 1 + |t|^{(m-2)/2} \quad (37)$$

и функцию контроля ошибки

$$H_m(x, \lambda) = \int \left[ \frac{1}{\tilde{f}^{1/4}(x, \lambda)} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\tilde{f}^{1/4}(x, \lambda)} - \frac{g(x, \lambda)}{\tilde{f}^{1/2}(x, \lambda)} \right] \frac{dx}{\Omega_m(\lambda^{2/m} \xi)}, \quad (38)$$

где пределы интегрирования несущественны. Для уравнения (23) имеем

$$\begin{aligned} f(x, \lambda) &= \frac{m^2}{4} x^{m-2}, \quad g(x, \lambda) \equiv 0, \quad \xi = x, \\ \tilde{f}(x, \lambda) &\equiv 1, \quad H_m(x, \lambda) \equiv 0. \end{aligned}$$

3.3. Асимптотика решений уравнения (35) в случае I. Пусть  $m$  четно, функция  $f(x, \lambda)$   $x^{2-m}$  положительна на  $I$ . Тогда уравнение (35) имеет решения

$$\begin{aligned} w_1(x, \lambda) &= \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda) [U_m(-\lambda^{2/m} \xi) + \varepsilon_1(x, \lambda)], \\ w_2(x, \lambda) &= \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda) [U_m(\lambda^{2/m} \xi) + \varepsilon_2(x, \lambda)]. \end{aligned} \quad (39)$$

Функция  $U_m$  определена формулами (25), (26), и при  $x \in I$ ,  $\lambda > 0$  справедливы оценки

$$\frac{|\varepsilon_1|}{U_m(-\lambda^{2/m} \xi)}, \frac{|\partial \varepsilon_1 / \partial x|}{\mu_m \left| \frac{d}{dx} U_m(-\lambda^{2/m} \xi) \right|} \leq \exp \left\{ \frac{\lambda_m}{\lambda^{2/m}} V_{a_1, x}(H_m) \right\} - 1. \quad (40)$$

Постоянные  $\lambda_m$ ,  $\mu_m$  равны

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left[ \frac{1}{m} \sin \frac{\pi}{m} \Omega_m(t) U_m(t) U_m(-t) \right], \\ \mu_m &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left[ \frac{m}{\sin \frac{\pi}{m}} \frac{1}{|U'_m(t)| |U_m(-t)|} \right], \end{aligned} \quad (41)$$

и  $V_{a,b}(H_m)$  — вариация функции  $H_m$  на отрезке  $[a, b]$ , т. е.

$$V_{a,b}(H_m) = \int_a^b |\dot{H}_m(x)| dx. \quad (42)$$

Для  $|\varepsilon_2|$ ,  $|\partial\varepsilon_2/\partial x|$  справедливы оценки (40) с такими изменениями:  $\bar{U}_m(-t)$  заменяется на  $U_m(t)$ ,  $V_{a_1,x}$  — на  $V_{x,a_2}$ .

3.4. Асимптотика решений уравнения (35) в случае II. Пусть  $m$  четно, функция  $f(x)x^{2-m}$  отрицательна при  $x \in I$ . Уравнение (35) имеет решения

$$w_{1,2}(x, \lambda) = \bar{f}^{-1/4}(x, \lambda) [W_m(\mp \lambda^{2/m}\xi) + \varepsilon_{1,2}(x, \lambda)]. \quad (43)$$

Функция  $\xi(x, \lambda)$  определена формулами (27), и при  $x \in I$ ,  $\lambda > 0$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \frac{|\varepsilon_j(x, \lambda)|}{M_m(\lambda^{2/m}\xi)}, \frac{|\partial\varepsilon_j(x, \lambda)/\partial x|}{\lambda^{2/m}\bar{f}^{1/2}(x, \lambda)N_m(\lambda^{2/m}\xi)} \leq \\ & \leq \frac{\sigma_m}{\rho_m} E_m^{\pm 1}(\lambda^{2/m}\xi) \left[ \exp\left\{ \frac{\rho_m}{\lambda^{2/m}} |V_{a_j,x}(H_m)| \right\} - 1 \right], \end{aligned} \quad (44)$$

где знак плюс берется при  $j = 1$ . Постоянные  $\sigma_m, \rho_m$  равны

$$\begin{aligned} \rho_m &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left[ \frac{1}{m} \sin \frac{\pi}{m} \Omega_m(t) M_m^2(t) \right], \\ \sigma_m &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left[ \frac{1}{m} \sin \frac{\pi}{m} \Omega_m(t) |W_m(t)| E_m(t) M_m(t) \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

Заметим, что  $\sigma_m \leq \rho_m$ , так что в оценках (44) отношение  $\sigma_m/\rho_m$  можно заменить единицей.

3.5. Асимптотика решений уравнения (35) в случае III. Пусть  $m$  нечетно, функция  $f(x)x^{2-m}$  положительна при  $x \in I$ . Тогда уравнение (35) имеет решения

$$\begin{aligned} w_1(x, \lambda) &= \bar{f}^{-1/4}(x, \lambda) [\bar{V}_m(\lambda^{2/m}\xi) + \varepsilon_1(x, \lambda)], \\ w_2(x, \lambda) &= \bar{f}^{-1/4}(x, \lambda) [V_m(\lambda^{2/m}\xi) + \varepsilon_2(x, \lambda)]. \end{aligned} \quad (46)$$

Функции  $V_m, \bar{V}_m$  определены формулами (31), (32), и при  $x \in I$ ,  $\lambda > 0$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \frac{|\varepsilon_j(x, \lambda)|}{M_m(\lambda^{2/m}\xi)}, \frac{|\partial\varepsilon_j(x, \lambda)/\partial x|}{\lambda^{2/m}\bar{f}^{1/2}(x, \lambda)N_m(\lambda^{2/m}\xi)} \leq \\ & \leq \frac{\sigma_{m,j}}{\rho_m} E_m^{\pm 1}(\lambda^{2/m}\xi) \left[ \exp\left\{ \frac{\rho_m}{\lambda^{2/m}} |V_{a_j,x}(H_m)| \right\} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь  $\rho_m$  имеет вид (45),

$$\begin{aligned} \sigma_{m1} &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left[ \frac{1}{m} \sin \frac{\pi}{m} \Omega_m(t) |\bar{V}_m(t)| E_m^{-1}(t) M_m(t) \right], \\ \sigma_{m2} &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left[ \frac{1}{m} \sin \frac{\pi}{m} \Omega_m(t) |V_m(t)| E_m(t) M_m(t) \right], \end{aligned} \quad (48)$$

где  $E_m; E_m^{-1}$  отвечают  $\bar{V}_m, V_m$ . Так как  $\sigma_{mj}/\rho_j \leq 1$ , то эти отношения можно заменить единицей.

Приведенные выше оценки остаточных членов  $\varepsilon_j, \partial\varepsilon_j/\partial x$  пригодны в весьма общей ситуации, но довольно громоздки. Они являются обобщением ВКБ-оценок (гл. II, § 2). Как и в гл. II, из этих общих оценок можно получить более простые, при дополнительных предположениях относительно зависимости функций  $f$  и  $g$  от  $\lambda$ .

3.6. Асимптотические оценки остаточных членов. Рассмотрим уравнение

$$y'' - [\lambda^2 f(x) + g(x, \lambda)] y = 0 \quad (49)$$

при следующих предположениях:

1) Функция  $f(x)/x^{m-2}$  вещественна, не обращается в нуль на  $I$  и принадлежит классу  $C^2(I)$ , функция  $g(x, \lambda)$  принадлежит классу  $C(I)$  при  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ .

2) Сходятся интегралы

$$\int_0^{a_j} (|f'|^2 |f|^{-5/2} + |f''| |f|^{-3/2}) dx.$$

Это условие совпадает с условием применимости ВКБ-приближения (гл. II, § 3).

3) При  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$  и при некотором  $\delta > 0$  имеем

$$\int_{|x| > \delta} |g(x, \lambda)| |f(x)|^{-1/2} dx \leq c\lambda^\omega.$$

Если  $J$  — конечный отрезок,  $J \subset I$ , то

$$|g(x, \lambda)| |f(x)|^{-1/2} \leq c\lambda^\omega.$$

Это условие выполнено, например, если  $g(x, \lambda) = \lambda^\omega h(x)$  и сходится интеграл

$$\int_{|x| > \delta} |g(x)| |f(x)|^{-1/2} dx.$$

Положим  $\omega_0 = \max(\omega, 0)$ ; тогда вариация  $V_{a_1, a_2}(H_m)$  имеет следующие порядки при  $\lambda \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} O(\lambda^{\omega_0-1+2/m}), & \quad m = 2, 3, \\ O(\lambda^{\omega_0-1/2} \ln \lambda), & \quad m = 4, \\ O(\lambda^{\omega_0-4/m}), & \quad m > 4. \end{aligned} \quad (50)$$

В сочетании с полученными выше оценками это позволяет уточнить оценки остаточных членов. Например, в случае I отношения

$$\varepsilon_1(x, \lambda)/U_m(-\lambda^{2/m}\xi), \quad \varepsilon_2(x, \lambda)/U_m(\lambda^{2/m}\xi)$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$  имеют следующие порядки, равномерные по  $x \in I$ :

$$\begin{aligned} O(\lambda^{\omega_0-1}), & \quad m = 2, 3, \\ O(\lambda^{\omega_0-1} \ln \lambda), & \quad m = 4, \\ O(\lambda^{\omega_0-4/m}), & \quad m > 4. \end{aligned} \quad (51)$$

3.7. Ф о р м у л ы с в я з и. Пусть выполнены условия 1)–3) п. 3.6 и расходятся интегралы

$$\int^a_j |f(x)| dx, \quad j = 1, 2.$$

Тогда на интервалах  $J_1 = (a_1, -\delta)$ ,  $J_2 = (\delta, a_2)$ , где  $\delta > 0$ , уравнение (49) имеет решения ВКБ-типа. Приведем формулы связи между ними. Предполагается, что  $\lambda \geq \lambda_0 \gg 1$ .

I. Уравнение (49) имеет решения

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1(x, \lambda) &\sim f^{-1/4}(x) \exp \left\{ -\lambda \int_x^0 f^{1/2}(t) dt \right\}, \quad x \rightarrow a_1, \\ \tilde{w}_2(x, \lambda) &\sim f^{-1/4}(x) \exp \left\{ -\lambda \int_0^x f^{1/2}(t) dt \right\}, \quad x \rightarrow a_2. \end{aligned} \quad (52)$$

Эти решения экспоненциально убывают соответственно при  $x \rightarrow a_1$ ,  $x \rightarrow a_2$  и однозначно определяются своими асимптотиками. Сравнение асимптотик при  $x \rightarrow a_2$  решений  $w_2$  и  $\tilde{w}_2$  показывает, что

$$\tilde{w}_2(x, \lambda) \equiv \sqrt{\frac{2}{m}} \lambda^{(m-2)/m} w_2(x, \lambda),$$

и аналогичное тождество связывает решения  $w_1$ ,  $\tilde{w}_1$ . Поскольку асимптотика решений  $w_1$ ,  $w_2$  известна, то

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1(x, \lambda) &\sim \frac{1+k_1}{\sin \frac{\pi}{m}} f^{-1/4}(x) \exp \left\{ \lambda \int_0^x f^{1/2}(t) dt \right\}, \quad x \rightarrow a_2, \\ \tilde{w}_2(x, \lambda) &= \frac{1+k_2}{\sin \frac{\pi}{m}} f^{-1/4}(x) \exp \left\{ \lambda \int_x^0 f^{1/2}(t) dt \right\}, \quad x \rightarrow a_1. \end{aligned} \quad (53)$$

Для остаточных членов  $k_1$ ,  $k_2$  справедливы оценки (51).

II. Уравнение (49) имеет решения, которые однозначно определяются своими асимптотиками:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1(x, \lambda) &= |f(x)|^{-1/4} \left[ \cos \left( \lambda \int_x^0 |f(t)|^{1/2} dt + \frac{\pi}{4} \right) + o(1) \right], \quad x \rightarrow a_1, \\ \tilde{w}_2(x, \lambda) &= |f(x)|^{-1/4} \left[ \cos \left( \lambda \int_0^x |f(t)|^{1/2} dt + \frac{\pi}{4} \right) + o(1) \right], \quad x \rightarrow a_2. \end{aligned}$$



На «противоположных» концах интервала имеем

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1(x, \lambda) &= (1 + \gamma_1) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m} |f(x)|^{-1/4} \times \\ &\times \left[ \cos \left( \lambda \int_0^x |f(t)|^{1/2} dt - \frac{\pi}{4} + \delta_1 \right) + o(1) \right], \quad x \rightarrow a_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2(x, \lambda) &= (1 + \gamma_2) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m} |f(x)|^{-1/4} \times \\ &\times \left[ \cos \left( \lambda \int_x^0 |f(t)|^{1/2} dt - \frac{\pi}{4} + \delta_2 \right) + o(1) \right], \quad x \rightarrow a_1. \end{aligned}$$

Оценки остаточных членов остаются такими же.

III. В данном случае имеется ФСР вида

$$\tilde{w}_1(x, \lambda) = |f(x)|^{-1/4} \left[ \cos \left( \lambda \int_x^0 |f(t)|^{1/2} dt + \frac{\pi}{4} \right) + o(1) \right], \quad x \rightarrow a_1,$$

$$\tilde{w}_1(x, \lambda) \sim \frac{1}{2} (1 + k) \frac{f^{-1/4}(x)}{\sin \pi/(2m)} \exp \left\{ \lambda \int_0^x f^{1/2}(t) dt \right\}, \quad x \rightarrow a_2,$$

$$\tilde{w}_2(x, \lambda) \sim f^{-1/4}(x) \exp \left\{ -\lambda \int_0^x f^{1/2}(t) dt \right\}, \quad x \rightarrow a_2,$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2(x, \lambda) &= \frac{1+k}{\sin \pi/(2m)} |f(x)|^{-1/4} \times \\ &\times \left[ \cos \left( \lambda \int_x^0 |f(t)|^{1/2} dt - \frac{\pi}{4} + \delta \right) + o(1) \right], \quad x \rightarrow a_1. \end{aligned}$$

Оценки остаточных членов даются формулой (51).

### § 5. Слияние точки поворота и регулярной особой точки

1. Преобразование уравнения. Рассмотрим уравнение

$$w'' - \left[ \lambda^2 x^{\mu-2} f(x, \lambda) + \frac{g(x, \lambda)}{x^2} \right] w = 0 \quad (1)$$

на интервале  $I = [0, a)$ , конечном или бесконечном, где  $\lambda > 0$  — большой параметр. Введем условия при  $x \in I$ ,  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ :

1) Функции  $f(x, \lambda)$ ,  $g(x, \lambda)$  вещественны, функция  $f(x, \lambda)$  не обращается в нуль.

2) Функции  $f_{xx}(x, \lambda)$ ,  $g(x, \lambda)$  непрерывны.

Предполагается, что  $\mu > 0$ . Число  $a$  и параметр  $\mu$  могут зависеть от  $\lambda$ .

В данном случае точка  $x = 0$  есть точка поворота порядка  $\mu - 2$  (возможно, нецелого) и полюс второго порядка коэффициента при  $w$ , т. е. регулярная особая точка уравнения (1). Асимптотика ФСР выражается в данном случае через функции Бесселя. Рассмотрим два варианта.

I.  $f(x, \lambda) > 0$  при  $x \in I$ .

II.  $f(x, \lambda) < 0$  при  $x \in I$ .

Сделаем преобразование Лиувилля (гл. II, § 1):

$$w = \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda) W(\zeta), \quad \tilde{f}(x, \lambda) = \frac{x^{\mu-2} |f(x, \lambda)|}{\zeta^{\mu-2}}, \quad (2)$$

$$\zeta = \left( \int_0^x t^{\mu-2/2} \sqrt{|f(t, \lambda)|} dt \right)^{2/\mu};$$

тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2 W}{d\zeta^2} = \left[ \pm \frac{1}{4} \mu^2 \lambda^2 \zeta^{\mu-2} + \frac{\varphi(\zeta, \lambda)}{\zeta^2} \right] W, \quad (3)$$

где знак плюс (минус) берется в случае I (II),

$$\varphi(\zeta, \lambda) = \frac{\mu^2 \zeta^2 g(x, \lambda)}{4x^2 \tilde{f}(x, \lambda)} + \zeta^2 \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda) \frac{d^2}{d\zeta^2} \tilde{f}^{1/4}(x, \lambda). \quad (4)$$

Интервал  $I$  взаимно однозначно отображается на интервал  $J = [0, \beta)$ ,  $\beta > 0$ . При этом функция  $\zeta/x$  положительна и принадлежит классу  $C^2(J)$ ,  $\varphi(\zeta, \lambda) \in C(J)$ .

Введем параметр  $\nu$  по формуле

$$\frac{1}{4} (\mu^2 \nu^2 - 1) = \varphi(0, \lambda) \quad (5)$$

и запишем уравнение (3) в виде

$$\frac{d^2 W}{d\zeta^2} = \left( \pm \frac{\mu^2 \lambda^2}{4} \zeta^{\mu-2} + \frac{\mu^2 \nu^2 - 1}{4\zeta^2} + \frac{\psi(\zeta, \lambda)}{\zeta} \right) W. \quad (6)$$

2. Случай I. В уравнении (6) берется знак плюс. Эталонное уравнение возьмем в виде

$$\frac{d^2 W}{d\zeta^2} = \left( \frac{\mu^2 \lambda^2}{4} \zeta^{\mu-2} + \frac{\mu^2 \nu^2 - 1}{4} \right) W. \quad (7)$$

ФСР этого уравнения образуют бесселевы функции  $\zeta^{1/2} I_\nu(\lambda \zeta^{\mu/2})$ ,  $\zeta^{1/2} K_\nu(\lambda \zeta^{\mu/2})$ . Будем предполагать, что  $\nu \geq 0$  (т. е.  $\varphi(0, \lambda) \geq -1/4$ ). Приведем асимптотические формулы для этих функций:

$$I_\nu(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x, \quad K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$I_\nu(x) \sim \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \quad K_\nu(x) \sim \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, \quad x \rightarrow +0, \nu > 0,$$

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + O(x^4), \quad K_0(x) \sim -\ln x, \quad x \rightarrow +0.$$

Вронскиан этих решений равен

$$W(K_\nu(x), I_\nu(x)) = 1/x.$$

Для ФСР уравнения (6) имеются асимптотические оценки того же типа, что и в § 4, п. 3.3. Но мы ограничимся тем, что приведем оценки ФСР при более сильных предположениях. Пусть  $\nu \geq 0$ ,  $\beta = +\infty$ , функция  $\psi(\xi)$  не зависит от  $\lambda$  и выполнены условия:

- 1)  $\psi(\xi)$  непрерывна при  $0 < \xi < \infty$ ;
- 2)  $\psi(\xi) = O(\xi^{\rho-1})$ ,  $\xi \rightarrow +0$ ,  $\rho > 0$ ;
- 3)  $\int_0^{+\infty} \xi^{-\mu/2} |\psi(\xi)| d\xi < \infty$ .

Тогда уравнение (6) имеет ФСР вида

$$\begin{aligned} W_1(\zeta, \lambda) &= \zeta^{1/2} I_\nu(\lambda \zeta^{\mu/2}) (1 + \varepsilon_1), \\ W_2(\zeta, \lambda) &= \zeta^{1/2} K_\nu(\lambda \zeta^{\mu/2}) (1 + \varepsilon_2), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  имеют порядки

$$O(\lambda^{-1}), \mu < 2\rho; \quad O(\lambda^{-1} \ln \lambda), \mu = 2\rho; \quad O(\lambda^{-2\rho/\mu}), \mu > 2\rho. \quad (9)$$

Эти результаты справедливы и при  $\beta < \infty$ .

3. Случай II. В этом случае в уравнении (6) берется знак минус и эталонное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} = \left( -\frac{\mu^2 \lambda^2}{4} \xi^{\mu-2} + \frac{\mu^2 \nu^2 - 1}{4\xi^2} \right) W. \quad (10)$$

При тех же условиях на функцию  $\psi = \psi(\zeta)$ , что и выше, уравнение (6) имеет ФСР вида

$$\begin{aligned} W_1(\zeta, \lambda) &= \zeta^{1/2} [J_\nu(\lambda \zeta^{\mu/2}) + \varepsilon_1(\zeta, \lambda)], \\ W_2(\zeta, \lambda) &= \zeta^{1/2} [Y_\nu(\lambda \zeta^{\mu/2}) + \varepsilon_2(\zeta, \lambda)]. \end{aligned} \quad (11)$$

В данном случае оценки усложняются, поскольку функции  $J_\nu(x), Y_\nu(x)$  имеют бесконечно много нулей на полуоси  $x > 0$ . Воспользуемся представлением

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= E_\nu^{-1}(x) M_\nu(x) \cos \theta_\nu(x), \\ Y_\nu(x) &= E_\nu(x) M_\nu(x) \sin \theta_\nu(x), \end{aligned}$$

где  $E, M$  — положительные функции. Тогда величины

$$\frac{\varepsilon_1(\zeta, \lambda)}{E_\nu^{-1}(\lambda \zeta^{\mu/2}) M_\nu(\lambda \zeta^{\mu/2})}, \quad \frac{\varepsilon_2(\zeta, \lambda)}{E_\nu(\lambda \zeta^{\mu/2}) M_\nu(\lambda \zeta^{\mu/2})}$$

имеют порядок (9) при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Аналогичные оценки в случаях I, II имеют место для производных решений [96].

## § 6. Кратная точка поворота. Комплексный случай

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$w'' - [\lambda^2 f(z) + g(z)] w = 0 \quad (1)$$

в области  $D$  (возможно, неограниченной) комплексной плоскости  $z$ . Здесь  $\lambda > 0$  — большой параметр, область  $D$  содержит точку  $z = 0$ . Введем условия:

1) Функции  $z^{2-m} f(z)$ ,  $g(z)$  голоморфны в области  $D$ , и первая из них не имеет нулей.

2)  $g(z) = O(z^{\gamma-1})$ ,  $z \rightarrow 0$ , где  $\gamma > 0$ . Число  $m \geq 0$  может не быть целым, так что  $z = 0$  может быть точкой ветвления функций  $f$  и  $g$ .

Введем функции

$$S(z) = \int_0^z \sqrt{f(t)} dt, \quad \zeta(z) = S^{2/m}(z). \quad (2)$$

При малых  $|z|$

$$f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots, f_0 \neq 0, \\ \zeta(z) = \left(\frac{2}{m}\right)^{2/m} f_0^{1/m} z \left[1 + \frac{z}{m+2} \frac{f_1}{f_0} + \dots\right],$$

так что можно выделить голоморфную в точке  $z = 0$  ветвь функции  $\zeta(z)$ . Введем еще одно условие:

3) Функция  $\zeta(z)$  однолистка в области  $D$ .

Пусть  $S_j$  — секторы в комплексной плоскости  $z$ , введенные в § 3. Обозначим через  $\Delta$  образ области  $D$  при отображении  $\zeta = \zeta(z)$  и через  $D_j$  — прообраз области  $\Delta \cap S_j$ . Все области  $D_j$  односвязны.

**П р и м е р.** Пусть  $f(z) = z^2(1-z)^6$ ,  $D$  — плоскость  $z$  с разрезом по лучу  $l = [1, +\infty)$ ; тогда

$$\zeta(z) = \frac{z}{\sqrt{2}(1-z)}$$

и  $\Delta$  — плоскость  $\zeta$  с разрезом по лучу  $l = (-\infty, -1/\sqrt{2}]$ . В данном случае  $m = 4$ ,  $S_0$  — сектор  $|\arg \zeta| < \pi/4$ ,  $S_1$  — сектор  $|\arg \zeta - \pi/2| < \pi/4$ , сектор  $S_2$  ( $S_3$ ) симметричен с сектором  $S_0$  ( $S_1$ ) относительно точки  $\zeta = 0$ . Проведем через точки  $z = 0$ ,  $z = 1$  две окружности  $l_1$ ,  $l_2 = l_1^*$ , центр  $l_1$  лежит в точке  $z = (1 + i\sqrt{2})/2$ . Тогда  $D_0$  — луночка, образованная их пересечением,  $D_3 = D_1^*$ , область  $D_1$  ограничена большей дугой окружности  $l_1$  и дугой  $l_2$ ,  $D_2$  — внешность объединения кругов с разрезом вдоль  $l$ .

Пусть  $a_j \in [D_j]$ , причем возможен случай  $a_j = \infty$ . Обозначим  $H_k(a_j)$ ,  $k \neq j$ , множество всех точек  $z \in [D_j] \cup [D_k]$ , которые можно соединить с точкой  $a_j$  каноническим путем  $\gamma$ . Именно, при

движении  $t$  вдоль  $\gamma$  от точки  $a_j$  к точке  $z$  функция  $\operatorname{Re} S(z)$  не убывает. Ветвь этой функции выбрана так, что  $\operatorname{Re} S(z) \leq 0$  в области  $D_j$ ,  $\operatorname{Re} S(z) \geq 0$  в области  $D_k$ .

Предполагается, что  $k, j$  — целые,  $k \neq j$ , и если  $m = m_1/m_2$ , где  $m_1, m_2$  — взаимно простые целые числа,  $m_1 \neq 1$ , то требуется выполнение условия  $|k - j| < m_1$ . Для других значений  $m$  никаких дополнительных ограничений на значения  $j, k$  не налагается. В частности, всегда можно положить  $k = j \pm 1$ ; в этом случае  $S_j, S_k$  — соседние секторы. Заметим, что объединение  $D_k \cup D_j \cup \{0\}$  связно, но может не быть областью.

2. Вспомогательные функции. Положим

$$e(t) = |\exp \{(-1)^j t^{m/2}\}|, \quad t \in [S_j],$$

ветвь функции  $t^{m/2}$  выбрана так, что  $t^{m/2} = |t|^{m/2} \exp \{(1/2)im \arg t\}$ . Поэтому

$$e(t) \equiv 1, \quad t \in \partial S_j; \quad e(t) > 1, \quad t \in S_j,$$

и функция  $e(t)$  экспоненциально растет внутри сектора  $S_j$ . В области  $[S_j] \cup [S_k]$  введем функции

$$E_{jk}(t) = 1/e(t), \quad t \in [S_j], \quad E_{jk}(t) = e(t), \quad t \in [S_k],$$

так что  $E_{kj}(t) = E_{jk}^{-1}(t)$ . Пусть  $U_j(t), U_k(t)$  — решения эталонного уравнения, введенные в § 3. Напомним, что  $U_j(t) \rightarrow 0$ , если  $t \rightarrow \infty$  вдоль любого луча, лежащего в секторе  $S_j$ , и  $U_j(t) \rightarrow \infty$ , если  $t \rightarrow \infty$  вдоль любого луча, лежащего в секторе  $S_k$ . Аналогичными свойствами обладает решение  $U_k(t)$ . Введем функции

$$\begin{aligned} M_{jk}(t) &= [|U_j(t)|^2 E_{jk}^{-2}(t) + |U_k(t)|^2 E_{jk}^2(t)]^{1/2}, \\ N_{jk}(t) &= [|U_j(t)|^2 E_{jk}^{-2}(t) + |U_k(t)|^2 E_{jk}^2(t)]^{1/2}, \\ \bar{N}_{jk}(t) &= |t|^{(2-m)/4} \left[ E_{jk}^{-2}(t) \left| \frac{d}{dt} (t^{(m-2)/4} U_j(t)) \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + E_{jk}^2(t) \left| \frac{d}{dt} (t^{(m-2)/4} U_k(t)) \right|^2 \right]^{1/2}, \\ \Omega_m(t) &= (1 + |t|^{m/2})(1 + |t|)^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Если  $t \rightarrow \infty$  вдоль любого луча, лежащего внутри одного из секторов  $S_j, S_k$ , то

$$\begin{aligned} M_{jk}(t) &\sim (1 + \lambda_{jk}^2)^{1/2} |t|^{(2-m)/4}, \\ N_{jk}(t) &\sim \frac{m}{2} (1 + \lambda_{jk}^2)^{1/2} |t|^{(m-2)/4} \sim \bar{N}_{jk}(t), \end{aligned}$$

числа  $\lambda_{jk}$  см. в § 3. Положим

$$\begin{aligned} H(z_1, z_2, \lambda) &= \int_{z_1}^{z_2} \left| \bar{f}^{-1/4}(z) \frac{d^2}{dz^2} \bar{f}^{-1/4}(z) - \frac{g(z)}{\bar{f}^{1/2}(z)} \right| \frac{|dz|}{\Omega_m(\lambda^{2/m} \zeta(z))}, \\ \bar{f}(z) &= z^{2-m} f(z). \end{aligned}$$

**3. Оценки решений [98].** Пусть выполнены сформулированные выше условия и величина  $H(z_1, z_2, \lambda)$  конечна при любых  $z \in \in H_k(a_j)$ ,  $\lambda > 0$ , где интеграл берется вдоль канонического пути. Пусть  $A, B$  — произвольные постоянные. Тогда уравнение (1) имеет решение  $w(z, \lambda)$  вида

$$w(z, \lambda) = \tilde{f}^{-1/4}(z) [AU_j(\lambda^{2/m}\zeta(z)) + BU_k(\lambda^{2/m}\zeta(z)) + \varepsilon(\lambda, \zeta)], \quad (4)$$

где при  $z \in H_k(a_j)$ ,  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} \frac{|\varepsilon(\lambda, \zeta)|}{M_{jk}(\lambda^{2/m}\zeta)}, \frac{|\partial\varepsilon(\lambda, \zeta)/\partial\zeta|}{\lambda^{2/m}N_{jk}(\lambda^{2/m}\zeta)}, \frac{|\partial(\zeta^{(m-2)/4}\varepsilon)/\partial\zeta|}{\lambda^{2/m}|\zeta|^{(m-2)/4}\tilde{N}_{jk}(\lambda^{2/m}\zeta)} \leq \\ \leq c_1\sigma_{jk}(\lambda) E_{jk}(\lambda^{2/m}\zeta) \left[ \exp\left\{\frac{c_2}{\lambda^{2/m}} H(a_j, z, \lambda)\right\} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $c_1, c_2 > 0$  — постоянные, не зависящие от  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}(\lambda) = \sup_{t \in \tilde{\gamma}} [\Omega(\lambda^{2/m}t) E_{jk}^{-1}(\lambda^{2/m}t) M_{jk}(\lambda^{2/m}t)] \times \\ \times |AU_j(\lambda^{2/m}t) + BU_k(\lambda^{2/m}t)|, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\tilde{\gamma}$  — образ при отображении  $\zeta = \zeta(z)$  канонического пути  $\gamma$ , соединяющего точки  $z, a_j$ , и интеграл  $H(a_j, z, \lambda)$  берется по  $\gamma$ .

Оценка (5) носит весьма общий характер, но содержит довольно громоздкие выражения  $\sigma_{jk}(\lambda)$  и  $H(a_j, z, \lambda)$ . Кроме того, она представляет интерес применительно к асимптотике решений только в том случае, если правая часть формулы (6) (без множителя  $E_{jk}^{-1}$ ) мала при  $\lambda \geq 1$ . Выражение в квадратных скобках в формуле (6) ограничено на любом компакте, лежащем в  $[S_j \cup S_k]$ , и ограничено при  $t \rightarrow \infty$ ,  $t \in S_k$ . Если же  $t \rightarrow \infty$  внутри сектора  $S_j$ , то это выражение неограничено, за исключением случая  $B = 0$ . Следовательно, если  $a_j = \infty$  — внутренняя точка сектора  $S_j$ , то оценка (5) пригодна лишь при  $B = 0$ .

**4. Асимптотика решений.** Положим  $A = 1, B = 0$  в формуле (5); тогда  $|\sigma_{jk}(\lambda)| \leq c$  при  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ . Пусть точки  $a_j \in S_j, a_k \in S_k$  можно соединить каноническим путем  $\gamma$ , не проходящим через точку  $z = 0$  (например,  $S_j, S_k$  — соседние секторы). Точки  $a_j, a_k$  могут быть конечными или бесконечными. Пусть вдоль  $\gamma$  сходятся интегралы

$$\int_0^a |\delta(z)| |dz|, \quad \int_0^a \frac{|dz|}{|S(z)|},$$

где  $a = a_j$  или  $a = a_k$ ,

$$\delta(z) = f^{-1/4}(z) \frac{d^2}{dz^2} f^{-1/4} - \frac{g(z)}{f^{1/2}(z)}.$$

Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} \lambda^{-2/m} H(a_j, a_k, \lambda) &= O(\psi_m), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \\ \psi_m &= \lambda^{-1}, \quad 0 < m < 2 (1 + \gamma_1), \\ \psi_m &= \lambda^{-1} \ln \lambda, \quad m = 2 (1 + \gamma_1), \\ \psi_m &= \lambda^{-2(1+\gamma_1)/m}, \quad m > 2 (1 + \gamma_1), \quad \gamma_1 = \min(\gamma, 1). \end{aligned} \quad (7)$$

Если, кроме того, функция  $g(z)$  голоморфна в точке  $z = 0$ , то в качестве  $\psi_m$  можно взять функции

$$\lambda^{-1}, \quad 0 < m < 4; \quad \lambda^{-1} \ln \lambda, \quad m = 4; \quad \lambda^{-4/m}, \quad m > 4. \quad (8)$$

Все эти условия выполнены, если функции  $z^{2-m}f(z)$ ,  $g(z)$  — полиномы степени  $n_f$ ,  $n_g$  и  $n_g < n_f/2 + 1$ .

Окончательный результат выглядит так: уравнение (1) имеет решение  $w(z, \lambda)$  такое, что при  $z \in H_j(a_k)$ ,  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$

$$\begin{aligned} w(z, \lambda) &= \tilde{f}^{-1/4}(z) U_j(\lambda^{2/m} \zeta(z)) + \varepsilon_{jk}(\zeta, \lambda), \\ |\varepsilon_{jk}(z, \lambda)| &\leq c E_{jk}(\lambda^{2/m} \zeta) M_{jk}(\lambda^{2/m} \zeta) \psi_m(\lambda). \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогичные оценки справедливы для остальных функций из левой части неравенства (5).

Напомним, что  $U_j(t) \rightarrow 0$ , если  $t \rightarrow \infty$  внутри сектора  $S_j$ .

**5. Формулы связи.** Пусть выполнены сформулированные выше условия, и пусть  $S(a_j) = \infty$ , так что  $a_j = \infty$  или  $a_j$  — особая точка уравнения (1). Ветвь функции  $S(z)$  выберем так, что  $\operatorname{Re} S(z) \geq 0$ ,  $z \in D_j$ . Тогда уравнение (1) при каждом фиксированном  $\lambda > 0$  имеет единственное решение  $w_0(z, \lambda)$  такое, что

$$w_0(z, \lambda) \sim f^{-1/4}(z) e^{-\lambda S(z)} \quad (10)$$

при  $z \in D_j$ ,  $z \rightarrow a_j$ . Приведем асимптотические формулы для решения  $w_0$  в области  $D_k$ . Аналитически продолжим функции  $S(z)$ ,  $f^{1/4}(z)$  из  $D_j$  в  $D_k$  вдоль некоторого канонического пути, не проходящего через точку  $z = 0$ ; тогда  $\operatorname{Re} S(z) \leq 0$ ,  $z \in D_k$ . Пусть  $b_k(\theta) \in D_k$ ,  $\tilde{\gamma}$  — канонический путь, соединяющий точки  $b_k(\theta)$ ,  $a_k \in D_k$ , и  $\arg S(z) = \theta$  на  $\tilde{\gamma}$ , где  $|\theta| \leq \pi/2$ . Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty$ ,  $z \in \tilde{\gamma}$

$$\begin{aligned} w_0(z, \lambda) &= f^{-1/4}(z) [i^{k-j-1} (\lambda_{jk} + O(\psi_m)) e^{\lambda S(z)} \pm \\ &\quad \pm i^{k-j} (\lambda_{j,k\pm 1} + O(\psi_m)) e^{-\lambda S(z)}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Функция  $\psi_m$  определена формулами (7), (8), знак  $+$  ( $-$ ) берется при  $\theta \geq 0$  ( $\theta \leq 0$ ). Оценка остаточного члена равномерна по  $z, \theta$ .

Аналогичные результаты получены в [98] для более общего уравнения

$$w'' = [\lambda^2 f(z, \lambda) + g(z, \lambda)] w.$$

## § 7. Две близкие точки поворота

## 1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$y'' - \lambda^2 q(x, \alpha) y = 0 \quad (1)$$

на отрезке  $I = [a, b]$ . Здесь  $\lambda > 0$  — большой параметр,  $\alpha \in J = [0, \alpha_0]$ ,  $\alpha_0 > 0$ , функция  $q(x, \alpha)$  вещественна и принадлежит классу  $C^\infty(I \times J)$ . Параметры  $\lambda$  и  $\alpha$  независимы.

Пусть уравнение (1) при каждом фиксированном  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq \alpha_0$ , имеет ровно две, и притом простые, точки поворота  $x_1(\alpha)$ ,  $x_2(\alpha)$ , которые при  $\alpha = 0$  сливаются в одну двукратную точку поворота  $x_0$ ,  $a < x_0 < b$ . Типичным примером служит уравнение Вебера

$$y'' \pm \lambda^2 (x^2 - \alpha) y = 0.$$

Требуется построить ФСР уравнения (1), асимптотика которой пригодна при  $\lambda \rightarrow +\infty$  и равномерна по  $x \in I$ ,  $\alpha \in J$ .

Другой вариант — случай, когда близкие точки поворота  $x_1(\alpha)$ ,  $x_2(\alpha)$  — комплексные (при  $\alpha > 0$ ). В этом случае дополнительно предполагается, что функция  $q(x, \alpha)$  голоморфна по  $x \in D$ , где  $D$  — область в комплексной плоскости  $x$ ,  $D \supset I$ , при каждом фиксированном  $\alpha \in J$ . Типичным примером служит уравнение Вебера

$$y'' \pm \lambda^2 (x^2 + \alpha) y = 0.$$

Такого рода задачи возникают, например, в квантовой механике, когда энергия частицы близка к дну потенциальной ямы или к вершине потенциального барьера. В дальнейшем предполагается, что  $x_0 = 0$ ,  $a < 0 < b$ , и что  $\alpha_0 > 0$  достаточно мало, но не зависит от  $\lambda$ .

## 2. Вещественные точки поворота.

2.1. Структура функции  $q(x, \alpha)$ . Так как точка  $x = 0$  при  $\alpha = 0$  есть точка поворота второго порядка, то

$$q(0, 0) = q'_x(0, 0) = 0, \quad q''_{xx}(0, 0) \neq 0. \quad (2)$$

Потребуем дополнительно, чтобы выполнялось условие

$$q'_\alpha(0, 0) \neq 0. \quad (3)$$

При малых  $x$ ,  $\alpha$  имеем

$$q(x, \alpha) = q'_\alpha(0, 0) \alpha + \frac{1}{2} [q''_{xx}(0, 0) x^2 + 2q'_{x\alpha}(0, 0) x \alpha + q''_{\alpha\alpha}(0, 0) \alpha^2] + \dots$$

Вещественность точек поворота приводит к условию

$$q'_\alpha(0, 0) q''_{xx}(0, 0) < 0. \quad (4)$$

Занумеруем точки поворота так, чтобы было  $x_1(\alpha) < 0 < x_2(\alpha)$  при  $\alpha > 0$ . Функцию  $q$  можно представить в виде

$$q(x, \alpha) = (x^2 + a(\alpha)x + b(\alpha)) \tilde{q}(x, \alpha), \quad (5)$$



где  $\tilde{q}(x, \alpha) \in C^\infty(I \times J)$ ,  $\tilde{q}(x, \alpha) \neq 0$  при  $(x, \alpha) \in I \times J$ . Из условий (2) — (4) следует, что

$$a(0) = b(0) = D(0) = 0, \quad D'(0) > 0, \quad D(\alpha) = a^2(\alpha) - 4b(\alpha). \quad (6)$$

Так как

$$x_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2}(-a(\alpha) \pm \sqrt{D(\alpha)}),$$

то  $x_j(\alpha)$  — бесконечно дифференцируемые функции от  $\sqrt{\alpha}$  при  $\alpha \in J$ .

2.2. Преобразование уравнения. Подстановка

$$y = \sqrt{\varphi'(S)} w, \quad x = \varphi(S) \quad (7)$$

приводит уравнение (1) к виду

$$w''_{SS} - \left[ \lambda^2 q(x, \alpha) [\varphi'(S)]^2 - \frac{1}{2} \{\varphi, S\} \right] w = 0, \quad (8)$$

где  $\{\varphi, S\}$  — производная Шварца (гл. II, § 1). Функцию  $S(x, \alpha)$  выберем так, чтобы коэффициент при  $\lambda^2$  имел вид  $\pm(\beta(\alpha) - S^2)$ . Приходится различать два случая.

I.  $q_{xx}(0, 0) < 0$ .

II.  $q_{xx}(0, 0) > 0$ .

В первом случае функция  $q(x, \alpha)$  положительна при  $\alpha > 0$ ,  $x_1(\alpha) < x < x_2(\alpha)$ , во втором — отрицательна. Для функции  $S$  получаем уравнения

$$\begin{aligned} S'^2(\beta - S^2) &= q(x, \alpha) & \text{(I),} \\ S'^2(\beta - S^2) &= -q(x, \alpha) & \text{(II).} \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим случай I; случай II исследуется аналогично.

2.3. Функция  $\beta(\alpha)$ . Из условия непрерывности функции следует, что  $S = \pm\sqrt{\beta}$  при  $x = x_{1,2}(\alpha)$ . Потребуем, чтобы  $S = -\sqrt{\beta} < 0$  при  $x = x_1(\alpha)$ ; тогда на отрезке  $I(\alpha) = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$  имеем

$$\int_{\sqrt{\beta}}^S \sqrt{\beta - t^2} dt = \int_{x_1(\alpha)}^x \sqrt{q(t, \alpha)} dt, \quad (10)$$

где все корни — арифметические. Из условия  $S = \sqrt{\beta}$  при  $x = x_2(\alpha)$  находим

$$\beta(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_{x_1(\alpha)}^{x_2(\alpha)} \sqrt{q(t, \alpha)} dt. \quad (11)$$

Можно показать, что  $\beta(\alpha) \in C^\infty(J)$ . Предположим дополнительно, что функция  $q(x, \alpha)$  голоморфна по  $x$  в области  $D$ , содержащей отрезок  $I$ ; это приведет к более удобной формуле для  $\beta(\alpha)$ . Выберем ветвь функции  $\sqrt{q(x, \alpha)}$  в области  $D \setminus I(\alpha)$  так, чтобы  $\sqrt{q(x, \alpha)} = -i | \sqrt{q(x, \alpha)} |$  при  $x \in I(\alpha)$ ,  $x > x_2(\alpha)$ ; тогда  $\sqrt{q(x, \alpha)} > 0$  на верхнем берегу разреза  $I(\alpha)$ . Пусть  $C$  — простой замкнутый контур, ориентированный положительно и охватывающий отрезок  $I(\alpha)$ ; тогда

$$\beta(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \oint_C \sqrt{q(x, \alpha)} dx. \quad (12)$$

Так как подынтегральная функция бесконечно дифференцируема по  $\alpha$  при  $x \in C$ , то  $\beta(\alpha) \in C^\infty(J)$ . Более того, если функция  $q(x, \alpha)$  голоморфна по  $\alpha$  при  $\alpha \in J$ , то функция  $\beta(\alpha)$  голоморфна по  $\alpha$  при  $\alpha \in J$ . Если разложить функцию  $\sqrt{q(x, \alpha)}$  в ряд по степеням  $\alpha$  при  $x \in C$ , то можно получить разложение в ряд функции  $\beta(\alpha)$ . В частности,

$$\beta'(0) = \sqrt{\frac{2}{|q''_{xx}(0, 0)|}} |q'_\alpha(0, 0)|. \quad (13)$$

2.4. Функция  $S(x, \alpha)$ . Фиксируем  $\alpha > 0$ , и пусть  $x_1(\alpha) \leq x \leq x_2(\alpha)$ ,  $-\sqrt{\beta} \leq S \leq \sqrt{\beta}$ . Тогда левая и правая части равенства (10) — строго монотонно возрастающие функции  $S, x$ , так что  $S(x, \alpha)$  — строго монотонно возрастающая и непрерывная функция. На интервалы  $(x_2(\alpha), b]$ ,  $[a, x_1(\alpha))$  продолжим ветвь  $\sqrt{q(x, \alpha)}$  через верхнюю полуплоскость так, что

$$\begin{aligned} \sqrt{q(x, \alpha)} &= -i | \sqrt{q(x, \alpha)} |, & x > x_2(\alpha); \\ \sqrt{q(x, \alpha)} &= i | \sqrt{q(x, \alpha)} |, & x < x_1(\alpha), \end{aligned}$$

и аналогично продолжим функцию  $\sqrt{\beta - S^2}$ . Тогда получим, что функция  $S$  принадлежит  $C(I)$ , строго монотонно возрастает и бесконечно дифференцируема всюду на  $I$ , кроме точек  $x_{1,2}(\alpha)$ . При  $x$ , близких к  $x_1(\alpha)$ , правую часть равенства (11) можно представить в виде  $(x - x_1(\alpha))^{3/2} Q(x, \alpha)$ , левую — в виде  $(S + \sqrt{\beta})^{3/2} \tilde{Q}(S, \beta)$ , где  $Q, \tilde{Q}$  — функции класса  $C^\infty$ , которые не обращаются в нуль. Отсюда следует, что  $S(x, \alpha) \in C^\infty(I)$  при  $\alpha > 0$ ; при  $\alpha = 0$  это доказывается непосредственно. Кроме того,  $S(x, \alpha) \in C(I \times J)$ .

3. Комплексные точки поворота. В этом случае условия (2), (3) сохраняются, а условие (4) заменяется условием

$$q'_\alpha(0, 0) q''_{xx}(0, 0) > 0. \quad (14)$$

Представление (5) для функции  $q$  и условия (6) также сохраняются. Точки поворота — комплексно сопряженные:  $x_2(\alpha) = \overline{x_1(\alpha)}$ . Обозначим их  $x(\alpha)$ ,  $\overline{x(\alpha)}$ ,  $\text{Im } x(\alpha) < 0$ .

С помощью подстановки (7) уравнение (1) приводится к виду (8). Как и в п. 2, приходится различать два случая.

$$\text{III. } q''_{xx}(0, 0) > 0.$$

$$\text{IV. } q''_{xx}(0, 0) < 0.$$

Для функции  $S$  получим уравнения

$$S'^2 (\beta + S^2) = q(x, \alpha) \quad (\text{III}), \quad (15)$$

$$S'^2 (\beta + S^2) = -q(x, \alpha) \quad (\text{IV}).$$

Рассмотрим случай III; тогда

$$\int_{-i\sqrt{\beta}}^S \sqrt{\beta + t^2} dt = \int_{x(\alpha)}^x \sqrt{q(t, \alpha)} dt. \quad (16)$$

Ветви корней  $\sqrt{q(t, \alpha)}$ ,  $\sqrt{t^2 + \beta}$  выберем положительными при  $t \in I$ ; тогда эти корни положительны на отрезках  $[x(\alpha), x(\bar{\alpha})]$ ,  $[-i\sqrt{\beta}, i\sqrt{\beta}]$ . Поэтому

$$\int_{-i\sqrt{\beta}}^0 \sqrt{\beta + t^2} dt = \frac{i\pi\beta}{4}, \quad \int_{x(\alpha)}^{\text{Re } x(\alpha)} \sqrt{q(t, \alpha)} dt = iA, \quad A > 0.$$

Из условия  $S = -i\sqrt{\beta}$  при  $x = x(\bar{\alpha})$  находим

$$\beta(\alpha) = -\frac{2i}{\pi} \int_{x(\alpha)}^{x(\bar{\alpha})} \sqrt{q(t, \alpha)} dt.$$

Пусть  $C$  — простой замкнутый контур в комплексной плоскости  $x$ , содержащий внутри себя отрезок  $[x(\alpha), x(\bar{\alpha})]$  и ориентированный положительно. Тогда

$$\beta(\alpha) = -\frac{i}{\pi} \oint_C \sqrt{q(x, \alpha)} dx, \quad (17)$$

где ветвь корня выбрана так, что  $\sqrt{q(x, \alpha)} > 0$  при  $x \in C$ ,  $x > \text{Re } x(\alpha)$ . Функция  $\beta(\alpha)$  бесконечно дифференцируема при  $\alpha \in J$ , и справедлива формула (13). Функция  $S(x, \alpha)$  при каждом фиксированном  $\alpha \in J$  голоморфна по  $x$  в комплексной окрестности отрезка  $I$  и непрерывна по  $(x, \alpha)$ , что доказывается так же, как и в п. 2.4. При  $x \in I$  функция  $S(x, \alpha)$  вещественна и монотонно возрастает. Это следует из выбора ветвей корней и из того, что при  $x \in I$

$$\int_0^S \sqrt{t^2 + \beta} dt = \int_{\text{Re } x(\alpha)}^x \sqrt{q(t, \alpha)} dt.$$

4. Главный член асимптотики решений. Уравнение (1) с помощью преобразования (7) приводится к виду (8), и поэтому достаточно получить асимптотические формулы для решений приведенного уравнения. Независимую переменную снова обозначим  $x$ , а  $\beta$  заменим на  $\alpha^2$  (напомним, что  $\beta(\alpha) \geq 0$  при  $\alpha > 0$ ), где  $\alpha \geq 0$ .

4.1. С л у ч а й I. Рассмотрим уравнение

$$y'' - \lambda^2 \left( \frac{x^2}{4} - \alpha^2 \right) y + f(x, \alpha) y = 0 \quad (18)$$

на отрезке  $I = [-a, a]$ ,  $a > 0$ , где  $f$  — непрерывная по  $x$ ,  $\alpha$  функция. Эталонное уравнение имеет вид

$$w'' - \left( \frac{x^2}{4} - \alpha^2 \right) w = 0. \quad (19)$$

Его ФСР образуют функции параболического цилиндра (или функции Вебера)  $U(-\alpha^2, x)$ ,  $V(-\alpha^2, x)$  [22]. В обозначениях Уиттекера имеем

$$U(a, x) = D_{a-1/2}(x), \\ V(a, x) = \frac{1}{\pi} \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) [\sin \pi a D_{-a-1/2}(x) + D_{-a-1/2}(-x)].$$

Вронскиан этих решений равен

$$W(U, V) = \sqrt{2/\pi}.$$

При  $x \rightarrow +\infty$  и при  $a$  фиксированном

$$U(a, x) \sim x^{-a-1/2} e^{-x^2/4}, \\ V(a, x) \sim \sqrt{2/\pi} x^{a-1/2} e^{x^2/4}.$$

АР этих решений при  $x \rightarrow -\infty$  выглядит сложнее [22]. Уравнение (18) имеет ФСР вида

$$y_1(x, \lambda, \alpha) = U(-\lambda\alpha^2, x\sqrt{\lambda}) + O(\lambda^{-2/3}) |U(-\lambda\alpha^2, x\sqrt{\lambda})|. \quad (20)$$

Оценки остаточных членов равномерны по  $x$ ,  $\alpha$  при  $x \in I$ ,  $\alpha \in J = [0, \alpha_0]$ ,  $\alpha_0 > 0$ . Это верно и для последующих оценок.

4.2. С л у ч а й III. Приведенное уравнение имеет вид

$$y'' - \lambda^2 \left( \frac{x^2}{4} + \alpha^2 \right) y + f(x, \alpha) y = 0. \quad (21)$$

В этом случае ФСР эталонного уравнения

$$w'' - \left( \frac{x^2}{4} + \alpha^2 \right) w = 0 \quad (22)$$

образуют функции  $U(\alpha^2, x)$ ,  $U(-\alpha^2, x)$ . Уравнение (21) имеет ФСР вида

$$y_{1,2}(x, \lambda, \alpha) = U(\lambda\alpha^2, \pm x\sqrt{\lambda}) [1 + O(\lambda^{-1} \ln \lambda)]. \quad (23)$$

С точки зрения квантовой механики рассмотренные варианты отвечают случаю, когда энергия частицы близка к дну потенциальной ямы. Следующие два варианта отвечают случаю, когда энергия частицы близка к вершине потенциального барьера.

4.3. С л у ч а и II, IV. Рассмотрим уравнение

$$y'' + \lambda^2 \left( \frac{x^2}{4} \pm \alpha^2 \right) y + f(x, \alpha) y = 0, \quad (24)$$

где функция  $f(x, \alpha)$  обладает теми же свойствами, что и в п. 4.1. Эталонное уравнение имеет вид

$$w'' + \left( \frac{x^2}{4} \pm \alpha^2 \right) w = 0$$

и имеет ФСР

$$\{W(\alpha^2, x), W(\alpha^2, -x)\}, \quad \{W(-\alpha^2, x), W(-\alpha^2, -x)\}.$$

Первая (вторая) из ФСР отвечает  $\alpha^2$  ( $-\alpha^2$ ). Вронскиан этих решений равен

$$W(W(a, x), W(a, -x)) = 1.$$

При  $x \rightarrow +\infty$  имеем

$$W(a, x) = \sqrt{\frac{2k}{x}} \cos\left(\frac{x^2}{4} - a \ln x + \frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x^{5/2}}\right),$$

$$W(a, -x) = \sqrt{\frac{2}{kx}} \sin\left(\frac{x^2}{4} - a \ln x + \frac{x}{2} + \frac{\Phi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x^{5/2}}\right),$$

где обозначено

$$k = \sqrt{1 - e^{2\pi a}} - e^{\pi a}, \quad \Phi = \arg \Gamma(1/2 + ia).$$

Уравнение (24) имеет ФСР [93, 94]

$$w_{1,2}^+(x, \lambda, \alpha) = W(\pm \lambda \alpha^2, -x\sqrt{\bar{\lambda}}) + O(\lambda^{-1} \ln \lambda | W(\pm \lambda \alpha^2, -x\sqrt{\bar{\lambda}}) |),$$

$$w_{1,2}^-(x, \lambda, \alpha) = W(\pm \lambda \alpha^2, x\sqrt{\bar{\lambda}}) + O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda | W(\pm \lambda \alpha^2, x\sqrt{\bar{\lambda}}) |). \quad (25)$$

Оценки остаточных членов равномерны по  $x, \alpha$ .

## § 8. Слияние нескольких точек поворота

1. Характеристический многоугольник. Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon^2 w'' - q(z, \varepsilon) w = 0 \quad (1)$$

при следующих условиях:

1) Функция  $q(z, \varepsilon)$  голоморфна по совокупности переменных в области

$$D: |z| \leq r_0, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \quad |\arg \varepsilon| \leq \theta_0.$$

2) При  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $|\arg \varepsilon| \leq \theta_0$  справедливо АР

$$q(z, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} q_r(z) \varepsilon^r,$$

равномерное по  $z$ ,  $|z| \leq r_0$ , где функции  $q_r(z)$  голоморфны при  $|z| \leq r$ .

3)  $q_0(z) = z^n \tilde{q}_0(z)$ ,  $\tilde{q}_0(0) \neq 0$ . Функция  $\tilde{q}_0(z)$  голоморфна при  $|z| \leq r_0$ .

Точка  $z = 0$  при  $m \geq 1$  является точкой поворота. Случай  $n = 1$  рассмотрен в §§ 1, 2, случай  $n = 2$  — в § 7, так что рассмотрим случай  $n \geq 3$ . Числа  $r_0, \varepsilon_0$  предполагаются положительными и достаточно малыми. Не ограничивая общности, можно считать, что  $q(z, 0) = z^n$ , так как к такому виду можно привести уравнение (1) с помощью замены переменной и функции (гл. II, § 1; гл. IV, § 4). Тогда уравнение (1) примет вид

$$\varepsilon^2 w'' - [z^n + \varepsilon \tilde{q}(z, \varepsilon)] w = 0.$$

Точкой поворота  $z(\varepsilon)$  уравнения (1) назовем решение уравнения  $q(z, \varepsilon) = 0$ . Если  $\tilde{q}(z, \varepsilon) \neq 0$ , то при  $\varepsilon \neq 0$  имеется  $n$  точек поворота  $z_1(\varepsilon), \dots, z_n(\varepsilon)$ , которые при  $\varepsilon \rightarrow 0$  сливаются в одну точку поворота  $z = 0$ . Их называют *вторичными точками поворота*.

Пусть  $q_r(z) \neq 0$ ; тогда

$$q_r(z) = \sum_{k=m_r}^{\infty} q_{rk} z^k, \quad q_{r, m_r} \neq 0. \quad (2)$$

На плоскости с декартовыми координатами  $X, Y$  отметим точки

$$Q = (1, -1), \quad P_0 = (0, n/2), \quad P_r = (r/2, m_r/2), \quad r = 1, 2, \dots$$

Если  $q_r(z) \equiv 0$ , то точка  $P_r$  отсутствует.

Пусть  $\Gamma$  — ломаная, соединяющая точки  $P_0, Q$ , вершины  $\Gamma$  — некоторые из точек  $P_r$ . Пусть  $\Gamma$  выпукла книзу и все точки  $P_r$  лежат на или над  $\Gamma$ . Тогда  $\Gamma$  называется *характеристически многоугольником* точки поворота  $z = 0$  [80]. Ломаная  $\Gamma$  состоит из одного или двух звеньев. Возможны три варианта.

1.  $\Gamma$  — отрезок  $P_0Q$ . В этом случае либо  $2m_1 > n - 2$ , либо  $q_1(z) \equiv 0$ , так что  $q(z, \varepsilon) = z^m + \varepsilon^2 q(z, \varepsilon)$  (уравнения такого вида рассматривались в предыдущих параграфах).

2.  $\Gamma$  — отрезок  $P_0Q$ , но точка  $P_1 \in \Gamma$ . В этом случае  $2m_1 = n - 2$ .

3.  $\Gamma$  — ломаная с вершинами  $P_0, P_1, Q$ , точка  $P_1$  лежит ниже отрезка  $P_0Q$ . В этом случае  $2m_1 < n - 2$ .

Асимптотика решений в окрестности точки  $z = 0$  в случаях 2, 3 значительно сложнее, чем в случае 1.

## 2. Редукция уравнения (1) в случае, когда $\Gamma$ — отрезок [33].

2.1. Редукция в полной окрестности точки поворота. Заменим уравнение (1) эквивалентной системой

$$\varepsilon w' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q(z, \varepsilon) & 0 \end{bmatrix} u, \quad u = \begin{bmatrix} w \\ \varepsilon w' \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Пусть выполнено условие: при  $z \rightarrow 0$

$$q_1(z) = O(z^{(n-1)/2}), \quad n \text{ нечетно,}$$

$$q_1(z) = O(z^{n/2}), \quad n \text{ четно.}$$

Тогда существует матрица-функция  $T(z, \varepsilon)$  такая, что преобразование

$$u = T(z, \varepsilon) v \quad (4)$$

приводит систему (3) к виду

$$\varepsilon v' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z^n + \varepsilon \sum_{j=2}^n \beta_j(\varepsilon) z^{n-j} & 0 \end{bmatrix} v. \quad (5)$$

Матрица  $T(z, \varepsilon)$  голоморфна по  $z, \varepsilon$  в области  $D$  (см. условие 1)) и разлагается в AP

$$T(z, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} T_r(z) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad |\arg \varepsilon| \leq \theta_0, \quad (6)$$

равномерно по  $z, |z| \leq r$ , причем  $\det T_0(z) \equiv 1$ . Функции  $\beta_j(\varepsilon)$  голоморфны при  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0, |\arg \varepsilon| \leq \theta_0$  и разлагаются в этом секторе в AP

$$\beta_j(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{jk} \varepsilon^k, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Система (5) эквивалентна уравнению

$$\varepsilon^2 W'' - \left[ z^n + \varepsilon \sum_{j=2}^n \beta_j(\varepsilon) z^{n-j} \right] W = 0, \quad (7)$$

в котором коэффициент при  $W$  — полином от  $z$  степени  $n$ .

Таким образом, исследование асимптотики решений уравнения (1) в окрестности точки поворота  $z = 0$  приводит к необходимости исследовать решения уравнения вида

$$w'' - Q(z)w = 0, \quad Q(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n.$$

Условия на функцию  $q_1(z)$  эквивалентны тому, что характеристический многоугольник  $\Gamma$  состоит из одного отрезка.

2.2. Р е д у к ц и я у р а в н е н и я (1) в с е к т о р е.  
Пусть при  $z \rightarrow 0$

$$q_1(z) = O(z^{(n-1)/2}), \quad n \text{ нечетно,}$$

$$q_1(z) = O(z^{(n-2)/2}), \quad n \text{ четно.}$$

Заметим, что если  $n$  четно,  $q_1(z) = q_0 z^{(n-2)/2} + \dots$ , то  $\Gamma$  состоит из двух отрезков. Пусть  $\delta > 0$  достаточно мало, область  $D$  та же, что и в п. 1,  $\theta_0 = (m+2)\delta/4$ . Тогда существует преобразование (4), приводящее систему (3) к виду (5) и обладающее теми же свойствами. Различие состоит только в том, что редукция осуществляется при  $z$ , лежащих в секторе

$$|z| \leq r_0, \quad -\frac{\pi}{n+2} + \delta \leq \arg z - \frac{2k\pi}{n+2} \leq \frac{3\pi}{m+2} + \delta,$$

где  $k$  — фиксированное целое число.

3. Асимптотика решений в случае, когда  $\Gamma$  состоит из одного звена [89]. В этом случае уравнение (1) имеет вид

$$\varepsilon^2 w'' + [z^n + \varepsilon z^m q_1(z) + \varepsilon^2 q_2(z, \varepsilon)] w = 0, \quad (8)$$

где либо  $q_1(0) \neq 0$ ,  $2m > n - 2$ , либо  $q_1(z) \equiv 0$ .

Окрестность  $|z| \leq r$  точки поворота разбивается на две области: *внешнюю*

$$D_e: c_1 \leq \varepsilon^{2/(n+2)} \leq |z| \leq r$$

и *внутреннюю*

$$D_i: |z| \leq c_2,$$

где  $c_1, c_2$  — положительные постоянные, не зависящие от  $\varepsilon$ , и  $c^2$  достаточно мала. В этих областях строятся АР решений, которые называются соответственно *внешним* и *внутренним разложениями* (или *решениями*). Внешнее разложение есть попросту модификация ВКБ-приближения (гл. II, § 3). Внутреннее разложение выражается через решения эталонного уравнения

$$\varepsilon^2 w'' - z^n w = 0,$$

т. е. через бесселевы функции (§ 3). Так как пересечение  $D_i \cap D_e$  непусто, то в этой области пригодны оба АР, что позволяет сравнить (или сплечь) их и получить асимптотику ФСР уравнения (1) в полной окрестности точки поворота. На самом деле ситуация несколько сложнее, так как области  $D_e$  и  $D_i$  приходится разбивать на секторы, в каждом из которых строится асимптотика соответствующей ФСР, и находить формулы связи между ними.

3.1. В н е ш н е е р а з л о ж е н и е. Сделаем преобразование

$$\begin{bmatrix} w \\ \varepsilon w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ iz^{n/2} & -iz^{n/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad z = \zeta^2.$$



Тогда получим систему

$$(\zeta^{-(n+2)}\varepsilon) \zeta \frac{du}{d\zeta} = B(\zeta, \varepsilon)u,$$

$$B(\zeta, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j(\zeta) [\zeta^{-(q+2)}\varepsilon]^j.$$

Заметим, что  $\rho = \zeta^{-(n+2)}\varepsilon \rightarrow 0$ , если  $|z| \geq \varepsilon^{1/(n+2)-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , так что ФАР решения  $u$  ищется в виде ряда по степеням  $\rho$ . Имеем

$$B_0(\zeta) = \begin{bmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix}, \quad B_1(\zeta) = \begin{bmatrix} -ib_1(\zeta) - n/2 & -ib_1(\zeta) + n/2 \\ ib_1(\zeta) + n/2 & ib_1(\zeta) - n/2 \end{bmatrix},$$

$$B_j(\zeta) = \begin{bmatrix} -ib_j(\zeta) & -ib_j(\zeta) \\ ib_j(\zeta) & ib_j(\zeta) \end{bmatrix}, \quad j \geq 2,$$

где  $b_j(\zeta)$  — ряды по степеням  $\zeta$ . В частности,

$$b_1(\zeta) = \begin{cases} q_{1k_2}\zeta^2 + q_{1k_4}\zeta^4 + \dots + q_{1k_{2m}}\zeta^{2m} + \dots, & n \text{ четно,} \\ q_{1k_1}\zeta + q_{1k_3}\zeta^3 + \dots + q_{1k_{2m-1}}\zeta^{2m-1} + \dots, & n \text{ нечетно,} \end{cases}$$

где  $k_{2m} = n/2 + m - 1$ ,  $k_{2m-1} = (n-1)/2 + m - 1$ .

Пусть  $D_k = S_k \cap D_\varepsilon$ , где  $S_k$  — сектор

$$\frac{2(k-1)}{n+2} \pi < \arg z < \frac{2(k+1)}{n+2} \pi.$$

Уравнение (9) имеет ФМ

$$Y = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ \varepsilon w'_1 & \varepsilon w'_2 \end{bmatrix} =$$

$$= z^{-n/4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ iz^{n/2} & -iz^{n/2} \end{bmatrix} \left[ I + \sum_{j=0}^m U_j(\zeta) (\varepsilon \zeta^{-n-2})^j + R_m(\zeta, \varepsilon) \right] \times$$

$$\times \exp \{ (\varepsilon \zeta^{-n-2})^{-1} \Lambda_0 + \Lambda_1 \}, \quad (9)$$

где обозначено

$$\Lambda_0 = \frac{2i}{n+2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_1 = a(\zeta) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$a(\zeta) = i \int_0^\zeta t^{-1} b_1(t) dt. \quad (10)$$

Для остаточного члена в области  $D_k$  справедлива оценка

$$|R_m(\zeta, \varepsilon)| \leq c_m (\varepsilon \zeta^{-n-2})^j. \quad (11)$$

При  $\rho \rightarrow \infty$  внешнее разложение совпадает со стандартным ВКБ-разложением (гл. II, § 3), матрицы  $U_j(\zeta)$  определяются из рекуррентных соотношений. В этих формулах  $z^{1/2} > 0$ ,  $z^{1/4} > 0$  при  $z > 0$ .

3.2. Внутреннее разложение. Во внутренней области  $D_i$  уравнение (1) можно рассматривать как возмущение уравнения  $\varepsilon^2 w'' + z^n w = 0$ , решения которого выражаются через бесселевы функции. Сделаем преобразование

$$\tilde{z} = \varepsilon^{-2/(n+2)} z, \quad \begin{bmatrix} w \\ \varepsilon w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^n \end{bmatrix} v, \quad \rho = \varepsilon^{1/(n+2)};$$

тогда получим систему

$$\frac{dv}{dz} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{z}^n + \psi(\tilde{z}, \rho) & 0 \end{bmatrix} v, \quad (12)$$

$$\psi(\tilde{z}, \rho) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(\tilde{z}) \rho^j.$$

Новую переменную  $\tilde{z}$  принято называть *внутренней переменной*. Будем искать ФАР в виде

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} v_j(\tilde{z}) \rho^j;$$

тогда для  $v_j$  получим рекуррентную систему уравнений

$$\frac{dv_0}{d\tilde{z}} = C_0(\tilde{z}) v_0, \quad \frac{dv_j}{d\tilde{z}} = \sum_{k=0}^j C_k(\tilde{z}) v_{j-k}, \quad j \geq 1, \quad (13)$$

$$C_0(\tilde{z}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{z}^n & 0 \end{bmatrix}, \quad C_j(\tilde{z}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_j(\tilde{z}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Будем рассматривать уравнение (13) как матричное, т. е.  $v$  есть  $(2 \times 2)$ -матрица. Первое из уравнений (13) имеет ФМ

$$v_0(\tilde{z}) = \xi^v \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \tilde{z}^{n/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_v^{(1)}(\xi) & H_v^{(2)}(\xi) \\ H_{v-1}^{(1)}(\xi) & H_{v-1}^{(2)}(\xi) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\xi = \frac{2}{n+2} \tilde{z}^{(n+2)/2}, \quad v = \frac{1}{n+2}.$$

Решения следующих уравнений находятся с помощью метода вариации постоянных. При подходящем выборе контуров интегрирования получаем

$$v_j(\tilde{z}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{z}^{n/2} \end{bmatrix} \xi^{1/(n+2)} V_j(\tilde{z}) \begin{bmatrix} g_1(\xi) & 0 \\ 0 & g_2(\xi) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$g_{1,2}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \exp \left\{ \pm i \left( \xi - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right\}.$$

Все последующие асимптотические разложения и оценки справедливы в области  $D_0(\bar{z}) = D_i \cap S_0$ . Уравнение (9) имеет ФМ вида

$$Y_0(\bar{z}, \rho) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^n \end{bmatrix} \left[ \sum_{j=0}^m v_j(\bar{z}) \rho^j + O(\rho^{j+1}) \right], \quad |\bar{z}| \leq a_0, \quad (16)$$

$$Y_0(\bar{z}, \rho) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^n \end{bmatrix} \xi^v \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{z}^{n/2} \end{bmatrix} \times \\ \times \left[ \sum_{j=0}^m w_j(\bar{z})(\bar{z}^{1/2} \rho)^j + O((\bar{z}^{1/2} \rho)^{m+1}) \right] \begin{bmatrix} g_1(\xi) & 0 \\ 0 & g_2(\xi) \end{bmatrix}, \quad |\bar{z}| \geq a_0.$$

Здесь  $w_j(\bar{z}) = \bar{z}^{-j/2} V_j(\bar{z})$ , матрицы-функции  $w_j(\bar{z})$  ограничены при  $|\bar{z}| \geq a_0$  и  $\xi > 0$  при  $\bar{z} > 0$ . Для матриц  $V_j(\xi)$  справедливы следующие АР при  $\xi \rightarrow \infty$ :

А.  $n$  четно. Тогда

$$V_{2m-1}(\xi) = 0, \quad 2m - 1 < n + 2,$$

$$V_{2m}(\xi) = \xi^{2m/(n+2)} \sum_{j=0}^{\infty} V_{2m,j} \xi^{-j}, \quad 2m < n + 2,$$

$$V_k(\xi) = \xi^{k/(n+2)} \left[ V_{k0} + \sum_{j=1}^{\infty} V_{kj} \xi^{-j} \ln \xi \right], \quad k \geq n + 2.$$

В частности,

$$V_2(\xi) = \frac{1}{2} \left( \frac{n+2}{2} \right)^{2/(n+2)} q_{1k_2} \xi^{2/(n+2)} V_0(\xi) \left\{ \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} + O(\xi^{-1}) \right\}.$$

Б.  $n$  нечетно. Тогда

$$V_k(\xi) = \xi^{k/(n+2)} \sum_{j=0}^{\infty} V_{kj} \xi^{-j}, \quad k < n + 2,$$

$$V_k(\xi) = \xi^{k/(n+2)} \left[ V_{k0} + \sum_{j=1}^{\infty} V_{kj} \xi^{-j} \ln \xi \right], \quad k \geq n + 2.$$

В частности,

$$V_1(\xi) = \left( \frac{n+2}{2} \right)^{1/(n+2)} q_{1k_1} \xi^{1/(n+2)} V_0(\xi) \left\{ \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} + O(\xi^{-1}) \right\}.$$

3.3. Ф о р м у л ы с в я з и. Имеем

$$W_0(z, \varepsilon) \equiv W_0(\bar{z}, \rho) \Omega_0(\rho).$$

Матрица связи имеет вид

$$\Omega_0(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{n+2}\right)^{n/(2(n+2))} \rho^{-n/2} \times \\ \times \left\{ \begin{bmatrix} \exp\left\{i\left(\frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\} & 0 \\ 0 & \exp\left\{-i\left(\frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\} \end{bmatrix} + O(\varepsilon) \right\}, \quad (17) \\ \nu = \frac{1}{n+2}.$$

Эта формула позволяет найти значение внешнего разложения в точке поворота  $z = 0$ . Имеем

$$Y_0(0, \varepsilon) = \begin{cases} v_0(0)[I + A\rho^2 + O(\rho^4)]\Omega_0(\rho), & n \text{ четно,} \\ v_0(0)[I + B\rho^2 + O(\rho^4)]\Omega_0(\rho), & n \text{ нечетно,} \end{cases} \\ v_0(0) = \begin{bmatrix} \frac{i2^\nu}{\Gamma(1-\nu)\sin\nu\pi} & 0 \\ 0 & \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n/(n+2)} \frac{i2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)\sin\nu\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ e^{-i\nu\pi} & -e^{i\nu\pi} \end{bmatrix},$$

где  $A, B$  — постоянные матрицы,  $\nu = 1/(n+2)$ .

Аналогичные внутренние ФСР в областях  $D_k(\bar{z}) \cap D_i$  и формулы связи получены в [89].

**4. Асимптотика решений в случае, когда  $\Gamma$  состоит из двух звеньев [90].** В этом случае окрестность точки поворота  $z = 0$  приходится разбивать на несколько зон. Ограничимся примером [99]

$$\varepsilon^2 w'' - (z^n - \varepsilon) w = 0, \quad n \geq 3. \quad (18)$$

**4.1. Внешнее разложение.** Внешняя область  $D_e$  — кольцо

$$M\varepsilon^{1/n} \leq |z| \leq r,$$

где  $M > 0$  — достаточно большое число, внешнее разложение для ФМ  $W$  уравнения (18) имеет вид

$$W(z, \varepsilon) = \begin{bmatrix} z^{-n/4} & 0 \\ 0 & z^{n/4} \end{bmatrix} \tilde{W}(z, \varepsilon) \times \\ \times \exp\left\{ \left[ \frac{1}{\varepsilon} \frac{2}{n+2} z^{(n+2)/2} + \frac{1}{n-2} z^{(2-n)/2} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}, \\ \tilde{W}(z, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + O(\varepsilon). \quad (19)$$

Область  $D_e$  покрывается областями  $D_{e,k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n+1$ , каждая из которых содержится в секторе

$$G_{k+3}: \delta + \frac{-\pi + 2\pi k}{n+2} \leq \arg z \leq \frac{3\pi + 2\pi k}{n+2} - \delta, \\ M\varepsilon^{1/n} \leq |z| \leq r,$$

и устроена следующим образом. Пусть  $\tilde{G}_{k+3}$  — образ области  $G_{k+3}$  при отображении  $\zeta = z^{(n+2)/2}$ , так что

$$-\frac{\pi}{2} + \pi k + \frac{n+2}{2} \delta \leq \arg \zeta \leq \frac{3\pi}{2} + \pi k - \frac{n+2}{2} \delta,$$

$$\zeta_0 = r^{(n+2)/2}.$$

Пусть  $\tilde{D}_{e,k} \subset \tilde{G}_{k+3}$  — такая область, что каждую точку  $\zeta \in \tilde{D}_{e,k}$  можно соединить с точкой  $-\zeta_0$  кривой, вдоль которой  $\operatorname{Re} \zeta$  не убывает, и с точкой  $\zeta_0$  кривой, вдоль которой  $\operatorname{Re} \zeta$  не возрастает. Область  $D_{e,k}$  — прообраз области  $\tilde{D}_{e,k}$ . В частности, если  $k=0$ , то  $\tilde{G}_3$  — сектор

$$M^{(n+2)/2} \varepsilon^{1/n} \leq |\zeta| \leq \zeta_0, \quad -\frac{\pi}{2} + \delta \leq \arg \zeta \leq \frac{3\pi}{2} - \delta.$$

Проведем касательные к окружности  $C: |\zeta| = M^{(n+2)/2} \varepsilon^{1/n}$  вниз до пересечения с граничными лучами сектора  $\tilde{G}_3$  и удалим из  $\tilde{G}_3$  две малые области, вырезаемые этими касательными; тогда получим область  $D_{e,3}$ . В каждой из областей  $D_e$  существует ФМ  $W_k(z, \varepsilon)$  вида (19). Для матрицы  $W$  можно получить АР по степеням  $\varepsilon$ .

4.2. Внутреннее разложение. Сделаем замену переменной

$$z = \varepsilon^{1/n} t, \quad \rho = \varepsilon^{(n-2)/(2n)}; \quad (20)$$

тогда уравнение (18) примет вид

$$\rho^2 \frac{d^2 u}{dt^2} - (t^n - 1) u = 0. \quad (21)$$

В качестве внутренней области  $D_e$  возьмем круг  $|t| \leq M$  (т. е.  $|x| \leq M \varepsilon^{1/n}$ ), из которого удалены малые фиксированные окрестности всех точек поворота  $t_k = \exp\{2\pi i k/n\}$ ,  $k=0, 1, \dots, n-1$ . Эти точки называют *вторичными точками поворота*.

Эталонное уравнение (21) не интегрируется, в отличие от рассмотренного в п. 3 случая, но асимптотику его ФСР при  $\rho \rightarrow 0$  можно получить всюду в области  $D_e$  с помощью методов, изложенных в гл. III, § 3. Из каждой точки поворота выходят по три ЛС, разбивающие плоскость  $t$  на области типа полуплоскости (их ровно  $n+2$ ) и области типа полосы. Построим асимптотику одной из внутренних ФМ.

Из точки поворота  $t=1$  выходят две ЛС  $l_1, l_2 = l_1^*$ ,  $\operatorname{Im} t > 0$  при  $t \in l_1$ , с асимптотами  $\arg t = \pm \pi/(n+2)$ . Они ограничивают область  $D_1$  типа полуплоскости, содержащую полюсь  $(1, +\infty)$ . При  $n$  нечетном третья ЛС  $l_0$  есть полюсь  $(-\infty, 1]$ , при  $n$  четном есть отрезок  $[-1, 1]$ . К ЛС  $l_1$  примыкает область  $D_2$  типа полосы, к области  $D_2$  — область  $D_3$  типа полуплоскости такая, что одна из ее граничных ЛС  $l_3$  имеет ту же асимптоту  $\arg t = \pi/(n+2)$ , что и линия  $l_1$ .

Положим

$$D_0 = D_1 \cup l_1 \cup D_2 \cup l_2 \cup D_3,$$

область  $D_0$  — каноническая (гл. III, § 3, п. 2.4). Удалим из  $D_0$  малые окрестности граничных ЛС и полученную область обозначим  $\tilde{D}_0$ . Пусть ФСР определяется заданием  $(1, l_1, D_0)$ ; тогда уравнение (18) имеет ФМ вида

$$W_i(t, \rho) = e^{\frac{n-1}{12} \pi i} \begin{bmatrix} p^{-1/4}(t) & 0 \\ 0 & \varepsilon^{1/2} p^{1/4}(t) \end{bmatrix} \tilde{W}(t, \rho) \begin{bmatrix} e^{\rho^{-1}S} & 0 \\ 0 & e^{-\rho^{-1}S} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$S(t) = \int_1^t \sqrt{p(\tau)} d\tau, \quad p(t) = t^n - 1,$$

$$\tilde{W}(t, \rho) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + O(\rho).$$

Обозначим  $W_e(z, \varepsilon)$  внешнюю ФМ, отвечающую области  $D_{e,3}$  (п. 4.1); тогда

$$W_i(t, \rho) = W_e(z, \varepsilon) \Omega(\varepsilon).$$

Так как матрица перехода  $\Omega(\varepsilon)$  не зависит от  $z$ , то в этой формуле можно взять любое  $z \in D_i \cap D_e$  и заменить ФМ  $W_i, W_e$  их асимптотиками (19), (22). Положим

$$x_0 = \alpha \rho^{1/(n-2)}, \quad t_0 = \alpha \rho^{-1/(n-2)}, \quad |\alpha| = 1,$$

так что  $x_0 \in D_{e,3}$ ; тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \frac{2}{n+2} x_0^{(n+2)/2} + \frac{1}{n-2} x_0^{-n/2+1} - \frac{1}{\rho} \int_1^{t_0} \sqrt{p(t)} dt = \\ = c_1 \rho^{-1} + O(\rho^{(n+2)/(2(n-2))}). \end{aligned}$$

Для матрицы связи  $\Omega(\varepsilon)$  справедлива асимптотическая формула

$$\Omega(\varepsilon) = e^{\frac{n-1}{12} \pi i} \varepsilon^{1/4} [I + O(\rho)] \begin{bmatrix} e^{c_1 \rho^{-1}} & 0 \\ 0 & e^{-c_1 \rho^{-1}} \end{bmatrix},$$

где  $c_1$  — постоянная.

В работе [100] подробно исследовано уравнение

$$\varepsilon^2 w'' - (z^5 - \varepsilon z) w = 0.$$

## ГЛАВА V

### УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ $n$ -ГО ПОРЯДКА

В этой главе рассматриваются скалярные уравнения

$$y^{(n)} + \lambda q_1(x, \lambda^{-1}) y^{(n-1)} + \dots + \lambda^n q_n(x) y = 0$$

и системы

$$y' = \lambda A(x, \lambda^{-1}) y, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Приведены асимптотические формулы для решений на конечном интервале, на полуоси и в комплексной плоскости  $x$ .

#### § 1. Уравнения и системы на конечном интервале

**1. Уравнение  $n$ -го порядка.** Рассмотрим уравнение

$$ly \equiv y^{(n)} + \sum_{k=1}^n \lambda^k q_k(x) y^{(n-k)} = 0 \quad (1)$$

на отрезке  $I = [a, b]$ . Здесь  $\lambda > 0$  — большой параметр, коэффициенты  $q_k(x)$  комплекснозначные и все  $q_k(x) \in C^\infty(I)$ . Асимптотика решений уравнения (1) при  $\lambda \rightarrow +\infty$  в простейшем случае выражается через корни характеристического уравнения

$$l(x, p) \equiv p^n + \sum_{k=0}^{n-1} q_k(x) p^{n-k} = 0. \quad (2)$$

Функция  $l(x, p)$  называется  $\lambda$ -символом оператора  $l$ . Заметим, что уравнение (1) можно записать в виде

$$l(x, \lambda^{-1}D) y = 0, \quad D = d/dx.$$

**1.1. Формальные асимптотические решения.** Будем искать ФАР уравнения (1) в виде

$$y = e^{\lambda S(x)} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} a_j(x). \quad (3)$$

Подставим этот ряд в (1), сократим на  $e^{\lambda S(x)}$  и приравняем нулю коэффициенты при степенях  $\lambda^{-1}$ . Тогда получим рекуррентную систему уравнений для неизвестных функций  $S(x)$ ,  $a_0(x)$ ,  $a_1(x)$ .

Выпишем первые два уравнения. Применяя формулу Лейбница

$$l(f(x)g(x)) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} D^j f(x) \left( \frac{\partial}{\partial p} \right)^j l(x, p) |_{p=D} g(x),$$

получаем

$$l[a_0(x) e^{\lambda S(x)}] = e^{\lambda S(x)} \left[ l(x, S'(x)) a_0'(x) + \right. \\ \left. + \lambda^{-1} (l_p(x, S'(x)) a_0'(x) + \frac{1}{2} l_{pp}(x, S'(x)) S''(x) a_0(x)) \right] + O(\lambda^{-2}). \quad (4)$$

Для функции  $S'(x)$  получаем уравнение  $l(x, S'(x)) = 0$ , т. е.  $S'(x)$  — корень характеристического уравнения (2). Пусть  $p_j(x)$  — один из корней этого уравнения. Полагая  $S'(x) = p_j(x)$ , получаем

$$S(x) = \int_{x_0}^x p_j(t) dt, \quad x_0 \in I.$$

Функция  $a_0(x)$  определяется из уравнения

$$l_p(x, p_j(x)) a_0'(x) + \frac{1}{2} l_{pp}(x, p_j(x)) a_0(x) = 0,$$

и окончательно получаем ФАР вида

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) [1 + O(\lambda^{-1})],$$

$$\tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) = \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t) dt - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x p_j'(t) \frac{l_{pp}(t, p_j(t))}{l_p(t, p_j(t))} dt \right\}. \quad (5)$$

Мы ограничились вычислением функций  $S(x)$ ,  $a_0(x)$ . Этим же методом можно получить остальные коэффициенты  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$ , ... ряда (3). Но формулы для них оказываются громоздкими, и поэтому в приложениях используется, как правило, только главный член асимптотики.

1.2. Остаточные условия существования асимптотики решений. Если при  $x = x_0$  характеристическое уравнение (2) имеет кратный корень, то  $x_0$  называется *точкой поворота* уравнения (1). Точки поворота определяются исключением  $p$  из системы

$$l(x, p) = 0, \quad l_p(x, p) = 0. \quad (6)$$

Пусть  $p_1(x)$ , ...,  $p_n(x)$  — корни уравнения (2). Введем условия:

1) Уравнение (1) не имеет точек поворота при  $x \in I$ , т. е.

$$p_j(x) \neq p_k(x), \quad j \neq k, \quad x \in I.$$



2) Разности  $\operatorname{Re}(p_j(x) - p_k(x))$  не меняют знак при  $j$  фиксированном,  $x \in I$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Если условие 1) выполнено, то  $p_k(x) \in C^\infty(I)$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Уравнение (1) имеет решение вида

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) \left[ 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-k} a_{jk}(x) + O(\lambda^{-N}) \right], \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Здесь  $N \geq 1$  — любое, все  $a_{jk}(x) \in C^\infty(I)$ , оценка остаточного члена равномерна по  $x \in I$ .

Асимптотическую формулу (7) можно дифференцировать по  $x$  и по  $\lambda$  любое число раз, с сохранением равномерной по  $x$  оценки остаточного члена. В частности, для главного члена асимптотики имеем

$$y_j^{(m)}(x, \lambda) \sim \lambda^m p_j^m(x) \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0), \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

равномерно по  $x \in I$ .

Если условие 2) выполнено при всех  $j$ , то решения вида (7) образуют ФСР уравнения (1). Причины, по которым возникают условия 1), 2), уже обсуждались в гл. II, § 7.

Главный член асимптотики  $\tilde{y}_j$  можно записать иначе. Используя тождества (здесь  $p = p(x)$ )

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} l_p(x, p) &= p'(x) l_{pp}(x, p) + l_{px}(x, p), \\ \frac{p'(x) l_{pp}(x, p)}{l_p(x, p)} &= \frac{d}{dx} \ln l(x, p) - \frac{l_{px}(x, p)}{l_p(x, p)}, \end{aligned}$$

получаем из (5)

$$\begin{aligned} \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) &= \\ &= [l_p(x, p_j(x))]^{-1/2} \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t) dt + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{l_{px}(t, p_j(t))}{l_p(t, p_j(t))} dt \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

Можно также представить  $\tilde{y}_j$  в виде

$$\tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) = \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t) dt - \int_{x_0}^x \sum_{k=1}^n \frac{p'_j(t) dt}{p_j(t) - p_k(t)} \right\}, \quad (9)$$

где стрих означает, что  $k \neq j$ .

**П р и м е р ы 1.** Рассмотрим двучленное уравнение

$$y^{(n)} - \lambda^n q(x) y = 0.$$

Оно не имеет точек поворота, если  $q(x) \neq 0$ ,  $x \in I$ . Пусть  $q^{1/n}(x)$  — фиксированная ветвь корня и  $\omega_1, \dots, \omega_n$  — все различные

значения  $\sqrt[n]{1}$ . Асимптотика ФСР имеет вид

$$y_j(x, \lambda) \sim [q(x)]^{-1/2+1/2n} \exp \left\{ \lambda \omega_j \int_{x_0}^x q^{1/n}(t) dt \right\}$$

при условии: все разности  $\operatorname{Re}[(\omega_j - \omega_k) q^{1/n}(x)]$  не меняют знак при  $x \in I$ . Если функция  $q(x)$  вещественна, то это условие выполняется.

2. Рассмотрим «биквадратное» уравнение

$$y^{(4)} - 2\lambda^2 a(x) y'' + \lambda^4 b(x) y = 0.$$

Корни характеристического уравнения равны

$$p_j(x) = \pm \sqrt{a(x) \pm D(x)}, \quad D(x) = a^2(x) - b(x).$$

Точки поворота — корни одного из уравнений

$$b(x) = 0, \quad D(x) = 0.$$

Из (7) находим асимптотику ФСР

$$y_j(x, \lambda) \sim p_j^{-1/2}(x) D^{-1/4}(x) \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t) dt - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x p_j'(t) D^{-1/2}(t) dt \right\}.$$

**З а м е ч а н и е.** Для построения конечного числа членов асимптотического разложения решения достаточно конечной гладкости коэффициентов уравнения (1). Например, решение вида (7) при  $N \geq 1$  фиксированном существует, если все  $q_j(x) \in C^{N+1}(I)$ . Далее, при условиях 1), 2) существует решение уравнения (1), которое разлагается в асимптотический ряд

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} a_{jk}(x) \right], \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Однако построение такого решения неконструктивно (см. гл. II, § 3).

1.3. Сведение уравнения (1) к системе. Другой метод построения ФАР уравнения (1) состоит в следующем. Вначале уравнение стандартным способом сводится к системе первого порядка. Затем полученная система преобразуется к почти диагональному виду

$$z' = [\lambda \Lambda_0(x) + \Lambda_1(x) + \dots + \lambda^{-N+1} \Lambda_N(x) + O(\lambda^{-N})],$$

где  $\Lambda_j(x)$  — диагональные матрицы. Отбрасывая  $O(\lambda^{-N})$ , получаем распадающуюся систему, которая интегрируется; тем самым получаем ФАР.

Приведем явные формулы для случая  $N = 1$ . Замена

$$y = y_1, \quad y_1' = \lambda y_2, \quad \dots, \quad y_{n-1}' = \lambda y_n,$$

сводит уравнение (1) к системе первого порядка

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -q_n & -q_{n-1} & -q_{n-2} & \dots & -q_1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Матрица  $A(x)$  имеет собственные значения  $p_j(x)$  и собственные векторы  $(1, p_j(x), \dots, p_j^{n-1}(x))^T$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Матрица

$$T_0(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ p_1(x) & p_2(x) & \dots & p_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{n-1}(x) & p_2^{n-1}(x) & \dots & p_n^{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

приводит матрицу  $A(x)$  к диагональному виду, т. е.

$$T_0^{-1}(x) A(x) T_0(x) = \Lambda_0(x) = \text{diag}(p_1(x), \dots, p_n(x)).$$

Подстановка  $y = T_0(x)z$  приводит систему (10) к виду

$$z' = \left[ \lambda \Lambda_0(x) - T_0^{-1}(x) \frac{dT_0(x)}{dx} \right] z, \quad (11)$$

т. е. диагонализует систему (10) с точностью до  $O(1)$ . Имеем

$$\left( T_0^{-1}(x) \frac{dT_0(x)}{dx} \right)_{jj} = -\frac{p_j'(x)}{2} \frac{l_{pp}(x, p_j(x))}{l_p(x, p_j(x))} \equiv -p_j^{(1)}(x), \quad (12)$$

$$\left( T_0^{-1}(x) \frac{dT_0(x)}{dx} \right)_{jk} = \frac{p_k'(x)}{p_k(x) - p_j(x)} \frac{l_p(x, p_k(x))}{l_p(x, p_j(x))}, \quad k \neq j.$$

Сделаем преобразование  $z = (I + \lambda^{-1}T_1)w$ , т. е.

$$y = T_0(x) [I + \lambda^{-1}T_1(x)] w; \quad (13)$$

тогда получим систему

$$w' = \left[ (I + \lambda^{-1}T_1)^{-1} \left( \lambda \Lambda_0 - T_0^{-1} \frac{dT_0}{dx} \right) (I + \lambda^{-1}T_1) - \lambda^{-1} (I + \lambda^{-1}T_1)^{-1} \frac{dT_1}{dx} \right] w. \quad (14)$$

Матрица этой системы равна

$$\lambda \Lambda_0 + \left\{ [\Lambda_0, T_1] - T_0^{-1} \frac{dT_0}{dx} \right\} + O(\lambda^{-1}),$$

где  $[\Lambda_0, T_1] = \Lambda_0 T_1 - T_1 \Lambda_0$  (коммутатор матриц  $\Lambda_0, T_1$ ). Выберем матрицу  $T_1$  так, чтобы матрица в фигурных скобках была диагональной:

$$[\Lambda_0, T_1] - T_0^{-1} \frac{dT_0}{dx} = \Lambda_1.$$

Этот выбор неоднозначен, так как диагональные элементы матрицы  $[\Lambda_0, T_1]$  равны нулю. Для определенности положим

$$(T_1)_{jj} = 0, \quad (T_1)_{jk} = (p_j - p_k)^{-1} \left( T_0^{-1} \frac{dT_0}{dx} \right)_{jk}; \quad (15)$$

тогда для  $w$  получим систему

$$w' = [\lambda \Lambda_0(x) + \Lambda_1(x) + O(\lambda^{-1})] w.$$

Здесь  $\Lambda_1(x) = \text{diag}(p_1^{(1)}(x), \dots, p_n^{(1)}(x))$ , функции  $p_j^{(1)}(x)$  указаны в (12). Отбрасывая  $O(\lambda^{-1})$ , получаем распадающуюся систему, решения которой равны

$$w_k(x, \lambda) = c_k \tilde{y}_k(x, \lambda; x_0), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Полагая  $c_k = 0$  при  $k \neq j$ ,  $c_j = 1$  и учитывая, что  $y = T_0(x) [I + O(\lambda^{-1})] w$ , получаем ФАР  $y_j(x, \lambda)$  уравнения (1).

Можно сделать преобразование вида

$$\dot{y} = T_0(x) [I + \lambda^{-1} T_1(x) + \dots + \lambda^{-N+1} T_{N-1}(x)] z$$

и выбрать матрицы  $T_2(x), \dots, T_{N-1}(x)$  так, чтобы матрица полученной системы была диагональной с точностью до  $O(\lambda^{-N})$ .

Этот метод построения асимптотики решений выглядит более сложным, чем приведенный в п. 1.1. Однако он имеет ряд преимуществ. Прежде всего, этот метод пригоден и для систем первого порядка. Далее, им удобно пользоваться при доказательстве асимптотических формул (см. § 4). Наконец, даже простейшее преобразование  $y = T_0(x) z$  полезно при численных расчетах.

1.4. Дополнительные параметры и комплексные  $\lambda$ . Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^n \lambda^k q_k(x, \mu) y^{(n-k)} = 0, \quad (16)$$

где  $\mu$  — параметр,  $\mu \in D$ . Пусть  $p_1(x, \mu), \dots, p_n(x, \mu)$  — корни характеристического уравнения

$$l(x, p, \mu) \equiv p^n + \sum_{k=1}^n q_k(x, \mu) p^{n-k} = 0. \quad (17)$$

Введем условия, аналогичные 1), 2) п. 1.1:

1)  $|p_j(x, \mu) - p_k(x, \mu)| \geq \delta > 0$  при  $x \in I$ ,  $\mu \in D$  и всех  $j, k, j \neq k$ , где  $\delta$  не зависит от  $x, \mu$ .

2) Разности  $\text{Re}(p_j(x, \mu) - p_k(x, \mu))$  не меняют знак при  $j$  фиксированном,  $(x, \mu) \in I \times D$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Параметр  $\mu$  может быть вещественным или комплексным.

А.  $\mu$  — вещественный параметр,  $D$  — интервал вещественной оси.

В этом случае предполагается, что  $q_k(x, \mu) \in C^\infty(I \times D)$  при всех  $k$ .

Б.  $\mu$  — комплексный параметр,  $D$  — область на комплексной плоскости.

В этом случае предполагается, что  $q_k(x, \mu) \in C^\infty(I \times D)$  и функция  $q_k(x, \mu)$  голоморфна по  $\mu$  в области  $D$  при каждом фиксированном  $x \in I$  и при всех  $k$ .

Тогда уравнение (16) имеет решение  $y_j(x, \lambda, \mu)$  вида (5) (в этой формуле следует, конечно, заменить  $p_j(x)$  на  $p_j(x, \mu)$  и  $l(x, p)$  на  $l(x, p, \mu)$ ). Оценка остаточного члена равномерна по  $(x, \mu) \in I \times D$ , и формулу (5) можно дифференцировать по  $x, \lambda, \mu$  любое число раз, с сохранением равномерной по  $x, \mu$  оценки остаточного члена. Коэффициенты  $a_{jk}(x, \mu)$  разложения (5) удовлетворяют тем же условиям, что и коэффициенты уравнения (16) (см. А, Б).

В случае Б решение  $y_j(x, \lambda, \mu)$  голоморфно по  $\mu$  в области  $D$  при любых фиксированных  $x \in I, \lambda \geq \lambda_0 \geq 1$ . Все эти утверждения переносятся на тот случай, когда коэффициенты уравнения зависят от нескольких параметров:  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ .

Вернемся к уравнению (1). Пусть  $D$  — неограниченная область комплексной плоскости  $\lambda$  и  $|\lambda| \geq \lambda_0 > 0$  в  $D$ . Как правило, в качестве  $D$  берется сектор вида  $|\lambda| > \lambda_0, \alpha < \arg \lambda < \beta$ . Пусть условия 1), 2) выполнены для функций  $\lambda p_1(x), \dots, \lambda p_n(x)$  при всех  $\lambda \in D$ . Тогда условие 1) не меняется, а условие 2) принимает другой вид.

Разности  $\operatorname{Re} [\lambda (p_j(x) - p_k(x))]$  не меняют знак при  $j$  фиксированном,  $k = 1, \dots, n, (x, \lambda) \in I \times D$ .

Уравнение (1) имеет решение  $y_j(x, \lambda)$ , для которого асимптотическая формула (5) справедлива при  $|\lambda| \rightarrow \infty, \lambda \in D$ , равномерно по  $x \in I$ . Это решение является голоморфной функцией  $\lambda$  в области  $D$  при каждом фиксированном  $x \in I$ .

Примеры. 1. Пусть  $q(x) > 0, x \in I$ . Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty$  уравнение

$$y^{(n)} - \lambda^n q(x) y = 0$$

имеет решение  $y_1$  такое, что

$$y_1(x, \lambda) \sim [q(x)]^{-1/2+1/2n} \exp \left\{ \lambda \int_x^x q^{1/n}(t) dt \right\}$$

(см. пример 1 п. 1.2). Здесь  $q^{1/n}(x) > 0$ . Выясним, в каком секторе вида  $0 \leq \arg \lambda < \alpha, |\lambda| \geq \lambda_0 \geq 1$ , эта асимптотика остается справедливой. Условие применимости асимптотики таково: разности  $\operatorname{Re} (e^{i\varphi} (1 - \omega_k))$  не меняют знак. Здесь  $\varphi = \arg \lambda, \omega_k = \exp \{2\pi k i/n\}$ . Соединим точку  $\omega_0 = 1$  отрезками со всеми точками  $\omega_k$ . При повороте вокруг точки  $\omega_0$  на угол  $\varphi < 2\pi/n$  все разности сохраняют знак. При повороте на угол, чуть больший, чем  $2\pi/n$ , меняет знак разность  $\operatorname{Re} [e^{i\varphi} (1 - \omega_{n-1})]$ . Поэтому асимптотическая формула справедлива при  $|\lambda| \rightarrow \infty, 0 \leq \arg \lambda \leq$

$\leq 2\pi/n$ . Можно показать, что в большем секторе эта формула перестает быть справедливой.

2. Пусть все корни характеристического уравнения (2) — чисто мнимые:  $p_j(x) = i\bar{p}_j(x)$  и различны при  $x \in I$ . Тогда условие 2) выполняется при любом  $j$  и уравнение (1) имеет ФСР вида (5), которые быстро осциллируют при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

Если  $0 \leq \arg \lambda \leq \pi$ , то все разности  $\operatorname{Re} [\lambda (p_j(x) - p_k(x))]$ ,  $1 \leq j, k \leq n$ , не меняют знак и уравнение (1) имеет ФСР  $\{y_1^+(x, \lambda), \dots, y_n^+(x, \lambda)\}$ , для которой асимптотика (5) справедлива при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ . Аналогично, уравнение (1) имеет ФСР  $\{y_1^-(x, \lambda), \dots, y_n^-(x, \lambda)\}$  с такой же асимптотикой, но при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ . Эти две ФСР, вообще говоря, различны.

Во многих задачах встречаются уравнения вида

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^n \lambda^k q_k(x, \lambda^{-1}) y^{(n-k)} = 0, \quad (18)$$

где коэффициенты  $q_k(x, \lambda^{-1})$  — полиномы от  $\lambda^{-1}$  или разлагаются в асимптотические ряды по степеням  $\lambda^{-1}$ . Это уравнение вида (15), где  $\mu = \lambda^{-1}$ , и к нему можно применить приведенные выше результаты. Характеристическое уравнение имеет вид

$$p^n + \sum_{k=1}^n q_k(x, \lambda^{-1}) p^{n-k} = 0. \quad (19)$$

Уравнение (18) можно исследовать так. Коэффициенты уравнения разлагаются в АР:

$$q_k(x, \lambda^{-1}) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{-m} q_{km}(x).$$

ФАР ищется в виде (3) и далее повторяется процедура, описанная в п. 1.1. При этом функция  $S'(x)$  должна быть корнем характеристического уравнения

$$p^n + \sum_{k=1}^n q_k(x, 0) p^{n-k} = 0,$$

несколько отличного от (19). Этот метод приводит к АР вида (5); первый же метод приводит к АР вида

$$y_j(x, \lambda) = \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t, \lambda^{-1}) dt \right\} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} a_{jk}(x, \lambda^{-1}) \lambda^{-k} + O(\lambda^{-N}) \right].$$

Все входящие в эту формулу функции разлагаются в АР по степеням  $\lambda^{-1}$ ; если их разложить и собрать вместе все члены, содержащие одинаковые степени  $\lambda^{-1}$ , то получится АР вида (5).

## 2. Уравнения самосопряженного вида.

2.1. Уравнения четного порядка. Рассмотрим уравнение

$$ly \equiv (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left( q_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} \right) + \\ + (-1)^{n-1} \lambda^2 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left( q_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) + \dots + \lambda^{2n} q_n(x) y = 0 \quad (20)$$

на отрезке  $I = [a, b]$ . Здесь  $\lambda > 0$  — большой параметр, коэффициенты  $q_k(x)$  комплекснозначны и все  $q_k(x) \in C^\infty(I)$ . Предполагается также, что  $q_0(x) \neq 0$  при  $x \in I$ . Если все коэффициенты  $q_k(x)$  вещественны и  $y(x), z(x) \in C_0^\infty(I)$ , то справедливо тождество Лагранжа

$$\int_a^b ly \bar{z} dx = \int_a^b yl \bar{z} dx.$$

Это означает, что дифференциальный оператор  $L$  с областью определения  $D(L) = C_0^\infty(Z)$ , действующий по формуле  $Ly = ly$ , является симметричным.

Уравнение (20) — частный случай уравнения (16). Но ввиду его специального вида удобнее исследовать его непосредственно.

Назовем уравнение

$$l(x, p) \equiv q_0(x) p^{2n} - q_1(x) p^{2n-2} + \dots + (-1)^n q_n(x) = 0 \quad (21)$$

*характеристическим*. Пусть  $p_1(x), \dots, p_{2n}(x)$  — корни характеристического уравнения. Введем обозначение

$$\tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) = [l_p(x, p_j(x))]^{-1/2} \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t) dt \right\}. \quad (22)$$

Пусть выполнены условия 1), 2) п. 1.1. Тогда уравнение (20) имеет решение вида

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) \left[ 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-k} a_{jk}(x) + O(\lambda^{-N}) \right], \quad (23)$$

где  $N \geq 1$  — любое. Заметим, что эта формула проще формулы (5).

Все, что сказано в п. 1 относительно решений уравнения (1), справедливо для решений уравнения (20): возможность дифференцирования асимптотики, асимптотика при комплексных  $\lambda$ , асимптотика решений в случае, когда коэффициенты уравнения зависят от параметра, и т. д. Различие состоит лишь в том, что уравнение (20) удобнее по-другому сводить к системе первого порядка.

Положим

$$\begin{aligned} y_1 &= y, \quad y'_1 = \lambda y_2, \quad \dots, \quad y'_{n-1} = \lambda y_n, \\ y'_n &= \lambda q_0^{-1}(x) y_{n+1}, \quad y'_{n+1} = \lambda (q_1(x) y_n - y_{n+2}), \\ y'_{n+2} &= \lambda (q_2(x) y_{n-1} - y_{n+3}), \quad \dots, \quad y'_{2n} = \lambda q_n(x) y_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Функции  $y_k(x)$  при  $\lambda = 1$  называются *квазипроизводными* и обозначаются  $y^{[k]}(x)$ , так что  $y_k = \lambda^k y^{[k]}$ .

Подстановка (24) сводит уравнение (20) к системе первого порядка

$$y' = \lambda A(x) y, \quad (25)$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & q_0^{-1} & \\ & & & q_1 & 0 & -1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & -1 \\ q_n & & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{2n} \end{bmatrix}.$$

В матрице  $A(x)$  элемент  $q_0^{-1}(x)$  расположен на пересечении  $n$ -й строки и  $(n+1)$ -го столбца; все неуказанные элементы равны нулю. Заметим, что матрица  $A(x)$  не содержит производных от функций  $q_0(x), \dots, q_n(x)$ ; при обычном способе сведения уравнения к системе (см. п. 1.3) матрица системы содержала бы такие производные.

Диагонализуем систему (25), с точностью до  $O(\lambda^{-1})$ , тем же методом, что и в п. 1.3. Собственные значения матрицы  $T_0(x)$  равны  $p_1(x), \dots, p_{2n}(x)$ . Матрица  $T_0(x)$  с элементами

$$(T_0)_{jk} = p_k^{j-1}, \quad (T_0)_{n+j, k} = p_k^{n-j+1} \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^m q_{j-m-1} p_k^{2m},$$

где  $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq 2n$ , приводит матрицу  $A(x)$  к диагональному виду. Элементы обратной матрицы равны

$$(T_0^{-1})_{j, n-k} = (-1)^k p_j^{n-k} (l_p(x, p_j))^{-1} \sum_{m=0}^k (-1)^m q_{k-m} p_j^{2m}, \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

$$(T_0^{-1})_{j, n+k} = (-1)^{k+1} p_j^{n-k} (l_p(x, p_j))^{-1}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq j \leq 2n.$$

Далее,

$$\left( T_0^{-1} \frac{dT_0}{dx} \right)_{jj} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln l_p(x, p_j), \quad (26)$$

$$\left( T_0^{-1} \frac{dT_0}{dx} \right)_{jk} = (p_j - p_k)^{-1} l_p^{-1}(x, p_j) \sum_{m=0}^n (-1)^m q'_m (p_j p_k)^{n-m}, \quad j \neq k.$$



Построим матрицу  $T_1(x)$  по формуле (15); тогда преобразование (13) приведет систему (24) к виду

$$w' = [\lambda \Lambda_0 + \Lambda_1 + O(\lambda^{-1})] w.$$

Здесь

$$\Lambda_0(x) = \text{diag}(p_1(x), \dots, p_{2n}(x)),$$

$$\Lambda_1(x) = -\text{diag}\left(T_0^{-1}(x) \frac{dT_0(x)}{dx}\right).$$

Если отбросить  $O(\lambda^{-1})$ , то полученную систему можно проинтегрировать и мы получим

$$w_j = c_j \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0).$$

Тем самым построено ФАР вида (23).

Примеры 1. Рассмотрим двучленное уравнение

$$(-1)^n (p(x) y^{(n)})^{(n)} + \lambda^{2n} q(x) y = 0.$$

Пусть  $p(x) \neq 0$ ,  $q(x) \neq 0$ ,  $x \in I$ . Тогда уравнение (20) не имеет точек поворота. Имеем

$$l(x, p) = p(x) p^{2n} + (-1)^n q(x), \quad l_p(x, p) = 2np(x) p^{2n-1},$$

$$p_j(x) = \sqrt[n]{(-1)^{n+1} \frac{q(x)}{p(x)}},$$

где для корня берутся все возможные значения. При условии 2) из п. 1.4 существует ФСР вида

$$y_j(x, \lambda) \sim p^{-1/2}(x) \left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)^{n-1/2} \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^x \sqrt[n]{(-1)^{n+1} \frac{q(t)}{p(t)}} dt\right\}.$$

Если  $p(x)$ ,  $q(x)$  вещественны, то условие 2) выполняется.

2. Рассмотрим уравнение четвертого порядка самосопряженного вида

$$(q_0(x) y''')'' - \lambda^2 (q_1(x) y')' + \lambda^4 q_2(x) y = 0,$$

где  $q_0(x) \neq 0$ . Имеем

$$l(x, p) = q_0(x) p^4 - q_1(x) p^2 + q_2(x),$$

$$l_p(x, p) = 4q_0(x) p^3 - 2q_1(x) p.$$

Исключая  $p$  из системы  $l = 0$ ,  $l_p = 0$ , получаем, что точки поворота являются корнями одного из уравнений

$$q_2(x) = 0, \quad q_1^2(x) - 4q_0(x) q_2(x) = 0.$$

Корни характеристического уравнения равны

$$p_j(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2q_0(x)} (q_1(x) \pm \sqrt{D(x)})},$$

$$D(x) = q_1^2(x) - 4q_0(x) q_2(x).$$

Если  $q_2(x) \neq 0$ ,  $D(x) \neq 0$ ,  $x \in I$ , и выполнено условие 2), то существует ФСР вида

$$y_j(x, \lambda) \sim p_j^{-1/2}(x) D^{-1/4}(x) \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t) dt \right\}.$$

2.2. Уравнения нечетного порядка. Рассмотрим уравнение

$$ly \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^n \lambda^{2(n-k)} \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^{k+1} (q_{k+1}(x) y^{(k)}) + \left( \frac{d}{dx} \right)^k (q_{k+1}(x) y^{(k+1)}) \right] = 0 \quad (27)$$

на отрезке  $I$  при тех же условиях на коэффициенты, что и в п. 2.1. Предполагается также, что  $q_{n+1}(x) \neq 0$ ,  $x \in I$ . Если все коэффициенты уравнения (27) вещественны, то оператор  $L$  с областью определения  $D(L) = C_0^\infty(I)$ , действующий по формуле  $Ly = ly$ , симметричен. Уравнение

$$l(x, p) \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k+1} [2q_{k+1}(x) p^{2k+1} + q'_{k+1}(x) p^{2k}] = 0 \quad (28)$$

называется *характеристическим*. Введем обозначения

$$p_j^{(1)}(x) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln l_p(p_j(x), x) + l_p^{-1}(p_j(x), x) \sum_{l=0}^n (-1)^n q'_{l+1}(x) p_j^{2l}(x), \quad (29)$$

$$\tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) = \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t) dt + \int_{x_0}^x p_j^{(1)}(t) dt \right\},$$

где  $p_1(x), \dots, p_{2n+1}(x)$  — корни уравнения (28).

Пусть выполнены условия 1), 2) из п. 1.1. Тогда уравнение (27) имеет решение

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) \left[ 1 + \sum_{k=1}^N \lambda^{-k} a_{jk}(x) + O(\lambda^{-N-1}) \right], \quad (30)$$

где  $N \geq 1$  — любое,  $a_{jk}(x) \in C^\infty(I)$ , оценка остаточного члена равномерна по  $x \in I$ . Все, что сказано в п. 1 относительно решений уравнения (1), справедливо для решений уравнения (27).

**Пример.** Пусть  $n = 1$ ,  $q_2(x) \equiv 1$ ; тогда уравнение (27) и характеристическое уравнение имеют вид

$$2y''' - \lambda^2 (2q_1(x) y' + q'_1(x) y) = 0, \\ l(x, p) \equiv 2p^2 - 2q_1(x) p - q'_1(x) = 0.$$

Главный член асимптотики решения  $y_j$  равен

$$y_j(x, \lambda) = \sqrt{\frac{p_j(x)}{4q_1(x)p_j(x) + 3q_1'(x)}} \times \\ \times \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t) dt - \int_{x_0}^x \frac{p_j(t)q_1'(t)}{4q_1(t)p_j(t) + 3q_1'(t)} dt \right\} [1 + O(\lambda^{-1})].$$

## § 2. Системы уравнений на конечном интервале

1. Система уравнений первого порядка. Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$A(x)y' = \lambda B(x)y \quad (1)$$

на отрезке  $I = [a, b]$ . Здесь  $\lambda > 0$  — большой параметр,  $A(x)$ ,  $B(x)$  — матрицы порядка  $n \times n$ , элементы которых — комплекснозначные функции класса  $C^\infty(I)$ . Предполагается, что матрица  $A(x)$  невырождена, т. е.

$$\det A(x) \neq 0, \quad x \in I.$$

Системе (1) отвечает характеристическое уравнение

$$\det \| B(x) - pA(x) \| = 0. \quad (2)$$

Точка  $x_0$  называется *точкой поворота* системы (1), если уравнение (2) при  $x = x_0$  имеет кратный корень. В этом параграфе предполагается, что система (1) не имеет точек поворота при  $x \in I$ , т. е. корни  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  характеристического уравнения различны при всех  $x \in I$ .

1.1. Некоторые сведения из линейной алгебры. Пусть  $A, B$  — постоянные матрицы порядка  $n \times n$  с комплексными элементами,  $p$  — комплексное число, матрица  $A$  невырождена, т. е.  $\det A \neq 0$ . Рассмотрим семейство матриц  $B - pA$ , зависящее от параметра  $p$ , — *линейный пучок матриц*. Если

$$(B - p_0A)e = 0,$$

где  $e$  — ненулевой вектор, то число  $p_0$  называется *собственным значением*, вектор  $e$  — *собственным вектором* пучка. В частности, если  $A = I$ , то  $p_0$  — собственное значение,  $e$  — собственный вектор матрицы  $B$ .

Собственные значения пучка являются корнями характеристического уравнения

$$\det (B - pA) = 0.$$

Будем предполагать, что собственные значения пучка  $p_1, \dots, p_n$  различны. Тогда собственные векторы  $e_1, \dots, e_n$  линейно независимы. Напомним, что  $e_k$  — вектор-столбец.

Вектор-строка  $e^* \neq 0$  называется *левым собственным вектором* пучка, если

$$e^* (B - p_0 A) = 0$$

при некотором  $p_0$ . Очевидно, что  $e^{*T}$  — собственный вектор сопряженного пучка  $B^T - pA^T$ . Собственные значения исходного и сопряженного пучков совпадают, и потому левые собственные векторы  $e_1^*, \dots, e_n^*$  линейно независимы. Векторы  $e_1, \dots, e_n$  будем называть *правыми собственными векторами* пучка  $B - pA$ .

Справедливы тождества

$$e_j^* A e_k = 0, \quad j \neq k.$$

Действительно, умножая слева тождество  $(B - p_k A) e_k = 0$  на  $e_j^*$ , получаем  $(p_j - p_k) e_j^* A e_k = 0$ . Кроме того,

$$e_j^* A e_j \neq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

так как в противном случае векторы  $e_1, \dots, e_n$  были бы линейно зависимы.

Рассмотрим систему уравнений

$$(B - p_j A) f = g,$$

где  $f$  — неизвестный вектор. Ее определитель равен нулю, и потому она разрешима не при любой правой части  $g$ . Необходимое и достаточное условие разрешимости имеет вид

$$e_j^* g = 0. \quad (4)$$

Чтобы доказать необходимость этого условия, достаточно умножить обе части системы слева на вектор  $e_j^*$ . Достаточность следует, например, из третьей теоремы Фредгольма.

Рассмотрим пучок  $B(x) - pA(x)$ , собственные значения которого  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  различны при  $x \in I$ . Тогда

1) функции  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  бесконечно дифференцируемы при  $x \in I$ ;

2) правые и левые собственные векторы  $e_1(x), \dots, e_n(x)$ ,  $e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)$  можно выбрать так, чтобы они были бесконечно дифференцируемыми при  $x \in I$ .

В дальнейшем используются именно такие собственные векторы.

Рассмотрим полиномиальный матричный пучок  $L(p) = p^m A_0 + p^{m-1} A_1 + \dots + A_m$ , где  $A_j$  — постоянные  $(n \times n)$ -матрицы,  $\det A_0 \neq 0$ . Правые и левые собственные векторы соответственно определяются условиями

$$L(p) e = 0, \quad e^* L(p) = 0.$$

Собственные значения пучка являются корнями характеристического уравнения

$$\det (p^m A_0 + p^{m-1} A_1 + \dots + A_m) = 0,$$

собственные значения пучка  $L(p)$  и сопряженного пучка  $L^T(p)$  совпадают. Пусть собственные значения  $p_1, \dots, p_{nm}$  пучка  $L(p)$  различны. Тогда правые собственные векторы  $\{e_1, \dots, e_{nm}\}$  линейно независимы; это верно и для левых собственных векторов. Необходимое и достаточное условие разрешимости системы  $L(p_j)f = g$  совпадает с (4). Кроме того, в этом случае

$$e_j^* \frac{\partial L}{\partial p} (p_j) e_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, nm. \quad (5)$$

Рассмотрим пучок  $L(x, p) = p^m A_0(x) + \dots + A_m(x)$ , где  $A_j(x) \in C^\infty(I)$ ,  $\det A_0(x) \neq 0$ . Если собственные значения пучка различны при  $x \in I$ , то справедливы приведенные выше для линейного пучка утверждения 1), 2).

1.2. Ф о р м а л ь н ы е а с и м п т о т и ч е с к и е р е ш е н и я. Будем искать ФАР системы (1) в виде

$$y = \exp \{ \lambda S(x) \} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} f_k(x). \quad (6)$$

Подставив этот ряд в (1), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} [\lambda (A(x) S'(x) - B(x)) f_k(x) + A(x) f_k'(x)] = 0.$$

Приравняв нулю коэффициенты при степенях  $\lambda^{-1}$ , получим рекуррентную систему уравнений

$$\begin{aligned} [B(x) - S'(x) A(x)] f_0(x) &= 0, \\ [B(x) - S'(x) A(x)] f_{k+1}(x) &= -A(x) f_k'(x), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Из первого уравнения следует, что  $S'(x)$  — собственное значение,  $f_0(x)$  — собственный (правый) вектор пучка  $B(x) - pA(x)$ . Напомним, что собственные значения  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  по предположению различны при  $x \in I$ . Положим  $S'(x) = p_j(x)$ . Тогда  $f_0(x) = \alpha(x) e_j(x)$ , где  $e_j(x)$  — собственный вектор пучка,  $\alpha(x)$  — неизвестная функция,  $\alpha(x) \neq 0$  при  $x \in I$ .

Функцию  $\alpha(x)$  найдем из второго уравнения (7):

$$[B(x) - p_j(x) A(x)] f_0(x) = -A(x) f_0'(x).$$

Так как матрица  $B(x) - p_j(x) A(x)$  вырождена, то эта система разрешима не при любой правой части. Воспользуемся необходимым и достаточным условием разрешимости (4) этой системы:

$$e_j^*(x) A(x) f_0'(x) = 0.$$

Отсюда находим

$$\alpha(x) = \exp \left\{ - \int_{x_0}^x \frac{e_j^*(t) A(t) e_j'(t)}{e_j^*(t) A(t) e_j(t)} dt \right\},$$

где  $e'_j(t) = \frac{d}{dt} e_j(t)$ . Заметим, что знаменатель в нуль не обращается в силу (3).

Тем самым найдены функция  $S(x)$  и вектор-функция  $f_0(x)$ , так что главный член  $\tilde{y}_j$  асимптотики равен

$$\tilde{y}_j(x, \lambda) = \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t) dt - \int_{x_0}^x \frac{e_j^*(t) A(t) e'_j(t)}{e_j^*(t) A(t) e_j(t)} dt \right\} [e_j(x) + O(\lambda^{-1})]. \quad (8)$$

На первый взгляд может показаться, что  $\tilde{y}_j$  зависит от выбора собственных векторов  $e_j(x)$ ,  $e_j^*(x)$ . Покажем, что вектор-функция

$$h(x) = \alpha(x) e_j(x)$$

есть инвариант в следующем смысле: если заменить  $e_j$ ,  $e_j^*$  на  $\tilde{e}_j$ ,  $\tilde{e}_j^*$ , то  $\tilde{h}(x) = \text{const } h(x)$ . Действительно, если  $\tilde{e}_j$ ,  $\tilde{e}_j^*$  — другая пара собственных векторов, то  $\tilde{e}_j(x) = \beta(x) e_j(x)$ ,  $\tilde{e}_j^*(x) = \gamma(x) e_j^*(x)$  (индекс  $j$  для краткости опущен), где  $\beta, \gamma \in C^\infty(I)$  и  $\beta(x) \neq 0$ ,  $\gamma(x) \neq 0$  при  $x \in I$ . Имеем

$$\int_{x_0}^x \frac{\tilde{e}^* A \tilde{e}'}{\tilde{e} A \tilde{e}'} dt = \int_{x_0}^x \frac{e^* A e'}{e^* A e} dt + \ln \beta(x) + c,$$

так что

$$\tilde{h}(x) = \alpha(x) \beta^{-1}(x) e^c \tilde{e}(x) = \text{const } h(x).$$

Но в непосредственной проверке нет необходимости. Действительно, в силу единственности ФАР каждое слагаемое  $\exp \{ \lambda S(x) \} f_k(x)$  ряда (6) есть инвариант в указанном выше смысле. Более того, при замене базисов  $\{e_1, \dots, e_n\}$  и  $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$  другими все они умножаются на одну и ту же константу.

Найдем  $f_1(x)$ . Имеем

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x) e_k(x),$$

где  $\alpha_k(x)$  — неизвестные функции. Подставляя это разложение во второе из уравнений (7), получаем

$$\sum_{k=1}^n (p_k - p_j) \alpha_k A e_k = -A f'_0.$$

Умножая это тождество слева на  $e_l^*$  и учитывая, что  $e_l^* A e_k = 0$  при  $k \neq l$  (см. п. 1.1), получаем

$$\alpha_k(x) = \frac{e_k^*(x) A(x) f'_0(x)}{p_j(x) - p_k(x)}, \quad k \neq j.$$

Функция  $\alpha_1(x)$  остается неопределенной. Как и  $\alpha(x)$ , она находится из условия разрешимости следующего уравнения, т. е. из соотношения  $e_j^* A f'_1 = 0$ .

Продолжив эту процедуру, можно последовательно найти вектор-функции  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$ . Все координаты вектор-функции  $f_k(x)$  в базисе  $\{e_1(x), \dots, e_n(x)\}$ , кроме  $j$ -й, находятся из  $k$ -го уравнения. Координата с номером  $j$  находится из условия разрешимости  $(k+1)$ -го уравнения. Тем самым построено ФАР системы (1), имеющее вид (2).

Можно иначе строить ФАР. Будем искать матрицу

$$T(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x) \lambda^{-k}$$

такую, что преобразование

$$y = T(x, \lambda) z$$

диагонализует систему (1), т. е. приводит ее к виду

$$z' = \lambda \Lambda z, \quad \Lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} \Lambda_k(x), \quad (9)$$

где  $\Lambda_k(x)$  — диагональные матрицы. Система (9) — распадающаяся и потому интегрируется.

Рассмотрим систему более общего вида, чем (1):

$$A(x, \lambda^{-1}) y' = \lambda B(x, \lambda^{-1}) y, \quad (10)$$

где матрицы  $A, B$  разлагаются в АР:

$$A(x, \lambda^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A_k(x), \quad B(x, \lambda^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} B_k(x).$$

Предполагается, что матрица  $A_0(x)$  невырождена, собственные значения  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  пучка  $B_0(x) - pA_0(x)$  различны и на матрицы  $A, B$  налагаются обычные условия гладкости. Рассмотрим вначале случай, когда  $A(x) = I$ , матрица  $B_0(x)$  — диагональная, с диагональными элементами  $p_1(x), \dots, p_n(x)$ . Тогда  $\Lambda_0(x) = B_0(x)$  в формуле (9) и можно положить  $T_0(x) = I$ . После подстановки  $y = Tz$  система (10) примет вид

$$T \frac{dz}{dx} + \frac{dT}{dx} z = \lambda Bz,$$

и так как она должна совпадать с системой (9), то матрица  $T$  должна удовлетворять матричному уравнению

$$\frac{dT}{dx} = \lambda (BT - T\Lambda).$$

Подставив в эту формулу АР для матриц  $T, \Lambda$ , получим рекуррентную систему уравнений

$$B_0 - \Lambda_0 = 0, \quad \sum_{j=0}^k (B_{k-j} T_j - T_j \Lambda_{k-j}) = \frac{dT_{k-1}}{dx}, \quad k \geq 1.$$

При этом неизвестными являются не только матрицы  $T_k$ , но и матрицы  $\Lambda_k$ ,  $k \geq 1$ . Первое уравнение выполняется тождественно, второе имеет вид

$$\Lambda_0 T_1 - T_1 \Lambda_0 = \Lambda_1 - B_1.$$

Так как матрица  $\Lambda_0$  — диагональная, то все диагональные элементы матрицы  $\Lambda_0 T_1 - T_1 \Lambda_0$  равны нулю. Поэтому

$$\Lambda_1 = \text{diag } B_1, \quad (T_1)_{jk} = \frac{(B_1)_{jk}}{p_k - p_j}, \quad j \neq k.$$

Элементы  $(T_1)_{jj}$  остаются неопределенными; положим их равными нулю. Уравнение с номером  $k$  имеет вид

$$\Lambda_0 T_k - T_k \Lambda_0 = \Lambda_k + C_k,$$

где  $C_k$  — известная матрица. Отсюда находим

$$\Lambda_k = -\text{diag } C_k, \quad (T_k)_{jl} = \frac{(C_k)_{jl}}{p_j - p_l}, \quad j \neq l,$$

а элементы  $(T_k)_{jj}$  полагаем равными нулю. Тем самым построена искомая матрица  $T(x, \lambda)$ .

Вернемся к системе (10). Сделаем подстановку  $y = T_0(x) \tilde{z}$ , где матрица  $T_0(x)$  приводит матрицу  $A_0^{-1}(x) B_0(x)$  к диагональному виду, т. е.  $T_0^{-1} A_0^{-1} B_0 T_0 = \Lambda_0 = \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$ . Тогда система (10) примет вид

$$\tilde{z}' = C(x, \lambda) \tilde{z}, \quad C = \lambda T_0^{-1} A^{-1} B T_0 - T^{-1} \frac{dI_0}{dx_i}.$$

В силу выбора матрицы  $T_0(x)$  матрица  $C$  разлагается в AP:

$$C(x, \lambda) = \Lambda_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} C_k(x),$$

и мы пришли к исследованному выше случаю.

1.3. Достаточные условия существования асимптотических решений. Введем условия:

1) Система (1) не имеет точек поворота при  $x \in I$ , т. е.  $p_j(x) \neq p_k(x)$ ,  $j \neq k$ ,  $x \in I$ .

2) Разности  $\text{Re}[p_j(x) - p_k(x)]$  не меняют знак при  $j$  фиксированном,  $k = 1, \dots, n$ ,  $x \in I$ .

Введем обозначение

$$y_{j0}(x, \lambda) = \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t) dt - \int_{x_0}^x \frac{e_j^*(t) A(t) e_j'(t)}{e_j^*(t) A(t) e_j(t)} dt \right\}.$$

Напомним, что  $e_j^*(x)$  — левые,  $e_j(x)$  — правые собственные векторы матричного пучка  $B(x) - pA(x)$ .



Система (1) имеет решение вида

$$y_j(x, \lambda) = y_{j0}(x, \lambda) \left[ e_j(x) + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-k} f_{jk}(x) + O(\lambda^{-N}) \right], \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (11)$$

Здесь  $N \geq 1$  — любое, вектор-функции  $f_{jk}(x)$  принадлежат  $C^\infty(I)$  при всех  $k$ , оценка остаточного члена равномерна по  $x \in I$ . Асимптотическую формулу (11) можно дифференцировать по  $x$  и по  $\lambda$  любое число раз, с сохранением равномерной по  $x$  оценки остаточного члена. В частности, для главного члена асимптотики имеем

$$y_j^{(m)}(x, \lambda) = \lambda^m p_j^m(x) y_{j0}(x, \lambda) [e_j(x) + O(\lambda^{-1})].$$

Если условия 1), 2) выполнены при всех  $j$ , то решения  $y_1(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda)$  линейно независимы и образуют ФСР при  $\lambda \gg 1$ .

**П р и м е р ы.** 1. Пусть  $B(x)$  — вещественная симметричная матрица с различными собственными значениями  $p_1(x), \dots, p_n(x)$ ,  $A(x) \equiv I$ . Так как они вещественны, то условие 2) выполняется. Далее, формулу (7) можно упростить, если собственные векторы  $e_1(x), \dots, e_n(x)$  выбрать вещественными, единичными (и класса  $C^\infty(I)$ ). Действительно, в этом случае  $e_k^*(x) = e_k^T(x)$  при всех  $k$ , что следует из тождеств

$$A^T(x) e_k(x) = A(x) e_k(x) = p_k(x) e_k(x), \\ e_k^I(x) A(x) = p(x) e_k^I(x), \quad e_k^T(x) e_k(x) = \delta_{jk}.$$

Дифференцируя тождество  $e_k^T(x) e_k(x) = 1$ , получаем  $e_k^*(x) e_k'(x) = 0$ , и формула (8) принимает вид

$$y_j(x, \lambda) = \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t) dt \right\} [e_j(x) + O(\lambda^{-1})]. \quad (12)$$

2. Пусть  $A(x) = I$ ,  $B(x)$  — эрмитова матрица с различными собственными значениями; тогда условие 2) выполнено. Покажем существование собственных векторов  $e_1(x), \dots, e_n(x)$ ,  $e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)$  таких, что

$$e_k^*(x) e_k'(x) \equiv 0. \quad (13)$$

Тогда для решений системы (1) справедлива асимптотическая формула (12).

Выберем ортонормированный базис  $g_1(x), \dots, g_n(x)$  из собственных векторов класса  $C^\infty(I)$  так, что

$$\bar{g}_k^T(x) g_j(x) = \delta_{kj}, \quad x \in I.$$

Дифференцируя эти тождества, получаем

$$\operatorname{Re} (\bar{g}_k^T(x), g_k'(x)) \equiv 0.$$

Так как матрица  $A(x)$  эрмитова, то в качестве  $g_k^*(x)$  можно взять вектор  $\overline{g_k^T(x)}$ ; условие (4) будет выполнено. Положим

$$e_k(x) = e^{i\alpha_k(x)} g_k(x), \quad e_k^*(x) = \overline{e_k^T(x)}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (e_k^*(x) e_k(x)) &= \overline{g_k^T(x)} (i\alpha_k'(x) g_k(x) + g_k'(x)) = \\ &= i\alpha_k'(x) + \overline{g_k^T(x)} g_k'(x) = 0, \end{aligned}$$

так что

$$\alpha_k'(x) = -\overline{ig_k^T(x)} g_k'(x).$$

Правая часть этого уравнения вещественна, и функцию  $\alpha_k(x)$  можно выбрать вещественной.

3. Рассмотрим систему

$$y' = i\lambda B(x) y,$$

где  $B(x)$  — матрица из примера 2. Как и в § 1, п. 1.4, пример 2, можно показать, что существуют две ФСР

$$\{y_1^+(x, \lambda), \dots, y_n^+(x, \lambda)\}, \quad \{y_1^-(x, \lambda), \dots, y_n^-(x, \lambda)\}.$$

Для первой из них АР вида (8) справедливы при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im } \lambda \geq 0$ , для второй — при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im } \lambda \leq 0$ .

1.4. Дополнительные параметры и комплексные  $\lambda$ . Рассмотрим систему

$$A(x, \mu) y' = \lambda B(x, \mu) y,$$

где  $\mu$  — параметр. Приведенные выше результаты переносятся на эту систему; соответствующие формулировки и условия на матрицы  $A, B$  носят тот же характер, что и в § 1, п. 1.4.

## 2. Системы второго порядка.

2.1. Двучленные системы. Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$y'' - \lambda^2 A(x) y = 0 \tag{14}$$

на отрезке  $I$ , элементы матрицы  $A(x)$  принадлежат классу  $C^\infty(I)$ . Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(p^2 I - A(x)) = 0.$$

Корни этого уравнения равны  $\pm \sqrt{\mu_1(x)}, \dots, \pm \sqrt{\mu_n(x)}$ , где  $\mu_1(x), \dots, \mu_n(x)$  — собственные значения матрицы  $A(x)$ . Система (14) имеет точки поворота двух типов.

1.  $x_0$  — точка поворота, если  $\mu_j(x_0) = 0$  при некотором  $j$ . В этой точке совпадают корни  $\sqrt{\mu_j(x)}$ ,  $-\sqrt{\mu_j(x)}$ .

2.  $x_0$  — точка поворота, если  $\mu_j(x_0) = \mu_k(x_0)$ ,  $j \neq k$ . В этой точке поворота совпадают корни  $\sqrt{\mu_j(x)}$ ,  $\sqrt{\mu_k(x)}$  и корни  $-\sqrt{\mu_j(x)}$ ,  $-\sqrt{\mu_k(x)}$ .

Положим  $p_j(x) = \sqrt{\mu_j(x)}$ ,  $p_{n+j}(x) = -\sqrt{\mu_j(x)}$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Пусть система (15) не имеет точек поворота при  $x \in I$ . Фиксируем базисы  $\{e_1(x), \dots, e_n(x)\}$ ,  $\{e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)\}$  из правых и левых собственных векторов, которые выбраны так, что

$$e_j^*(x) e_k(x) = \delta_{jk}. \quad (15)$$

Обозначим

$$\tilde{y}_j^\pm(x, \lambda; x_0) =$$

$$= \mu_j^{-1/4}(x) \exp \left\{ \pm \lambda \int_{x_0}^x \sqrt{\mu_j(t)} dt - \int_{x_0}^x e_j^*(t) \frac{de_j(t)}{dt} dt \right\}. \quad (16)$$

Пусть все разности  $\operatorname{Re}(\sqrt{\mu_j(x)} \pm \sqrt{\mu_k(x)})$  не меняют знак при  $x \in I$ . Тогда система (14) имеет  $2n$  решений

$$y_j^\pm(x, \lambda) = \tilde{y}_j^\pm(x, \lambda; x_0) \left[ e_j(x) + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-k} e_{jk}(x) + O(\lambda^{-N}) \right], \quad (17)$$

$$1 \leq j \leq n, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

где  $N \geq 1$  — любое,  $e_{jk}(x) \in C^\infty(I)$ . При  $\lambda \gg 1$  эти решения образуют ФСР. Если  $A(x)$  — вещественная симметричная матрица, то формула (16) упрощается:

$$\tilde{y}_j^\pm(x, \lambda; x_0) = \mu_j^{-1/4}(x) \exp \left\{ \pm \lambda \int_{x_0}^x \sqrt{\mu_j(t)} dt \right\}. \quad (18)$$

АР (17) можно дифференцировать по  $x$  и по  $\lambda$  любое число раз. Аналогичные результаты справедливы в случаях, когда  $\lambda$  комплексно или матрица  $A$  зависит от параметра  $v$ :  $A = A(x, v)$ . Соответствующие результаты формулируются так же, как и в § 1, п. 1.4. Это замечание относится ко всем системам, которые рассматриваются ниже.

2.2. Системы самосопряженного вида. Рассмотрим систему из уравнений

$$(A(x) y')' - \lambda^2 B(x) y = 0, \quad (19)$$

где  $A(x)$ ,  $B(x) \in C^\infty(I)$ ,  $\det A(x) \neq 0$  при  $x \in I$ . Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(p^2 A(x) - B(x)) = 0,$$

а его корни равны

$$p_j(x) = \sqrt{\mu_j(x)}, \quad p_{n+j}(x) = -\sqrt{\mu_j(x)}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

где  $\mu_j(x)$  — собственные значения пучка  $\mu A(x) - B(x)$ . Пусть  $\mu_j(x)$  удовлетворяют условиям, сформулированным в п. 2.1,  $\{e_1(x), \dots, e_n(x)\}, \{e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)\}$  — базисы из правых и левых собственных векторов этого пучка, нормированные условиями

$$e_j^*(x) A(x) e_k(x) = \delta_{jk}. \quad (20)$$

Введем обозначения

$$\tilde{y}_j^\pm(x, \lambda; x_0) = \mu_j^{-1/4}(x) \exp \left\{ \pm \lambda \int_{x_0}^x \sqrt{\mu_j(t)} dt \mp \mp \frac{1}{2} \int_{x_0}^x [e^*(t) A(t) D e(t) - D e^*(t) A(t) e(t)] dt \right\}, \quad (21)$$

где  $D = d/dx$ . Система (19) имеет  $2n$  решений вида (17), где  $\tilde{y}_j^\pm$  имеют вид (20).

2.3. Системы общего вида. Рассмотрим систему

$$A(x) y'' + \lambda B(x) y' + \lambda^2 C(x) y = 0 \quad (22)$$

на отрезке  $I$ , где  $A(x), B(x), C(x) \in C^\infty(I)$ ,  $\det A(x) \neq 0$  при  $x \in I$ . Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(p^2 A(x) + p B(x) + C(x)) = 0.$$

Будем предполагать, что собственные значения  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  пучка  $L(p) = p^2 A(x) + p B(x) + C(x)$  различны при  $x \in I$  и что все разности  $\operatorname{Re}(p_j(x) - p_k(x))$ ,  $1 \leq j, k \leq 2n$ , не меняют знак при  $x \in I$ . Пусть  $\{e_1(x), \dots, e_n(x)\}, \{e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)\}$  — правые и левые собственные векторы этого пучка, нормированные условиями

$$e_j^*(x) [2p_j(x) A(x) + B(x)] e_k(x) = \delta_{jk}. \quad (23)$$

Введем обозначения

$$\tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) = \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t) dt + \int_{x_0}^x p_j^{(1)}(t) dt \right\}, \quad (24)$$

$$p_j^{(1)}(x) = -e_j^*(x) [p_j'(x) A(x) e_j(x) + 2p_j(x) A(x) e_j'(x) + B(x) e_j'(x)].$$

Система (22) имеет  $2n$  решений вида

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) \left[ e_j(x) + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-k} e_{jk}(x) + O(\lambda^{-N}) \right], \quad (25)$$

$$1 \leq j \leq 2n, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

где  $N \geq 1$  — любое,  $e_{jk}(x) \in C^\infty(I)$ . Эти решения образуют ФСР при  $\lambda \geq 1$ .

**3. Системы из  $n$  уравнений  $m$ -го порядка.** Рассмотрим систему

$$y^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{m-k} A_k(x) y^{(k)} = 0 \quad (26)$$

на отрезке  $I$ , где  $y(x)$  есть  $n$ -вектор,  $A_k(x)$  — матрицы порядка  $n \times n$  с комплекснозначными элементами класса  $C^\infty(I)$ . Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det L(x, p) = 0, \quad L(x, p) = p^m + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(x) p^k.$$

Будем предполагать, что собственные значения  $p_1(x), \dots, p_{nm}(x)$  пучка  $L$  различны при всех  $x \in I$  и что все разности  $\operatorname{Re}(p_j(x) - p_k(x))$ ,  $1 \leq j, k \leq mn$ , не меняют знак на отрезке  $I$ . Пусть  $e_j(x), e_j^*(x)$ ,  $1 \leq j \leq mn$ , — правые и левые собственные векторы пучка  $L$ . Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) &= \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t) dt + \int_{x_0}^x p_j^{(1)}(t) dt \right\}, \\ p_j^{(1)}(x) &= - \left[ e_j^* \frac{\partial L}{\partial p} D e_j + \frac{1}{2} D p_j \frac{\partial^2 L}{\partial p^2} e_j \right] \left[ e_j^* \frac{\partial L}{\partial p} e_j \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (27)$$

где значения векторов  $e_j, e_j^*$  берутся в точке  $x$ , значения  $L_p, L_{pp}$  — в точке  $(x, p_j(x))$  и  $D = d/dx$ . Система (26) имеет  $mn$  решений вида (25), где  $p_j^{(1)}(x)$  имеют вид (27),  $N \geq 1$  — любое, и эти решения образуют ФСР при  $\lambda \geq 1$ .

### § 3. Уравнения на бесконечном интервале

**1. Уравнения с почти постоянными коэффициентами.** Рассмотрим уравнение

$$ly \equiv y^{(n)} + q_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + q_0(x) y = 0 \quad (1)$$

на полуоси  $\mathbf{R}^+ = [0, \infty)$  с комплекснозначными непрерывными коэффициентами. Характеристическое уравнение имеет вид

$$l(x, p) \equiv p^n + q_{n-1}(x) + \dots + q_0(x) = 0. \quad (2)$$

Асимптотика решений уравнения (1) при  $x \rightarrow \infty$  существенно зависит от поведения на бесконечности корней  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  характеристического уравнения.

Пусть коэффициенты уравнения (1) имеют вид

$$q_k(x) = q_k^0 + r_k(x), \quad (3)$$

где  $q_k^0$  — постоянные, и выполнены условия:

$$1) \quad \int_0^\infty |r_k(x)| dx < \infty, \quad 1 \leq k \leq n.$$

2) Корни  $\rho_1, \dots, \rho_n$  уравнения

$$\rho^n + q_{n-1}^0 \rho^{n-1} + \dots + q_0^0 = 0 \quad (4)$$

различны.

Тогда уравнение (1) имеет ФСР  $\{y_1, \dots, y_n\}$  такую, что

$$y_j(x) = e^{\rho_j x} [1 + o(1)], \quad x \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Эту асимптотику можно дифференцировать  $n$  раз, т. е.

$$y_j^{(k)}(x) = \rho_j^k e^{\rho_j x} [1 + o(1)], \quad 0 \leq k \leq n.$$

Приведенный результат — следствие теоремы Левинсона об  $L$ -диагональных системах (гл. II, § 5). Следующий результат вытекает из теоремы Перрона (гл. II, § 5). Пусть коэффициенты уравнения (1) имеют вид (3) и выполнены условия

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} r_k(x) = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

4)  $\operatorname{Re} \rho_j \neq \operatorname{Re} \rho_k$  при всех  $j \neq k$ , где  $\rho_j$  — корни уравнения (4).

Тогда уравнение (1) имеет ФСР  $\{y_1, \dots, y_n\}$  такую, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y'_k(x)}{y_k(x)} = \rho_k, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (6)$$

Эту формулу можно записать в виде

$$y_k(x) = \exp\{\rho_k x + o(x)\}, \quad x \rightarrow \infty,$$

так что асимптотика (6) довольно грубая.

Аналогичные результаты справедливы для уравнения  $n$ -го порядка самоспряженного вида

$$\begin{aligned} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left[ q_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} \right] + \\ + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[ q(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right] + \dots + q_n(x) y = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть коэффициенты  $q_k(x)$  имеют вид (3) при  $1 \leq k \leq n$ ,

$$\frac{1}{q_0(x)} = q_0^0 + r_0(x), \quad q_0^0 \neq 0,$$

и пусть выполнены условие 1) при  $k = 0, 1, \dots, n$  и условие 2) для корней уравнения

$$q_0^0 \rho^{2n} - q_2^0 \rho^{2n-2} + \dots + (-1)^n q_n^0 = 0.$$

Тогда уравнение (7) имеет ФСР  $\{y_1, \dots, y_n\}$  вида (5) и аналогичные формулы справедливы для квазипроизводных  $y^{[k]}(x)$ ,  $1 \leq k \leq 2n$ .

2. Уравнение (1) с асимптотически простыми корнями. Пусть при некотором  $j$  существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_j(x)/p_k(x) = c_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq n, \quad (8)$$

конечные или бесконечные. Корень  $p_j(x)$  характеристического уравнения (2) называется *асимптотически простым*, если  $c_{jk} \neq 1$  при всех  $k \neq j$ .

Всюду в дальнейшем предполагается, что  $q_k(x) \in C^2(\mathbb{R}^+)$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ .

2.1. Корни одного порядка. Пусть  $q_0(x) \neq 0$  при  $x \gg 1$ , все корни уравнения (2) асимптотически простые, и пусть  $c_{jk} \neq 0, 1$  при всех  $j, k, j \neq k$ . Тогда существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q_k(x) q_0^{-1+k/n}(x) = a_k, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (9)$$

и асимптотика корней имеет вид

$$p_j(x) = [\rho_j + o(1)] q_0^{1/n}(x), \quad x \rightarrow \infty, \quad (10)$$

где  $\rho_1, \dots, \rho_n$  — корни уравнения

$$\rho^n + a_{n-1}\rho^{n-1} + \dots + a_1\rho + 1 = 0. \quad (11)$$

Справедливо обратное утверждение: если асимптотика всех корней уравнения (2) имеет вид (10), где  $\rho_1, \dots, \rho_n$  — различные ненулевые числа, то пределы (9) существуют и конечны.

Условию (9) удовлетворяет уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)q(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)q^{n-1}(x)y' + q^n(x)y = 0, \quad (12)$$

где  $a_1, \dots, a_{n-1}$  — постоянные,  $q(x) \neq 0$  при  $x \gg 1$ . Если все коэффициенты  $q_0(x), \dots, q_{n-1}(x)$  уравнения (1) — полиномы от  $x$ , то при условии (9) точка  $z = \infty$  является иррегулярной особой для уравнения (1) (гл. I, § 3, п. 1.1). В общем случае условие (9) означает, что все члены  $q_k(x)y^{(k)}$  оператора  $l$  имеют «одинаковую силу» при  $x \gg 1$ , т. е. все они, вообще говоря, влияют на асимптотику решений.

Положим

$$p_j^{(1)}(x) = -\frac{p_j'(x)}{2} \frac{l_{pp}(x, p_j(x))}{l_p(x, p_j(x))}, \quad (13)$$

$$\tilde{y}_j(x) = \exp \left\{ \int_{x_0}^x [p_j(t) + p_j^{(1)}(t)] dt \right\}.$$

Введем условия:

1) При некотором  $j$  и при всех  $k \neq j$  функции  $\operatorname{Re} \varphi_{jk}(x)$ , где

$$\varphi_{jk}(x) = p_j(x) - p_k(x) + p_j^{(1)}(x) - p_k^{(1)}(x), \quad (14)$$

не меняют знак при  $x \gg 1$ .

$$2) \quad \int^{\infty} \alpha(x) dx < \infty,$$

$$\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (|q_k'|^2 |q_0|^{-2+(2k-1)/n} + |q_k''| |q_0|^{-1+(k-1)/n}).$$

Если выполнены условия 1), 2), (9) и уравнение (11) не имеет кратных корней, то уравнение (1) имеет решение  $y_j(x)$  такое, что

$$y_j(x) = \tilde{y}_j(x) [1 + o(1)], \quad x \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Если, кроме того, при всех  $j$  выполнено условие

$$3) \quad q_k'(x) = o(q_0^{1-(k-1)/n}(x)), \quad x \rightarrow \infty,$$

то  $p_l^{(1)}(x) = o(p_l(x))$  при  $x \rightarrow \infty$ , при всех  $l$  и при  $0 \leq m \leq n$  имеем

$$y_j^{(m)}(x) = p_j^{(m)}(x) [1 + o(1)], \quad x \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Если условие 1) выполнено при всех  $j$ , то уравнение (1) имеет ФСР  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  вида (15).

Доказательства основаны на следующем факте. Уравнение (1) эквивалентно системе (10) § 1:

$$z' = A(x)z, \quad z = (y, y', \dots, y^{(n-1)})^T.$$

Пусть  $T_0(x)$ ,  $T_1(x)$  — матрицы, построенные в § 1, п. 1. Тогда преобразование  $z = T_0(x)(I + T_1(x))w$  приводит систему к  $I$ -диагональному виду, после чего остается применить теорему Левинсона (гл. II, § 5). Это замечание относится также к п.п. 2.2, 3.1 настоящего параграфа.

Условие 1) обсуждалось в § 8 гл. I; проанализируем условия 2), 3) на примере уравнения (12). В данном случае  $q_0(x) = q^n(x)$  и условия 2), 3) принимают вид

$$\int^{\infty} \left( \left| \frac{q_0'(x)}{q_0^{2+1/n}(x)} \right| + \left| \frac{q_0''(x)}{q_0^{1+1/n}(x)} \right| \right) dx < \infty.$$

Для уравнения  $y'' + q(x)y = 0$  эти условия в точности совпадают с условиями применимости ВКБ-приближения, которые приведены в § 6 гл. II. Если  $q_0(x) = x^\alpha$ , то условия 2), 3) выполнены при  $\alpha > -n$ . Пусть все коэффициенты  $q_0(x), \dots, q_{n-1}(x)$  уравнения (1) — аналитические функции, которые либо голоморфны, либо имеют полюс в бесконечно удаленной точке  $z = \infty$ . Тогда из условий (9), 2) следует, что  $z = \infty$  — иррегулярная особая точка уравнения (1), и выполняется условие 3).

Условия 2), 3) для уравнения (12) означают, что функция  $q(x)$  достаточно правильно ведет себя на бесконечности и может убывать, но медленнее, чем  $x^{-1}$ . Этим условиям удовлетворяют, например, функции  $q(x) = e^{ax^\alpha}$ ,  $q(x) = x^\beta (\ln x)^\nu$ , где  $a \neq 0$ ,



Ре  $a \geq 0$ ,  $\alpha > 0$  и  $\beta > -1$ ,  $\gamma$  — любое вещественное число или  $\beta = -1$ ,  $\gamma > 1$ . В терминах корней характеристического уравнения (2) условия 2), 3) можно записать в виде

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{|p'_j|^2}{|p_j|^3} + \frac{|p''_j|}{|p_j|^2} \right] dx < \infty, \quad (17)$$

$$p'_j(x) = o(p_j^2(x)), \quad x \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, n.$$

2.2. Один из корней меньшего порядка роста. Пусть

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_n(x)/p_k(x) = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (18)$$

а все остальные пределы (8) конечны, если  $k \neq n$ . Пусть  $q_1(x) \neq 0$  при  $x \gg 1$ . Тогда существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q_k(x) [q_1(x)]^{(k-n)/(n-1)} = a_k, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad (19)$$

где  $a_0 = 0$ . Асимптотика корней уравнения (2) при  $x \rightarrow \infty$  имеет вид

$$p_k(x) = [\rho_k + o(1)] q_1^{1/(n-1)}(x), \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (20)$$

$$p_n(x) = \frac{-g_n(x) + o(g_n(x))}{q_1(x)},$$

где  $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$  — корни уравнения

$$\rho^n + a_{n-1}\rho^{n-1} + \dots + a_2\rho + 1 = 0. \quad (21)$$

Условия 2), 3) заменим следующими:

$$2') \int_0^{\infty} (|q'_k|^2 |q_1|^{-2+(2k+1)/(n-1)} + |q''_k| |q_1|^{-1+k/(n-1)}) dx < \infty \text{ при всех } k.$$

$$3') q'_k(x) = o(q_1^{(n+1-k)/(n-1)}(x)) \text{ при } x \rightarrow \infty \text{ и при всех } k.$$

Если выполнены условия 1) при всех  $j$ , условия (19), 2') и уравнение (21) не имеет кратных корней, то уравнение (1) имеет ФСР  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ , для которых справедлива асимптотическая формула (15). Если, кроме того, выполнено условие 3'), то  $p_k^{(1)}(x) = o(p_k(x))$  при  $x \rightarrow \infty$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , и для решений  $y_1(x), \dots, y_{n-1}(x)$  справедлива формула (16). Заметим, что условие 2') эквивалентно первому из условий (17) для всех корней  $p_k(x)$ , а условие 3') — второму из условий (17) для корней  $p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$ . Формула (16) для решения  $y_n(x)$  справедлива, если выполнены сформулированные выше условия, с той лишь разницей, что условие (3') заменяется следующим:

$$\sum_{k=2}^n |q_k| \left| \frac{q_0}{q_1} \right|^{k-2} \sum_{j=0}^{n-1} |q'_j| \left| \frac{q_0}{q_1} \right|^j = o(q_0), \quad x \rightarrow \infty.$$

В этом случае  $p_n^{(1)}(x) = o(p_n(x))$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Заметим также, что главный член асимптотики уравнения (1) решения при  $x \rightarrow +\infty$  имеет в точности такой же вид, как и главный член асимптотики решения при  $\lambda \rightarrow +\infty$  уравнения (4) § 1, что видно из сравнения формул (15) и (5) § 1.

2.3. Оценки остаточных членов. Пусть выполнены условия (9), 1), 2) из п. 2.2 и уравнение (11) не имеет кратных корней. Формулу (15) запишем в виде

$$y_j(x) = \tilde{y}_j(x) [1 + \varepsilon_j(x)], \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon_j(x) = 0.$$

Приведем оценки для остаточного члена  $\varepsilon_j(x)$ . Разобьем функции  $\varphi_{j1}(x), \dots, \varphi_{jn}(x)$  (см. (14)) на два класса.

1)  $k \in H_1(j)$ , если  $\operatorname{Re} \varphi_{jk}(x) \leq 0$  при  $x \gg 1$ .

2)  $k \in H_2(j)$ , если  $\operatorname{Re} \varphi_{jk}(x) \geq 0$  при  $x \gg 1$ .

Тогда при  $x \gg 1$

$$|\varepsilon_j(x)| \leq c \left[ \int_x^\infty \alpha(t) dt + \sum_{k \in H_2(j)} \int_x^\infty \exp\{\operatorname{Re} \varphi_{jk}(t)\} \alpha(t) dt \right]. \quad (22)$$

Функция  $\alpha(x)$  указана в условии 2). В частности, если  $\operatorname{Re} \varphi_{jk}(x) \leq 0$  при  $x \gg 1$  и при всех  $k$ , то

$$|\varepsilon_j(x)| \leq c \int_x^\infty \alpha(t) dt.$$

Этот случай имеет место, например, когда все коэффициенты уравнения (1) вещественные, а все корни уравнения (2) чисто мнимые. Если известна более точная информация о поведении коэффициентов уравнения (1), то можно уточнить оценку (22), применяя метод Лапласа асимптотической оценки интегралов.

Пример. Рассмотрим уравнение (12), и пусть  $q(x) = x^\beta$ ,  $\beta > -1$ . Тогда

$$\varepsilon_j(x) = O(x^{-\beta-1}), \quad x \rightarrow \infty.$$

Аналогичные оценки справедливы в случае, рассмотренном в п. 2.2.

2.4. Двойные асимптотики. Рассмотрим уравнение

$$ly \equiv y^{(n)} + \lambda q_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + \lambda^n q_0(x) y = 0, \quad (23)$$

где  $\lambda$  — большой параметр. Ограничимся случаем, когда выполнены условия (9), 1), 2) из п. 2.2 (1) — (3), (2), уравнение (11) не имеет кратных корней, и пусть  $\tilde{y}_j(x, \lambda; x_0)$  — функция, определенная формулой (5) § 1. Приведем достаточные условия существования решения уравнения (23):

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) [1 + \lambda^{-1} \varepsilon_j(x, \lambda)] \quad (24)$$

такого, что для остаточного члена при  $x \geq x_0$ ,  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$  справедлива оценка

$$|\varepsilon_j(x, \lambda)| \leq k(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = 0. \quad (25)$$

Асимптотика (24) — двойная: остаточный член мал и при  $\lambda \gg 1$ ,  $x \geq x_0$  фиксированном, и при  $\lambda \geq \lambda_0$  фиксированном,  $x \rightarrow \infty$ .

Уравнение (23) имеет решение  $y_j(x, \lambda)$  вида (24), (25), если при всех  $k \neq j$  выполнены условия:

$$4) \int_1^{\infty} |\operatorname{Re}(p_j(x) - p_k(x))| dx = \infty.$$

$$5) |p_j^{(1)}(x) - p_k^{(1)}(x)| \leq c |p_j(x) - p_k(x)|, \quad x \gg 1.$$

Если эти условия выполнены при всех  $j, k, j \neq k$ , то при  $\lambda \geq \lambda_0 \gg 1$  решения  $y_1, \dots, y_n$  вида (24) образуют ФСР. В этом случае решения  $y_1, \dots, y_n$  различаются по росту при  $x \rightarrow \infty$ , т. е. при  $j \neq k$  пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y_j(x, \lambda) [y_k(x, \lambda)]^{-1}$$

равны либо нулю, либо бесконечности.

Рассмотрим случаи, когда несколько решений могут иметь одинаковый порядок роста на бесконечности. Пусть при некотором  $j$  и при всех  $k \neq j$  либо выполняются условия 4), 5), либо условие:

6)  $\operatorname{Re} p_j(x) \equiv \operatorname{Re} p_k(x)$ ,  $x \gg 1$ , функция  $\operatorname{Re}[p_j^{(1)}(x) - p_k^{(2)}(x)]$  не меняет знак при  $x \gg 1$ .

Тогда все сформулированные выше утверждения остаются в силе. В обоих рассмотренных случаях асимптотику можно  $n$  раз дифференцировать:

$$y_j^{(m)}(x, \lambda) = \lambda^m p_j^m(x) \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) [1 + \lambda^{-1} \varepsilon_{jm}(x, \lambda)],$$

для функций  $\varepsilon_{jm}$  справедлива оценка (25).

Эти утверждения справедливы при комплексных  $\lambda$ , когда  $\lambda \rightarrow \infty$  в некотором секторе вида  $S: \alpha \leq \arg \lambda \leq \beta$ ,  $0 < \beta - \alpha < 2\pi$ , если выполнено условие 5) и условие

$$4') \int_1^{\infty} |\operatorname{Re}[e^{i\varphi}(p_j(x) - p_k(x))]| dx < \infty \quad \text{при всех } k \neq j, \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta, \quad \varphi = \arg \lambda.$$

**П р и м е р.** Пусть существуют  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arg q_0(x) = \varphi_0$  и  $S$ -сектор  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ,  $\lambda \neq 0$ , такие, что

$$\operatorname{Re} \{\exp\{i(\varphi + \varphi_0/n)\}(\rho_j - \rho_k)\} \neq 0, \quad \lambda \in S,$$

при всех  $k \neq j$ . Здесь  $\rho_1, \dots, \rho_n$  — корни уравнения (11). Тогда уравнение (23) имеет решение вида (24) и оценка (25) справедлива при  $\lambda \in S$ ,  $|\lambda| \geq \lambda_0 \gg 1$ ,  $x \geq x_0$ .

2.5. **Корни разного порядка роста.** Пусть корни уравнения (2) асимптотически некрратные и имеют разный порядок роста, т. е. некоторые из пределов  $c_{jk}$  (см. (8)) равны 0 или  $\infty$ . Занумеруем их в порядке роста: числа  $c_{jk}$  конечны при  $j \leq k$ , и по крайней мере два из чисел  $c_{nj}$ ,  $j < n$ , равны нулю. Случай, когда равно нулю только одно из этих чисел, рассмотрен в п. 2.9.

При определенных условиях на коэффициенты уравнения (1) и корни уравнения (2) асимптотические формулы (15) сохраняются, но условия оказываются весьма громоздкими. Ограничимся случаем, когда коэффициенты уравнения (1) принадлежат  $C^\infty(\mathbf{R}^+)$  и разлагаются при  $x \rightarrow \infty$  в асимптотические ряды вида

$$q_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} x^{-\alpha_{kj}}, \quad (26)$$

где  $\alpha_{kj}$  — вещественные,  $a_{kj}$  — комплексные постоянные,  $\alpha_{k0} < \alpha_{k1} < \dots < \alpha_{kj} < \dots$ ,  $\alpha_{kj} \rightarrow +\infty$ . Предполагается также, что АР (26) можно дифференцировать по  $x$  любое число раз. Если  $a_{kj} = 0$  при  $k$  фиксированном и при всех  $j$ , то это означает, что  $q_k^{(m)}(x) = O(x^{-\alpha})$  при  $x \rightarrow \infty$  и при всех  $m = 0, 1, \dots$ . Модельным примером служит уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1} x^{\alpha_{n-1}} y^{(n-1)} + \dots + a_0 x^{\alpha_0} y = 0,$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  — постоянные. В этом случае все корни характеристического уравнения (2) разлагаются в асимптотические ряды вида (26):

$$p_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{kj} x^{\beta_{kj}}, \quad x \rightarrow \infty,$$

которые можно почленно дифференцировать любое число раз.

Пусть все корни уравнения (2) асимптотически простые,  $\beta_{k0} \neq 0$ ,  $\beta_{k0} > -1$  при всех  $k$  и выполнено условие 1) п. 2.4. Тогда уравнение (1) имеет ФСР  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ , для которых справедлива формула (15). Для этих решений справедливы АР вида

$$y_k(x) = x^{\beta_k} \exp \left\{ \sum_{k=0}^N c_{kj} x^{\delta_{kj}} \right\} \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} d_{kj} x^{\varepsilon_{kj}} \right], \quad x \rightarrow \infty.$$

Здесь

$$\delta_{k0} > \delta_{k1} > \dots > \delta_{kN} > -1, \quad \delta_{k0} = \beta_{k0} + 1, \\ c_{k0} = p_{k0}/(\beta_{k0} + 1), \quad 0 > \varepsilon_{k0} > \varepsilon_{k1} > \dots > \varepsilon_{kj} > \dots, \quad \varepsilon_{kj} \rightarrow -\infty.$$

2.6. **Трехчленные уравнения.** Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_k x^{\alpha_k} y^{(k)} + a_0 x^{\alpha_0} y = 0, \quad (27)$$

где  $\alpha_0, \alpha_k$  — вещественные,  $a_0, a_k$  — комплексные постоянные и  $a_0 \neq 0, a_k \neq 0, \alpha_0 > -n$ . Найдем асимптотику корней характеристического уравнения

$$p^n + a_k x^{\alpha_k} p^k + a_0 x^{\alpha_0} = 0,$$

используя диаграмму Ньютона. Отметим на плоскости  $(\rho, \alpha)$  три точки:  $M_1 = (n, 0), M_2 = (k, \alpha_k), M_3 = (0, \alpha_0)$ , и пусть  $I$  — отрезок  $M_1 M_3$ . Возможны два варианта.

1. Точка  $M_2$  лежит не выше отрезка  $I$ , так что  $\alpha_k \leq (n - k)\alpha_0/n$ , и диаграмма Ньютона есть отрезок  $I$ . Асимптотика корней  $p_j(x)$  имеет вид  $p_j(x) \sim p_{j0} x^{\alpha_0/n}$ ,  $x \rightarrow \infty$ , где  $p_{j0}$  — корни уравнения  $q^n + a_k q^k + a_0 = 0$ , если  $\alpha_k = (n - k)\alpha_0/n$ , и корни уравнения  $q^n + a_0 = 0$ , если  $\alpha_k < (n - k)\alpha_0/n$ . Этот случай совпадает с рассмотренным в п. 2.1, и уравнение (27) имеет ФСР, состоящую из решений вида (15). Если вычислить асимптотику корней  $p_j(x)$  с точностью до слагаемого порядка  $O(x^{-1-\delta})$ ,  $\delta > 0$ , то можно получить АР решений в виде

$$y(x) = x^{\alpha} e^{Q(x)} [1 + o(1)],$$

где  $Q(x)$  — конечная сумма степеней.

2. Точка  $M_2$  лежит выше отрезка  $I$ , так что  $\alpha_k > (n - k)\alpha_0/n$ , и диаграмма Ньютона — ломаная, состоящая из отрезков  $M_1 M_2$  и  $M_2 M_3$ . В этом случае имеются две серии корней с различной асимптотикой при  $x \rightarrow \infty$ :

$$p_j(x) \sim (-a_k)^j x^{\alpha_k/(n-k)}, \quad j = 1, \dots, n-k,$$

$$p_j(x) \sim \left(-\frac{a_0}{a_k}\right)^{1/k} x^{(\alpha_0 - \alpha_k)/k}, \quad j = n-k+1, \dots, n.$$

Главный член асимптотики корней первой (второй) серии мы получим, если отбросим в характеристическом уравнении последний (первый) член. Корни первой серии таковы, что  $p_j(x) \gg x^{-1}$  при  $x \rightarrow \infty$ , и велики по сравнению с корнями второй серии:  $p_j(x) \gg p_l(x)$  при  $x \gg 1$ , если  $1 \leq j \leq n-k, n-k+1 \leq l \leq n$ . Уравнение (27) имеет  $n-k$  решений  $y_1(x), \dots, y_{n-k}(x)$ , для которых справедливы АР вида (15). Сложнее обстоит дело с решениями, отвечающими второй серии корней.

2а. Пусть  $\alpha_0 - \alpha_k > -k$ , так что  $p_j(x) \gg x^{-1}$  при  $x \rightarrow \infty$ . Тогда уравнение (27) имеет решения  $y_{n-k+1}(x), \dots, y_n(x)$ , для которых справедливы АР вида (15).

2б. Пусть  $\alpha_0 - \alpha_k \leq -k$ , так что  $p_j(x) = O(x^{-1})$  при  $x \rightarrow \infty$ . Тогда уравнение (27) имеет  $k$  решений  $y_{n-k+1}(x), \dots, y_n(x)$ , для каждого из которых справедлива асимптотическая формула вида

$$y(x) \sim x^{\alpha} (\ln x)^m, \quad x \rightarrow \infty,$$

где  $m \geq 0$  — целое число. Эти решения ведут себя так же, как и решения уравнения (1) в окрестности регулярной особой точки  $x = \infty$  (гл. I, § 2).

Примеры 1. Рассмотрим уравнение

$$y^{(4)} - ax^\alpha y'' + bx^\beta y = 0, \quad (28)$$

где  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $\alpha > -2$ ,  $2\alpha > \beta$ . Характеристические корни распадаются на две группы: при  $x \rightarrow \infty$

$$p_{1,2}(x) \sim \pm \sqrt{a} x^{\alpha/2}, \quad p_{3,4}(x) \sim \pm \sqrt{\frac{b}{a}} x^{(\beta-\alpha)/2}.$$

Уравнение (28) имеет два решения вида

$$y_j(x) \sim x^{-5\alpha/4} \exp \left\{ \int_{x_0}^x p_j(t) dt \right\}, \quad j = 1, 2.$$

Если  $3\alpha > 2(1 + \beta)$ , то эти формулы упрощаются:

$$y_{1,2}(x) \sim x^{-5\alpha/4} \exp \left\{ \pm \frac{2\sqrt{a}}{\alpha+2} x^{\alpha/2+1} \right\}.$$

Если, кроме того,  $\alpha < \beta + 2$ , то уравнение (28) имеет два решения вида

$$y_j(x) \sim x^{(\alpha-\beta)/4} \exp \left\{ \int_{x_0}^x p_j(t) dt \right\}, \quad j = 3, 4.$$

При условии  $3\alpha > 2(1 + \beta)$  эти формулы упрощаются:

$$y_{3,4}(x) \sim x^{(\alpha-\beta)/4} \exp \left\{ \pm \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{2}{\beta - \alpha + 2} x^{(\beta-\alpha+2)/2} \right\}.$$

2. Рассмотрим уравнение (27), где  $n = 2k$ ,  $\alpha_0 < 2\alpha_k$ . Тогда характеристическое уравнение решается точно:

$$p_k = -\frac{a_k}{2} x^{\alpha_k} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 4a_0 a_k^{-2} x^{\alpha_0 - 2\alpha_k}} \right],$$

где значение корня равно единице при  $x = \infty$ . Первой (второй) серии корней отвечает знак  $+$  ( $-$ ) перед квадратным корнем. Первой серии корней отвечает  $k$  решений вида

$$y_j(x) = x^{-\delta_1} \exp \left\{ \int_{x_0}^x p_j(t) dt \right\}, \quad \delta_1 = \frac{(n-1)\alpha_k}{n},$$

второй серии —  $k$  решений вида

$$y_{j+k}(x) = x^{-\delta_2} \exp \left\{ \int_{x_0}^x p_{j+k}(t) dt \right\}, \quad \delta_2 = \frac{(k-1)(\alpha_0 - \alpha_k)}{n}.$$

Асимптотика интегралов  $\int_{x_0}^x p_j(t) dt$  при  $x \rightarrow \infty$  в данном случае легко вычисляется.

### 3. Уравнения самосопряженного вида с асимптотически простыми корнями.

3.1. Уравнения четного порядка. Рассмотрим уравнение

$$ly \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^k [q_{n-k}(x) y^{(k)}]^{(k)} = 0 \quad (29)$$

на полусоси  $\mathbf{R}^+ = [0, \infty)$ , где  $q_k(x)$  — комплекснозначные функции класса  $C^2(\mathbf{R}^+)$ ,  $q_0(x) \neq 0$  при  $x \gg 1$ . Если все функции  $q_k(x)$  вещественны, то оператор  $L$  с областью определения  $D(L) = C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ ,  $Ly = ly$ , симметричен в пространстве  $L_2(\mathbf{R}^+)$ . Введем условия того же типа, что и в п. 2.1:

1) Пределы  $\lim_{x \rightarrow \infty} q_k(x) q_0^{-1}(x) \tau^{-2k}(x) = c_k$  существуют и конечны, где обозначено

$$\tau(x) = [q_n(x)/q_0(x)]^{1/(2n)}. \quad (30)$$

2) Уравнение

$$q(\xi) \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k \xi^{2n-2k} = 0 \quad (31)$$

не имеет кратных корней.

Уравнению (29) отвечает характеристическое уравнение

$$l(x, p) \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^k q_{n-k}(x) p^{2n-2k} = 0. \quad (32)$$

Из условий 1), 2) следует, что для корней уравнения (30) справедливы асимптотические формулы

$$p_j(x) = [\xi_j + o(1)] \tau(x), \quad x \rightarrow \infty, \quad (33)$$

где  $\xi_j$  — корни уравнения (31). В частности, все корни уравнения (32) являются асимптотически простыми. Типичным примером уравнения вида (29), для которого условия 1), 2) выполнены, служит уравнение

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k c_k [q^{2(n-k)} y^{(k)}]^{(k)} = 0, \quad (34)$$

где  $c_k$  — постоянные,  $q(x) \neq 0$  при  $x \gg 1$ ,  $c_0 = 1$ .

Следующие условия таковы (п. 2.1):

3) При некотором  $j$  и при всех  $k$  функция  $\operatorname{Re}[(\xi_j - \xi_k) \tau(x)]$  не меняет знак при  $x \gg 1$ .

4) При всех  $k$  сходятся интегралы

$$\int_{x_0}^{\infty} (|q'_k|^2 |q_0|^{-2} |\tau|^{-1k-1} + |q''_k| |q_0|^{-1} |\tau|^{-2k-1}) dx < \infty.$$

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} q'_k(x) q_0^{-1}(x) \tau^{-2k-1}(x) = 0$  при всех  $k$ .

Введем обозначение

$$\tilde{y}_j(x) = \left[ \frac{\partial l(x, p)}{\partial p} \Big|_{p=p_j(x)} \right]^{-1/2} \exp \left\{ \int_{x_0}^x p_j(t) dt \right\}. \quad (35)$$

Если условия 1) — 5) выполнены, то уравнение (29) имеет решение  $y_j(x)$ , для которого при  $x \rightarrow \infty$  справедливы формулы

$$\begin{aligned} y_j^{(k)}(x) &= p_j^k(x) \tilde{y}_j(x) [1 + o(1)], \quad 0 \leq k \leq n-1, \\ y_j^{[k]}(x) &= (-1)^{n-k} p_j^k(x) q_0(x) \tilde{y}_j(x) \left[ \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m c_m \xi_j^{-2m} + o(1) \right], \quad (36) \\ & \quad n \leq k \leq 2n-1, \end{aligned}$$

где  $y^{[k]}$  — квазипроизводная порядка  $k$  (§ 1). Эти формулы можно упростить при  $q_0(x) \equiv 1$ :

$$y_j(x) \sim [q_n(x)]^{-1/2+1/(4n)} \exp \left\{ \int_{x_0}^x p_j(t) dt \right\}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Для уравнения (34) допустимый класс функций  $q(x)$  тот же, что и для уравнения (12). Если условие (3) выполнено при всех  $j$ , то решения  $y_1(x), \dots, y_{2n}(x)$  образуют ФСР.

П р и м е р ы. 1. Рассмотрим двучленное уравнение

$$(-1)^n [q_0(x) y^{(n)}]^{(n)} + q_n(x) y = 0.$$

При указанных выше условиях оно имеет решение  $y_j(x)$  такое, что при  $x \rightarrow \infty$

$$y_j(x) = \rho^{-(2n-1)/2} q_0^{-1/2} \exp \left\{ i\omega_j \int_{x_0}^x \rho(t) dt \right\} [1 + o(1)],$$

$$\rho(x) = \sqrt[2n]{q_n(x)/q_0(x)}$$

и  $\omega_j$  — корень уравнения  $\omega^{2n} = -1$ .

Такие же асимптотические формулы для решений уравнения (29) справедливы в том случае, когда главными членами являются слагаемые  $(-1)^n [q_0(x) y^{(n)}]^{(n)}$  и  $q_n(x) y$ , а промежуточные слагаемые им подчинены при  $x \gg 1$ ; достаточные условия см. в [18].

2. Рассмотрим уравнение четвертого порядка вида (29); тогда

$$\begin{aligned} l(x, p) &= q_0(x) p^4 - q_1(x) p^2 + q_2(x), \\ p_j(x) &= \pm \sqrt{\frac{q_1(x) \pm \sqrt{D(x)}}{2q_0(x)}}, \quad D = q_1^2 - 4q_0q_2, \end{aligned}$$

и если  $p(x)$  — корень характеристического уравнения, то

$$l_p(x, p(x)) = \pm 2p(x) \sqrt{D(x)}.$$

Уравнение (29) имеет ФСР вида

$$y_j(x) \sim p_j^{-1/2}(x) L^{-1/4}(x) \exp \left\{ \int_{x_0}^x p_j(t) dt \right\}, \quad x \rightarrow \infty.$$



3.2. Двойные асимптотики. Рассмотрим уравнение

$$ly \equiv \sum_{k=0}^n \varepsilon^{2k} (-1)^k [q_{n-k}(x) y^{(k)}]^{(k)} = 0, \quad (37)$$

где  $\varepsilon > 0$  — параметр. Пусть выполнены условия 1), 2), 4), 5) п. 3.1 и еще одно условие:

3') При некотором  $j$  и при всех  $k \neq j$

$$f_{jk}(x) \equiv \operatorname{Re} [(\xi_j - \xi_k) \tau(x)] \neq 0, \quad x \gg 1, \quad \int_1^{\infty} f_{jk}(x) dx = \infty.$$

Введем функции  $y^{[k; \varepsilon]}(x)$ , которые при  $\varepsilon = 1$  совпадают с квази-производными:

$$\begin{aligned} y^{[k; \varepsilon]}(x) &= \varepsilon^{-k} y^{(k)}(x), \quad 0 \leq k \leq n-1, \\ y^{[n; \varepsilon]}(x) &= \varepsilon^{-n} q_0(x) y^{(n)}(x), \\ y^{[n+k; \varepsilon]}(x) &= \varepsilon^{-2k} q_k(x) y^{[n-k; \varepsilon]}(x) - (y^{[n+k-1; \varepsilon]}(x))', \quad 1 \leq k \leq n-1, \end{aligned}$$

и положим

$$\tilde{y}_j(x, \varepsilon) = l_p^{-1/2}(x, p_j(x)) \exp \left\{ \varepsilon^{-1} \int_{x_1}^x p_j(t) dt \right\}.$$

Тогда для всякого  $\varepsilon_0 > 0$  существует  $x(\varepsilon_0) < \infty$  такое, что уравнение (37) имеет решение  $y_j(x, \varepsilon)$ , для которого

$$y_j^{(k)}(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-k} p_j^k(x) \tilde{y}_j(x, \varepsilon) [1 + \varepsilon \psi_{jk}(x, \varepsilon)], \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} y_j^{[k; \varepsilon]}(x, \varepsilon) &= (-1)^{n-k} p_j^k(x) q_0(x) \tilde{y}_j(x, \varepsilon) \times \\ &\times \left[ \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m c_m \xi_j^{-2m} + \varphi_{jk}(x) \right] [1 + \varepsilon \psi_{jk}(x, \varepsilon)], \quad n \leq k \leq 2n-1, \end{aligned}$$

Здесь  $\varphi_{jk}(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  и при  $x \geq x(\varepsilon_0)$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , справедливы оценки

$$|\psi_{jk}(x, \varepsilon)| \leq \varphi(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0.$$

Асимптотические формулы (38) двойные: они пригодны и при  $x \rightarrow \infty$  равномерно по  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , и при  $\varepsilon \rightarrow +0$  равномерно по  $x \gg x(\varepsilon_0)$ . Если условие 3') выполнено при всех  $j$ , то решения  $y_1, \dots, y_{2n}$  образуют ФСР.

Этот результат справедлив при несколько более слабых ограничениях на коэффициенты уравнения (29). Именно, достаточно выполнения условий 4), 5), условия 3') при всех  $j$  и условия:

1') При  $x \gg 1$  для любой пары  $j, k$ ,  $j \neq k$ , имеет место одна из оценок

$$\begin{aligned} 0 < a_1 &\leq |p_j(x)/p_k(x)| \leq a_2 < 1, \\ 0 < a_1 &\leq |p_k(x)/p_j(x)| \leq a_2 < 1. \end{aligned}$$

Условие 1') заменяет условия 1), 2) и означает, что корни  $\xi_j(x)$  уравнения

$$g(x, \xi) \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k(x) \xi^{2n-2k} = 0 \quad (39)$$

обладают тем свойством, что при всех  $j, k, j \neq k$ , и при  $x \gg 1$  выполняются неравенства

$$0 < \delta_1 \leq |\xi_j(x) - \xi_k(x)| \leq \delta_2 < \infty.$$

3.3. Уравнение  $ly = \mu y$  с вещественными коэффициентами. Рассмотрим уравнение

$$ly = \mu y, \quad (40)$$

где  $l$  — оператор из (29), все функции  $q_k(x)$  вещественны. Уравнения вида (39) возникают в различных задачах спектрального анализа,  $\mu$  — спектральный параметр. Будем предполагать, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q_0(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |q_n(x)| = \infty$$

и что выполнены условия 1), 2), 4), 5) п. 2.1. Характеристическое уравнение имеет вид

$$l(x, p) = (-1)^n \mu.$$

Для корней  $p_j(x, \mu)$  этого уравнения при  $\mu$  фиксированном,  $x \rightarrow \infty$  справедлива асимптотическая формула

$$p_j(x, \mu) = q_n^{1/2n}(x) [\xi_j(x) + (-1)^n \mu q_n^{-1}(x) [g_\xi(x, \xi_j(x))]^{-1} + O(q_n^{-2}(x))] [1 + o(1)].$$

Положим  $\xi_j^+ = \xi_j$ , если  $q_n(+\infty) = +\infty$ , и  $\xi_j^+ = e^{i\pi/(2n)} \xi_j$ , если  $q_n(+\infty) = -\infty$ . Тогда точки  $\xi_1^+, \dots, \xi_{2n}^+$  расположены симметрично относительно вещественной оси в комплексной плоскости  $\xi$ . Занумеруем их так, чтобы  $\operatorname{Re} \xi_j^+ \leq \operatorname{Re} \xi_{j+1}^+$ , введем ФСР  $\{y_1, \dots, y_{2n}\}$ , состоящую из решений вида (36), и фиксируем  $\mu$ .

1. Пусть  $\operatorname{Re} \xi_j^+ \neq 0$  при всех  $j$ , и если  $\xi_j^+$  не вещественно, то  $\operatorname{Im} g'(\xi_j^+) \neq 0$ . Тогда  $y_1, \dots, y_n \in L_2(\mathbb{R}^+)$  и никакая нетривиальная линейная комбинация решений  $y_{n+1}, \dots, y_{2n}$  не принадлежит пространству  $L_2(\mathbb{R}^+)$ .

2. Пусть  $\operatorname{Re} \xi_j^+ = 0$  при  $1 \leq j \leq 2k$ ,  $\operatorname{Re} \xi_l^+ \neq 0$  при остальных  $l, g'(\xi_j^+) \neq g'(\xi_l^+)$  при  $j \neq l, 1 \leq j, l \leq 2k$  и  $g'(\xi_j^+) \neq 0$ , если число  $\xi_j^+$  не является ни вещественным, ни чисто мнимым. Если  $\operatorname{Im} \mu \neq 0$ , то максимальное число линейно независимых решений уравнения (40) равно  $n$  или  $n + k$  в зависимости от того, расходится или сходится интеграл

$$\int_1^\infty |q_n(x)|^{-1+1/(2n)} dx.$$

Эти результаты следуют из формулы (26) и асимптотики корней  $p_j(x, \mu)$  и позволяют вычислить индексы дефекта симметрического оператора  $L$ , действующего в  $L_2(\mathbf{R}^+)$  и отвечающего дифференциальной операции  $l$ . В случае, когда характеристическое уравнение (32) имеет асимптотически кратные корни, индексы дефекта оператора  $L$  найдены в [59].

3.4. Уравнения нечетного порядка. Рассмотрим уравнение

$$ly \equiv i \sum_{k=0}^n (-1)^k \varepsilon^{2k+1} \left\{ \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^{k+1} \left( q_{k+1}(x) \left( \frac{d}{dx} \right)^k y \right) \right] + \left( \frac{d}{dx} \right)^k \left( q_{k+1}(x) \left( \frac{d}{dx} \right)^{k+1} y \right) \right\} = 0 \quad (41)$$

с комплекснозначными коэффициентами класса  $C^3(\mathbf{R}^+)$ , где  $\varepsilon > 0$  — параметр,  $q_1(x) \neq 0$ ,  $q_{n+1}(x) \neq 0$  при  $x \geq 0$ . Характеристическое уравнение имеет вид

$$l(x, p) \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} [2q_{k+1}(x) p^{2k+1} + q'_{k+1}(x) p^{2k}] = 0. \quad (42)$$

Положим  $\tau(x) = [q_1(x)/q_{n+1}(x)]^{1/(2n)}$  и введем условия того же типа, что и в п. 2.1. Модельным примером служит уравнение (41), в котором

$$q_{n+1}(x) \equiv 1, \quad q_{k+1}(x) = [q(x)]^{2(n-k)}, \quad k < n, \quad (43')$$

где функция  $q(x)$  принадлежит любому из классов, описанных в п. 2.1. Следующие два условия означают, что корни  $p_j(x)$  уравнения (42) асимптотически простые:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} q_{n-k+1} q_{n+1}^{-1} \tau^{-2k} = c_{2k+1}, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} q'_{n-k+1} q_{n+1}^{-1} \tau^{-2k-1} = 0.$$

2) Уравнение

$$g(\xi) \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^k c_{2k+1} \xi^{2n-2k+1} = 0$$

не имеет кратных корней.

Заметим, что  $c_1 = 1$ . При  $x \rightarrow \infty$  корни  $p_j(x)$  имеют следующую асимптотику:

$$p_j(x) = [\xi_j + o(1)] \tau(x), \quad 1 \leq j \leq 2n, \\ p_0(x) = \frac{q'_1(x) + o(q'_1(x))}{q_1(x)},$$

где  $\xi_j$  — ненулевые корни уравнения  $g(\xi) = 0$ . Корень  $p_0(x)$  — наименьший по росту, а именно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_0(x)/p_j(x) = 0, \quad j \neq 0,$$

что следует из условия 1). Следующие два условия, как и в п. 2.1, гарантируют некоторую правильность поведения коэффициентов уравнения (41) на бесконечности:

$$3) \int_0^{\infty} F(x) dx < \infty, \quad \text{где}$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (|q'_{n-k+1} q_{n+1}^{-1}|^2 |\tau|^{-4k-1} + |q''_{n-k+1} q_{n+1}^{-1}|^2 |\tau|^{-4k-3} + \\ + |q'''_{n-k+1} q_{n+1}^{-1}| |\tau|^{-2k-1} + |q'''_{n-k+1} q_{n+1}^{-1}| |\tau|^{-2k-2}).$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} q''_{n-k+1} q_{n+1}^{-1} \tau^{2k-2} = 0.$$

Эти условия выполняются, например, в случае, когда коэффициенты уравнения (41) имеют вид (43) и  $q(x) = ax^\alpha$ ,  $\alpha > -1$ ,  $a \neq 0$ .

Введем обозначения

$$p_j^{(1)}(x) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln l_p(x, p_j(x)) - \\ - [l_p(x, p_j(x))]^{-1} \sum_{k=0}^n (-1)^k q'_{k+1}(x) p_j^{2k}(x), \quad (44) \\ \tilde{y}_j(x, \varepsilon) = \exp \left\{ \varepsilon^{-1} \int_{x_0}^x p_j(t) dt + \int_{x_0}^x p_j^{(1)}(t) dt \right\}.$$

Из условий 1), 2), 4) следует, что

$$p_j^{(1)}(x) = o(p_j(x)), \quad x \rightarrow \infty,$$

при всех  $j \neq 0$ . Кроме того, при  $x \rightarrow \infty$

$$p_j^{(1)}(x) = -\frac{2n+1}{4n} \frac{q'_1(x) + o(q'_1(x))}{q_1(x)}, \quad j \neq 0, \\ p_0^{(1)}(x) = o(q'_1(x)/q_1(x)).$$

Если функции  $\operatorname{Re}(p_j(x) - p_k(x))$  не меняют знак при  $x \gg 1$ , при всех  $j, k$ , то уравнение (41) имеет ФСР, состоящую из решений вида

$$y_j(x, \varepsilon) = \tilde{y}_j(x, \varepsilon) [1 + \varepsilon \psi_j(x, \varepsilon)], \quad 0 \leq j \leq 2n. \quad (45)$$

Для остаточных членов справедливы оценки

$$|\psi_j(x, \varepsilon)| \leq k(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = 0,$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $x \geq x(\varepsilon_0)$ , где  $\varepsilon_0$  достаточно мало. Асимптотика (4) является двойной.

Положим  $\varepsilon = 1$ , и пусть  $q_{n+1}(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow \infty$ . Тогда формулы (45) можно упростить:

$$y_j(x) = [q_1(x)]^{-1/2-1/(4n)} \exp \left\{ \int_{x_0}^x p_j(t) dt \right\}, \quad x \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, 2n,$$

$$y_0(x) = [q_1(x)]^{-1/2+0(1)}, \quad x \rightarrow \infty.$$

3.5. Уравнение третьего порядка. Рассмотрим уравнение

$$ly \equiv (ib_2 y'' + \left[ \left( \frac{i}{2} b_2' + a_1 \right) y' \right]' + ib_1 y' + \left[ \frac{i}{2} b_1' + a_0 \right] y) = i\mu y \quad (46)$$

на полуоси  $x \geq 0$ , где  $a_j(x)$ ,  $b_j(x)$  — вещественнозначные функции,  $b_2(x) \neq 0$ , так что оператор  $l$  — формально самосопряженный. Пусть  $\mu \neq 0$  — вещественная постоянная. В работе [74] найдена асимптотика ФСР уравнения (46) при  $x \rightarrow \infty$  и вычислены индексы дефекта симметрического оператора  $L$  в  $L_2(\mathbf{R}^+)$ , отвечающего  $l$ , при следующих предположениях:

$$1) \quad b_1(x), b_2(x) \in C^2(\mathbf{R}^+), \quad a_0(x), a_1(x) \in C^3(\mathbf{R}^+),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} b_2(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |a_0(x)| = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_1(x) a_0^{-1/3}(x) = d \neq (3/2)^{2/3},$$

и функция  $a_0'(x) \neq 0$  при  $x \geq 1$ .

2) Функции

$$b_1/a_0^{2/3}, \quad b_1/a_0, \quad b_2'/a_0^{1/3}, \quad b_2''/a_0^{2/3}, \quad a_1'/a_0^{2/3}, \quad b_1''/a_0^{4/3}, \quad a_0'/a_0^{4/3}$$

стремятся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ .

Характеристическое уравнение имеет вид

$$l(x, p) \equiv -p^3 b_2(x) + \left( ia_1(x) - \frac{1}{2} b_2'(x) \right) p^2 - b_1(x) p +$$

$$+ \left[ ia_0(x) - \frac{1}{2} b_1'(x) + \mu \right] = 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$\eta^3 - d\eta^2 + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения различны при  $d \neq (3/2)^{2/3}$  и отличны от нуля. Если  $d < (3/2)^{2/3}$ , то имеются вещественный корень  $\eta_1$  и два комплексно сопряженных корня  $\eta_2 = \bar{\eta}_3$ ,  $\text{Im } \eta_2 > 0$ . Если  $d > (3/2)^{2/3}$ , то все три корня вещественны:  $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$ . Из условий 1), 2) следует, что корни уравнения (47) имеют асимптотику

$$p_k(x) = ia_0^{1/3}(x) [\eta_k + o(1)], \quad x \rightarrow \infty. \quad (47)$$

Следующие условия — ограничения на «правильность» поведения коэффициентов уравнения (46) на бесконечности:

## 3) Функции

$$\begin{aligned} & |b'_2|, |b'_1/a_0^{2/3}|, |b_2''/a_0^{1/3}|, |b_2''/a_0|, |a_1''/a_0|, \\ & |b_1''/a_0^{5/3}|, |b_1''/a_0^{7/3}|, |a_0'/a_0^{7/3}|, |b_2''/a_0^{1/3}|, \\ & |b_2'''/a_0^{2/3}|, |a_1''/a_0^{2/3}|, |b_1'''/a_0^{4/3}|, |a_0''/a_0^{4/3}| \end{aligned}$$

принадлежат пространству  $L_1[r, \infty)$  при  $r \gg 1$ :

4) При любых  $j, k$  и при  $x \gg 1$  выполнено одно из условий:

а)  $\operatorname{Re} [p_j(x) - p_k(x)] \geq 0$ ;

б)  $\operatorname{Re} [p_j(x) - p_k(x)] \leq 0$ ,  $\int_0^\infty \operatorname{Re} [p_j(x) - p_k(x)] dx = \infty$ ;

в)  $\left| \int_0^\infty \operatorname{Re} [p_j(x) - p_k(x)] dx \right| < \infty$ .

Тогда уравнение (46) имеет ФСР вида

$$y_k(x) = [1 + o(1)] a_0^{-1/3}(x) \exp \left\{ \int_{x_0}^x p_k(t) dt \right\}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (48)$$

**Пример.** Пусть

$$b_2(x) \equiv 1, \quad b_1(x) = ax^\alpha, \quad a_1(x) = bx^{\gamma/3}, \quad a_0(x) = cx^\gamma,$$

где  $c \neq 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\alpha < 2\gamma/3$ ,  $(b/c)^{1/3} \neq (3/2)^{2/3}$ . Тогда условия 1) — 3) выполнены. Если  $(b/c)^{1/3} < (3/2)^{2/3}$ , то выполнено условие 4). В этом случае можно получить АР для корней  $p_j(x)$  [74].

#### § 4. Системы уравнений на бесконечном интервале

**1. Системы уравнений первого порядка.** В гл. II, § 5, были рассмотрены системы, близкие к диагональным, и была построена асимптотика их ФМ. Здесь мы рассмотрим более общие классы систем.

**1.1. Системы с асимптотически простыми корнями.** Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$y' = A(x)y \quad (1)$$

на полуоси  $\mathbf{R}^+ = [0, \infty)$ , где  $A(x) \in C^2(\mathbf{R}^+)$ . Пусть  $q(x)$  — комплекснозначная функция,  $q(x) \neq 0$  при  $x \geq 1$  и  $Q(x) = = \operatorname{diag}\{[q(x)]^{\alpha_1}, \dots, [q(x)]^{\alpha_n}\}$ .

Сформулируем условия на матрицу  $A(x)$ :

1)  $A(x) = q(x)Q(x)B(x)Q^{-1}(x)$ ,  $x \geq 0$ .

2) Предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} B(x) = B(\infty)$  существует и конечен, матрица

$B(\infty)$  невырождена и не имеет кратных собственных значений.

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} r_1(x) = 0$ ,  $r_1 = \|q'\| |q|^{-2} + |q|^{-1} \|B'(x)\|$ .

4)  $r_2(x) \in L_1[0, \infty)$ , где

$$r_2 = |q'|^2 |q|^{-3} + |q''| |q|^{-2} + |q'| |q|^{-2} \|B'(x)\| + \\ + |q|^{-1} (\|B'(x)\|^2 + \|B''(x)\|).$$

Здесь  $\|B(x)\| = \max_{1 \leq j, k \leq n} |b_{jk}(x)|$ ,  $B'(x)$  — матрица с элементами  $b'_{jk}(x)$ .

Из условий 1), 2) следует, что собственные значения  $p_j(x)$  матрицы  $A(x)$  имеют вид

$$p_j(x) = q(x) \eta_j(x),$$

где  $\eta_j(x)$  — собственные значения матрицы  $B(x)$ . Собственные значения  $p_j(x)$  — асимптотически простые, так как при всех  $j \neq k$  существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_j(x)/p_k(x) = c_{jk} \neq 0, 1, \infty. \quad (2)$$

**З а м е ч а н и я.** 1. Если уравнение (12) § 3 свести стандартным способом к системе из  $n$  уравнений первого порядка, то эта система будет удовлетворять условиям 1), 2), причем

$$Q(x) = \text{diag}(1, q(x), q^2(x), \dots, q^n(x)).$$

2. Системы (1), удовлетворяющие условиям 1), 2), являются в некотором смысле системами «общего положения». Положим  $d(x) = \det A(x)$ . Пусть  $d(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ , все элементы матрицы  $A(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  ведут себя как степени  $d(x)$ , ее собственные значения — как  $d^{1/n}(x)$ :

$$a_{ij}(x) = [c_{ij} + o(1)] d^{x_{ij}}(x).$$

Пусть матрица  $A(x)$  невырождена по Волевичу, т. е. в разложении определителя

$$\det A(x) = \sum \pm a_{1j_1}(x) \dots a_{nj_n}(x)$$

не все главные члены сокращаются. Тогда

$$A(x) = Q_1(x) B(x) Q_2(x),$$

$$Q_1(x) = \text{diag}(d^{s_1}, \dots, d^{s_n}), \quad Q_2(x) = \text{diag}(d^{t_1}, \dots, d^{t_n}),$$

причем  $\sum_{j=1}^n (s_j + t_j) = 1$ , матрица  $B(+\infty)$  существует, конечна и невырождена. Собственные значения матрицы  $A(x)$  совпадают с собственными значениями матрицы  $d^{1/n} B Q_2 Q_1 d^{-1/n}$ , и из условия (2) следует, что  $s_j + t_j = 1/n$ , так что  $A(x)$  удовлетворяет условию 1).

Частным случаем систем вида (1) служат системы, которые исследовались в аналитической теории дифференциальных

уравнений, с иррегулярной особой точкой  $x = \infty$ :

$$y' = x^r \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{-k} y.$$

Здесь  $r \geq 0$  — целое число,  $A_k$  — постоянные матрицы, матрица  $A_0$  невырождена и имеет различные собственные значения, ряд сходится в области  $|x| > R$ .

Условия 3), 4) — это стандартные требования «правильности» поведения коэффициентов матрицы  $A(x)$  на бесконечности. Например, если  $a_{jk}(x) \sim c_{jk} x^\alpha$  при  $x \rightarrow \infty$ ,  $\alpha > -1$ , то из условий 1), 2) следуют условия 3), 4).

Обозначим  $e_j(x)$ ,  $e_j^*(x)$  соответственно правый и левый собственные векторы матрицы  $A(x)$ , отвечающие собственному значению  $p_j(x)$ . Напомним, что  $e_j(x)$  есть вектор-столбец,  $e_j^*(x)$  есть вектор-строка. Введем обозначения

$$p_j^{(1)}(x) = -\frac{e_j^*(x) e_j'(x)}{e_j^*(x) e_j(x)}, \quad \tilde{y}_j(x) = \exp \left\{ \int_{x_0}^x [p_j(t) + p_j^{(1)}(t)] dt \right\}. \quad (3)$$

Так как матрица  $B(\infty)$  не имеет кратных собственных значений, то существует  $x_0 > 0$  такое, что при  $x \geq x_0$  имеются базисы  $\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$  и  $\{f_1^*(x), \dots, f_n^*(x)\}$  класса  $C^2$ , состоящие из правых и левых собственных векторов матрицы  $B(x)$ . Эти векторы можно выбрать так, чтобы все они имели конечные и ненулевые пределы при  $x \rightarrow \infty$ . Положим

$$e_j(x) = Q(x) f_j(x), \quad e_j^*(x) = f_j^*(x) Q^{-1}(x).$$

Как и в § 3,  $p_j^{(1)}(x) = o(p_j(x))$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Пусть при некотором  $j$  и при всех  $k$  функции

$$\varphi_{jk}(x) = \operatorname{Re} [p_j(x) - p_k(x) + p_j^{(1)}(x) - p_k^{(1)}(x)]$$

не меняют знак при  $x \geq 1$ . Тогда система (1) имеет решение вида

$$y_j(x) = \tilde{y}_j(x) \left[ e_j(x) + \sum_{k=1}^n u_{jk}(x) e_k(x) \right], \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u_{jk}(x) = 0. \quad (4)$$

Если условие на функции  $\varphi_{jk}(x)$  выполнено при всех  $j$ , то система (1) имеет ФМ вида

$$Y(x) = T_0(x) [I + U(x)] \exp \left\{ \int_{x_0}^x [\Lambda(t) + \Lambda^{(1)}(t)] dt \right\}, \quad (5)$$

где  $T_0(x) = (e_1(x), \dots, e_n(x))^T$ ,  $\Lambda$ ,  $\Lambda^{(1)}$  — диагональные матрицы соответственно с диагональными элементами  $p_j(x)$ ,  $p_j^{(1)}(x)$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \|U(x)\| = 0$ .



Условие 2) можно ослабить: матрица  $B(\infty)$  может иметь одно простое нулевое собственное значение (этот случай аналогичен рассмотренному в § 3, п. 2.2).

**З а м е ч а н и е.** Вектор-функция

$$z(x) = \exp \left\{ \int_{x_0}^x p_j^{(1)} dt \right\} e_j(x)$$

есть инвариант в том смысле, что она не зависит от выбора собственных векторов  $e_j(x)$ ,  $e_j^*(x)$ , с точностью до постоянного множителя.

1.2. Двойные асимптотики. Рассмотрим систему

$$y' = \lambda A(x)y, \quad (6)$$

для которой выполняются условия 1) — 4), и положим

$$\tilde{y}_j(x, \lambda) = \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t) + \int_{x_0}^x p_j^{(1)}(t) dt \right\}. \quad (7)$$

Собственные векторы  $e_j(x)$ ,  $e_j^*(x)$  выберем так же, как и в п. 1.1. Пусть

$$\int_0^\infty |q(x)| dx = \infty, \quad (8)$$

$$|\operatorname{Re}(p_j(x) - p_k(x))| \geq c |q(x)| > 0, \quad x \gg 1, \quad (9)$$

при некотором  $j$  и при всех  $k \neq j$ . Тогда система (6) имеет решение вида

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda) \left[ e_j(x) + \lambda^{-1} \sum_{k=1}^n u_{jk}(x) e_k(x) \right] \quad (10)$$

и для всякого  $\lambda_0 > 0$  существует  $x(\lambda_0) < \infty$  такое, что при  $x \geq x(\lambda_0)$ ,  $\lambda > \lambda_0$ ,

$$|u_{jk}(x, \lambda)| \leq k_j(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} k_j(x) = 0. \quad (11)$$

Таким образом, асимптотика (10) является двойной.

Если же условие (9) выполнено при всех  $j, k, j \neq k$ , то система (6) имеет ФМ вида

$$Y(x, \lambda) = T_0(x) (I + \lambda^{-1}U) \exp \left\{ \int_{x_0}^x [\lambda \Lambda(t) + \Lambda^{(1)}(t)] dt \right\}, \quad (12)$$

$$\|U(x, \lambda)\| \leq k(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = 0. \quad (13)$$

Матрицы  $T_0$ ,  $\Lambda$ ,  $\Lambda^{(1)}$  те же, что и в формуле (5), оценка для  $\|U(x)\|$  выполняется при  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $x \geq x(\lambda_0)$ .

При указанных условиях формулы (10) — (12) остаются справедливыми, когда  $\lambda$  лежит в некотором секторе  $S$ :  $\alpha \leq \arg \lambda \leq \beta$ ,

$0 < \beta - \alpha < 2\pi$ , комплексной плоскости  $\lambda$ . Пусть существует

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arg q(x) = \varphi_0, \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi;$$

тогда можно точнее указать сектор  $S$ . Пусть  $\eta_j^0$  — собственные значения матрицы  $B(\infty)$ . Положим  $\eta_j^* = \eta_j e^{i\varphi_0}$ , зафиксируем  $j$  и проведем прямые

$$\operatorname{Re} [e^{i\varphi} (\eta_j^* - \eta_k^*)] = 0, \quad \varphi = \arg \lambda,$$

в комплексной плоскости  $\lambda$ . Эти прямые разобьют плоскость  $\lambda$  на открытые секторы  $S_1, \dots, S_N$ . Пусть  $\tilde{S}_j$  — замкнутый сектор, лежащий внутри сектора  $S_j$ . Если условие (8) выполнено, то формулы (10), (11) справедливы при  $\lambda \in \tilde{S}_j$ , так как условие (9) выполняется.

Приведем другие достаточные условия, при которых справедлива формула (12):

а) все собственные значения  $p_j(x)$  — чисто мнимые;

б) все интегралы  $\int_0^\infty |\operatorname{Re} p_j^{(1)}(x)| dx$  сходятся.

1.3. Оценки остаточных членов. Некоторые оценки были приведены в гл. II, § 5. Пусть выполнены условия 1) — 4), (8) и (9) при некотором  $j$ . Пусть при  $x \gg 1$  выполняются оценки

$$\begin{aligned} |q'| &\leq c |q|^{\gamma_1}, \quad |q'| \geq c |q|^{\gamma_2}, \quad |q''| \leq c |q|^{\gamma_3}, \\ \|B'\| &\leq c |q'| |q|^{-1}, \quad \|B''\| \leq c (|q''| + |q'|^2) |q|^{-1}, \end{aligned}$$

где  $c > 0$  — постоянная и

$$\gamma < 2, \quad \gamma_2 < 2, \quad \gamma_2 < 1 - \gamma, \quad \gamma = \max(2\gamma_1 - 2, \gamma_3 - 1) - \gamma_2.$$

Тогда в формуле (11) можно положить

$$k_j(x) = c_j \|q\|^{\gamma_0}, \quad \gamma_0 = \max(\gamma, \gamma_1 - 2).$$

Оценки для  $\|B'\|$ ,  $\|B''\|$  выполняются, например, в том случае, когда

$$B(x) = B_0 + q^{-\alpha}(x) B_1 + \dots,$$

где  $\alpha > 0$ ,  $B_0, B_1, \dots$  — постоянные матрицы.

Пусть  $q(x) = ax^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $a \neq 0$ ; тогда можно положить

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1 - 1/\alpha, \quad \gamma_3 = 1 - 2/\alpha, \quad \gamma = -1 - 1/\alpha = \gamma_0,$$

так что  $k_j(x) = O(x^{-1-1/\alpha})$ . Пусть  $q(x) = \exp\{ax^\alpha\}$ ,  $a > 0$ ,  $\alpha > 0$ ; тогда можно положить

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1 + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon > 0$  сколь угодно мало, так что

$$k_j(x) = O(\exp\{(-1 + \varepsilon)x^\alpha\}).$$

1.4. Почти диагональные системы. Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$y' = [\Lambda(x) + V(x)] y, \quad \Lambda(x) = \text{diag}(p_1(x), \dots, p_n(x)), \quad (14)$$

на полуоси  $x \geq 0$ , где  $V(x)$  — непрерывная матрица-функция. В гл. II, § 5, были приведены достаточные условия (теорема Левинсона), при которых можно найти асимптотику ФМ системы (13) при  $x \rightarrow \infty$ . Другие достаточные условия дает

**Т е о р е м а** (Хартман — Уинтнер). Пусть  $\|V(x)\| \in L_2(0, \infty)$  и при всех  $j, k, j \neq k$ ,

$$|\text{Re}(p_j(x) - p_k(x))| \geq c > 0, \quad x \geq x_0.$$

Тогда система (13) имеет ФМ вида

$$Y(x) = [I + o(1)] \exp \left\{ \int_{x_0}^x [\Lambda(t) + \text{diag } V(t)] dt \right\}.$$

Рассмотрим систему

$$y' = [A + V(x) + R(x)] y, \quad (15)$$

где  $A$  — постоянная матрица с различными собственными значениями  $p_1, \dots, p_n$ , матрицы-функции  $V(x), R(x)$  непрерывны при  $x \geq 0$ . Приведем достаточные условия, при которых система (15) имеет ФМ вида

$$Y(x) = [T + o(1)] \exp \left\{ \int_{x_0}^x \Lambda(t) dt \right\}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Здесь  $\Lambda(x)$  имеет вид (14), где  $p_j(x)$  — собственные значения матрицы  $A + V(x)$ , матрица  $T$  приводит матрицу  $A$  к диагональному виду:  $T^{-1}AT = \text{diag}(p_1, \dots, p_n) \equiv \Lambda$ .

Обозначим

$$S_{kj}(t, x) = \text{Re} \int_t^x [p_k(s) - p_j(s)] ds.$$

По определению функция  $S_{kj}$  принадлежит классу  $H_1$ , если

$$S_{kj}(x_0, +\infty) = +\infty, \quad S_{kj}(t, x) \geq -c, \quad x_0 \leq t \leq x,$$

и  $S_{kj}$  принадлежит классу  $H_2$ , если

$$S_{kj}(t, x) \leq c, \quad x_0 \leq t \leq x.$$

Здесь  $c$  — постоянная,  $x_0 \geq 0$  — достаточно большое число.

1) Все функции  $S_{kj}$  принадлежат либо классу  $H_1$ , либо классу  $H_2$ ;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0, \quad \int_0^{\infty} (\|V'(x)\| + \|R(x)\|) dx < \infty.$$

Примеры. 1. Рассмотрим систему (15), где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad V(x) = x^{-\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R(x) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Собственные значения матрицы  $A + V(x)$  равны

$$p_1(x) = 1 - \sqrt{1 + x^{-2\alpha}} = -\frac{1}{2}x^{-2\alpha} + O(x^{-4\alpha}),$$

$$p_2(x) = 1 + \sqrt{1 + x^{-2\alpha}} = 2 + O(x^{-2\alpha}),$$

так что  $\operatorname{Re} [p_1(x) - p_2(x)] = 2 + O(x^{-2\alpha})$ . Теорема Хартмана — Уинтнера применима при  $\alpha > 1/2$ ; в этом случае

$$Y(x) = [I + o(1)] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{bmatrix}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Так как  $\|V'(x)\| = O(x^{-\alpha-1})$  при  $x \rightarrow \infty$ , то условие 1) выполнено и при  $0 < \alpha \leq 1$  имеем

$$Y(x) = [I + o(1)] \begin{bmatrix} \exp \left\{ \int_0^x p_1(t) dt \right\} & 0 \\ 0 & \exp \left\{ \int_0^x p_2(t) dt \right\} \end{bmatrix}.$$

В частности, при  $\alpha = 1/2$

$$Y(x) = [I + o(1)] \begin{bmatrix} x^{-1/2} & 0 \\ 0 & x^{1/2} e^{2x} \end{bmatrix}.$$

2) Существует целое число  $k > 0$  такое, что матрицы  $V^{(k)}(x)$ ,  $R(x)$  непрерывны при  $x \geq 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V^{(j)}(x) = 0, \quad 0 \leq j \leq k-2;$$

$$\|V^{(j)}(x)\| \in L_2(0, \infty), \quad 1 \leq j \leq k-1.$$

Функции  $\|V(x)\|$ ,  $\|V'(x)\|$ ,  $\|V^k(x)\|$ ,  $\|R(x)\|$  принадлежат пространству  $L_1(0, \infty)$  и все функции  $S_{kj}$  принадлежат либо классу  $H_1$ , либо классу  $H_2$ .

Условие 1) — частный случай условия 2).

2. Рассмотрим систему

$$y' = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} y + v(x) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} y, \quad v(x) = x^{-\beta} \sin x^{1-\alpha}.$$

Пусть  $1/2 < \beta < 1$ ,  $(1 - \beta)/(k + 1) < \alpha \leq (1 - \beta)/k$ , где  $k \geq 1$  — целое число. Имеем

$$p_{1,2}(x) = \pm i \sqrt{1 - v^2(x)}, \quad \operatorname{Re} [p_1(x) - p_2(x)] \equiv 0, \quad x \geq 1,$$

и можно проверить, что остальные требования условия 2) выполнены. Система имеет ФМ вида

$$Y(x) = [I + o(1)] \begin{bmatrix} \exp\{ix + if(x)\} & 0 \\ 0 & \exp\{ix - if(x)\} \end{bmatrix},$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x t^{-2\beta} \sin^2 t^{1-\alpha} dt.$$

Заметим, что  $v^{(j)}(x) \notin L_1[1, \infty)$  при  $0 \leq j \leq k-1$ .

3) Вещественные части собственных значений матрицы  $A$  различны; матрица  $V'(x)$  непрерывна при  $x \geq 0$ ;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0; \quad [\|V'(x)\|^2 + \|V(x)\| \|V'(x)\|] \in L_1[0, \infty).$$

3. Рассмотрим систему

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} y + v(x) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y,$$

где  $v(x)$  — функция из примера 2,  $\beta = 1/2$ . В этом случае  $v(x) \notin L_2(1, \infty)$ , т. е. условия теоремы Хартмана — Уинтнера не выполняются, но

$$v'(x) \in L_2(1, \infty), \quad v(x)v'(x) \in L_1(1, \infty),$$

и все требования условия 3) выполнены.

4)  $V(x) = V_1(x) + V_2(x)$ ; матрицы  $V_1(x)$ ,  $V_1'(x)$  абсолютно непрерывны на любом конечном отрезке  $0 \leq a < x < b$ ;

$$[\|V_1'(x)\| + \|V_2'(x)\|^2 + \|V_2'(x)\| + \|V_2'(x)\| \|V(x)\| + \\ + \|R(x)\|] \in L_1(0, \infty).$$

При некотором  $k$  и при всех  $j \neq k$  все функции  $S_{kj}$  принадлежат либо классу  $H_1$ , либо классу  $H_2$ . Тогда система (15) имеет решение

$$y_k(x) = \exp \left\{ \int_{x_0}^x p_k(t) dt \right\} [e_k + o(1)], \quad x \rightarrow \infty, \quad (17)$$

где  $e_k$  — собственный вектор матрицы  $A$ , отвечающий собственному значению  $p_k$ . Если последнее условие выполнено при всех  $j$ , то система (15) имеет ФМ вида (16).

4. Этот пример показывает, что класс систем, удовлетворяющих условию 4), шире, чем класс систем, удовлетворяющих условиям теоремы Левинсона (гл. II, § 5). Рассмотрим функцию

$$v(x) = - \int_{x^\alpha}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

Очевидно, что  $v(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , но

$$v(x) = -x^{-\alpha} \cos x^\alpha + O(x^{-2\alpha}),$$

так что  $v(x) \notin L_1(1, \infty)$ . Далее,

$$v'(x) = \alpha x^{-1} \sin x^2 \notin L_2(1, \infty), \\ |v'(x)|^2 \in L_1(1, \infty), \quad v'(x)v(x) \in L_1(1, \infty), \quad v''(x) \in L_1(1, \infty).$$

Приведем обобщение теоремы Хартмана — Уинтнера. При  $x \gg 1$  существует матрица  $Q(x)$  с нулевыми диагональными элементами такая, что

$$[I + Q(x)]^{-1} T^{-1} [A + V(x)] T [I + Q(x)] = \Lambda(x),$$

где  $\Lambda(x)$  имеет вид (14), и такая матрица  $Q(x)$  единственна. Обозначим

$$\tilde{\Lambda}(x) = \Lambda(x) - \text{diag} [(I + Q(x))^{-1} Q'(x)].$$

5) Существует целое число  $k > 0$  такое, что матрицы  $V^{(k)}(x)$ ,  $R(x)$  непрерывны при  $x \geq 0$ , все функции  $S_{kj}(x)$  принадлежат  $H_1 \cup H_2$  и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V^{(j)}(x) = 0, \quad 0 \leq j \leq k-2; \\ \|V^{(j)}(x)\| \in L_2(0, \infty), \quad 1 \leq j \leq k-1; \\ [\|V^{(k)}(x)\| + \|R(x)\|] \in L_1(0, \infty).$$

Тогда система (15) имеет ФМ вида

$$Y(x) = [T + o(1)] \exp \left\{ \int_{x_0}^x \tilde{\Lambda}(t) dt \right\}, \quad x \rightarrow \infty.$$

5. Рассмотрим систему

$$y' = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} y + 2 \begin{bmatrix} 0 & -x^{-1/4} \sin x^{1/2} \\ x^{-1/4} \cos x^{1/2} & 0 \end{bmatrix} y.$$

Собственные значения  $p_j(x)$  равны

$$p_{1,2}(x) = \pm i \left( 1 + x^{-1/2} \sin 2x^{1/2} - \frac{1}{4} x^{-1} \sin^2 2x^{1/2} \right) + O(x^{-3/2}).$$

В этом случае  $\|V(x)\| \notin L_1(1, \infty)$ ,  $\|V(x)\| \|V'(x)\| \notin L_1(1, \infty)$ , но  $\|V''(x)\| \in L_1(1, \infty)$ ,  $\|V'(x)\| \in L_2(1, \infty)$ . Далее,

$$\bar{p}_1(x) = i \left( 1 + x^{-1/2} \sin 2x^{1/2} - \frac{1}{4} x^{-1} \sin^2 2x^{1/2} \right) + \\ + \frac{1}{8x} \sin^2 x^{1/2} + O(x^{-3/2}), \\ \bar{p}_2(x) = -i \left( 1 + x^{-1/2} \sin 2x^{1/2} - \frac{1}{4} x^{-1} \sin^2 2x^{1/2} \right) - \\ - \frac{1}{8x} \cos^2 x^{1/2} + O(x^{-3/2}),$$

так что  $\text{Re} [\bar{p}_1(x) - \bar{p}_2(x)] = 4x^{-1} + O(x^{-3/2})$ , и условие 5) выполнено.

1.5. Системы с асимптотически кратными корнями. Рассмотрим систему (15) на полуоси  $x \geq 0$ . Пусть степень минимального многочлена  $f(A)$  матрицы  $A$  равна  $n$ , так что он имеет вид

$$f(p) = \prod_{k=1}^m (p - p_k)^{n_k}, \quad \sum_{k=1}^m n_k = n,$$

и  $p_j \neq p_k$  при  $j \neq k$ . В этом случае жорданова нормальная форма матрицы  $A$  состоит из  $m$  жордановых блоков порядков  $n_1, \dots, n_m$  и матрица  $A$  имеет ровно  $m$  линейно независимых собственных векторов  $e_1, \dots, e_m$ ,  $Ae_j = p_j e_j$ .

Положим  $r + 1 = \max n_k$ . Пусть матрица  $V(x)$  абсолютно непрерывна на любом конечном отрезке  $I \subset \mathbb{R}^+$ , матрица  $R(x)$  измерима по Лебегу и выполнены условия

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0, \quad [x^r \|V'(x)\| + x^r \|R(x)\|] \in L_1(0, \infty).$$

Пусть  $p_{jk}(x)$  — собственные значения матрицы  $A + V(x)$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $1 \leq k \leq n_j$ . Введем условия:

1) Функции  $p_{jk}(x)$  абсолютно непрерывны при  $x \geq 1$ , и их можно выбрать так, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_{jk}(x) = p_j, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq n_j.$$

2)  $\int_1^\infty x^r |p'_{jk}(x)| dx < \infty$  при всех допустимых  $j, k$ .

Условие 1) является наиболее ограничительным. Оно эквивалентно следующему: существует матрица  $Q(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = 0$ , такая, что

$$(I + Q(x))^{-1} (A + V(x)) (I + Q(x)) = \text{diag} (\Lambda_1(x), \dots, \Lambda_m(x)),$$

где  $\Lambda_j(x)$  — жордановы блоки вида

$$\Lambda_j(x) = \begin{bmatrix} p_j(x) & & & & 0 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & p_j(x) \end{bmatrix}.$$

Положим  $\mu_{jq}(x) = p_{j1}(x) + (q-1)/x$ , и пусть все функции  $S_{\alpha\beta}$  принадлежат одному из классов  $H_1, H_2$ . Тогда система (15) имеет ФСР вида

$$y_{jk}(x) = x^{j-1} \exp \left\{ \int_x^x p_{jk}(t) dt \right\} [e_j + o(1)], \quad (18)$$

$$1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq n_j.$$

В пп. 1.4, 1.5 приведены результаты работ [70—73, 77, 78].

1.6. Канонические и гамильтоновы системы. Рассмотрим систему вида

$$Jy' = H(x)y \quad (19)$$

на вещественной оси,  $H(x) \in C^2(R)$ . Система (19) называется *канонической*, если  $H(x)$  — вещественная симметрическая матрица-функция,  $J$  — постоянная неособая кососимметрическая матрица:

$$H^T(x) = H(x), \quad J^T = -J.$$

Число уравнений канонической системы чётно; обозначим его  $2n$ . С помощью подстановки  $y = Tz$ , где  $T$  — постоянная невырожденная вещественная матрица, каноническую систему можно привести к такому виду, что

$$J = J_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $0, I_n$  — нулевая и единичная ( $n \times n$ )-матрицы,  $J^2 = -I_{2n}$ . В дальнейшем положим  $J = J_{2n}$  в системе (19).

Система вида (19) называется *гамильтоновой*, если  $H(x)$  — эрмитова матрица-функция,  $J$  — постоянная невырожденная антиэрмитова матрица:

$$H^*(x) = H(x), \quad J^* = -J.$$

Здесь знак  $*$  означает операцию эрмитова сопряжения: если  $H(x) = (h_{jk}(x))$ , то  $H^*(x) = (\overline{h_{kj}(x)})$ . Гамильтонова система содержит чётное число уравнений (обозначим его  $2n$ ), и ее можно привести к виду

$$-iGy' = H(x)y, \quad (20)$$

где  $H(x)$  — эрмитова матрица-функция,

$$G = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}, \quad p + q = 2n.$$

Приведем известные свойства канонических и гамильтоновых систем. Пусть  $Y(x)$  — ФМ гамильтоновой системы.

1. Справедливо тождество

$$Y^*(x)JY(x) \equiv \text{const.}$$

Вещественная квадратная матрица  $A$  порядка  $2n$  называется *симплектической*, если

$$A^T J_{2n} A = J_{2n}.$$

2. Пусть  $Y(x)$  — вещественная ФМ канонической системы. Тогда матрица  $Y(x)Y^{-1}(x_0)$  — симплектическая.



Как и в § 2, скалярное произведение векторов  $y = (y_1, \dots, y_k)^T$ ,  $z = (z_1, \dots, z_k)^T$  определим формулой

$$(y, z) = \sum_{j=1}^k z_j y_j.$$

3. Если  $y(x)$ ,  $z(x)$  — решения гамильтоновой системы, то

$$(Jy(x), \overline{z(x)}) \equiv \text{const.}$$

Свойства 2, 3 — следствия свойства 1. Если  $J = J_{2n}$  и  $y(x)$ ,  $z(x)$  — вещественные решения канонической системы, то тождество свойства 3 имеет вид

$$\sum_{k=1}^n [y_k(x) z_{n+k}(x) - y_{n+k}(x) z_k(x)] \equiv \text{const.}$$

Рассмотрим матричные пучки  $L(x, p) = H(x) - pJ$ , ассоциированные с канонической и гамильтоновой системами, где  $J = J_{2n}$  в случае канонической системы и  $J = -iG$  в случае гамильтоновой системы. Фиксируем  $x_0 \geq 0$ .

4. Если  $p$  — собственное значение канонического пучка  $L$ , то  $-p$ ,  $\bar{p}$ ,  $-\bar{p}$  — собственные значения. Если  $p$  — собственное значение гамильтонова пучка  $L$ , то  $\bar{p}$  — собственное значение.

Правые и левые собственные векторы пучка  $L$  связаны следующими соотношениями. Предположим, что  $e$  — правый собственный вектор пучка  $L$ , т. е.  $He = pJe$ .

5. Если  $L$  — канонический пучок, то  $e^T H = -pe^T J$ . Если  $L$  — гамильтонов пучок, то  $\bar{e}^T H = -\bar{p}\bar{e}^T J$ .

Собственные векторы пучков косоортогональны. Предположим, что  $He = pJe$ ,  $Hf = qJf$ .

6. Если  $L$  — канонический пучок, то

$$(Je, f) = 0, \quad p + q \neq 0.$$

Если  $L$  — гамильтонов пучок, то

$$(Je, \bar{f}) = 0, \quad p + \bar{q} \neq 0.$$

Рассмотрим канонический пучок  $L$  при следующем предположении:

1) Собственные значения пучка  $L(x, p)$  различны и не обращаются в нуль при  $x \geq 0$ .

При  $x = 0$  все корни пучка, лежащие в первом квадранте  $\text{Re } p \geq 0$ ,  $\text{Im } p \geq 0$ , можно разбить на три группы.

I. Чисто мнимые корни.

II. Вещественные корни.

III. Комплексные корни ( $\text{Re } p > 0$ ,  $\text{Im } p > 0$ ).

При  $n = 2$  корни принадлежат либо группе I, либо группе II. Если  $l_j$  — число корней  $j$ -й группы, то  $2l_1 + 2l_2 + 4l_3 = 2n$ . Из свойства 4 и условий на пучок  $L$  следует, что при всех  $x \geq 0$  корни

остаются в своей группе (т. е. если  $\operatorname{Re} p(0) = 0$ ,  $\operatorname{Im} p(0) > 0$ , то  $\operatorname{Re} p(x) = 0$ ,  $\operatorname{Im} p(x) > 0$  при  $x \geq 0$  для корней первой группы и т. д.).

Соотношения ортогональности свойства б также сохраняются при всех  $x \geq 0$ . Рассмотрим один из наиболее важных для приложений случай:

2) Собственные значения пучка  $L$  — чисто мнимые.

Тогда их можно представить в виде  $iq_1(x)$ ,  $-iq_1(x)$ , ...,  $iq_n(x)$ ,  $-iq_n(x)$ , где  $q_j(x) > 0$  при  $x \geq 0$ . Обозначим эти собственные значения  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$ , ...,  $p_{2n}(x)$ , так что  $p_{2k}(x) \equiv \overline{p_{2k-1}(x)}$ . Правые и левые собственные векторы пучка  $L$  также можно сгруппировать парами:

$$\{e_1(x), \overline{e_1(x)}, \dots, e_n(x), \overline{e_n(x)}\}, \\ \{e_1^T(x), \overline{e_1^T(x)}, \dots, e_n^T(x), \overline{e_n^T(x)}\};$$

нумерацию для них возьмем ту же, что и для корней  $p_j(x)$ . Введем матрицы

$$\Lambda(x) = \operatorname{diag}(p_1(x), \dots, p_{2n}(x)), \\ T_0(x) = (e_1(x), \overline{e_1(x)}, \dots, e_n(x), \overline{e_n(x)});$$

тогда  $T_0^{-1}(x) J T_0(x) = -\Lambda(x)$ . Нормируем векторы  $e_j(x)$  так чтобы

$$e_j^*(x) J e_j(x) = 1, \quad x \geq 0; \quad (24)$$

тогда

$$T_0^*(x) = (\overline{e_1^T(x)}, e_1^T(x), \dots, \overline{e_n^T(x)}, e_n^T(x)), \\ T_0^*(x) J T_0(x) = I_{2n}.$$

Рассмотрим вначале простейшие условия на поведение матрицы-функции  $H(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ :

3) Предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = H(\infty)$  существует и конечен,

$$\det H(\infty) \neq 0, \quad \int_0^{\infty} \|H'(x)\| dx < \infty.$$

Тогда матрицу  $T_0(x)$  можно выбрать так, чтобы существовал конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T_0(x) = T_0(\infty), \quad \det T_0(\infty) \neq 0.$$

Если условия 1) — 3) выполнены, то каноническая система (19) имеет ФМ вида (16), где  $T = T_0(\infty)$ . Решения, образующие ФСР,

имеют вид

$$y_{2k-1}(x) = \exp \left\{ i \int_0^x q_k(t) dt \right\} [e_k + o(1)], \quad x \rightarrow \infty,$$

$$y_{2k}(x) = \overline{y_{2k-1}(x)}.$$

Для ФМ канонической системы

$$Jy' = \lambda H(x)y$$

при условиях 1) — 3) справедлива асимптотическая формула вида (12) (двойная асимптотика).

Пусть условия 1), 2) выполнены, матрица  $H(x)$  удовлетворяет условиям 1) — 4) из п. 1.1. Введем функции

$$p_j^{(1)}(x) = -e_j^*(x) J e_j'(x). \quad (22)$$

Эти функции вещественнозначны, и  $p_{2k}^{(1)}(x) \equiv p_{2k-1}^{(1)}(x)$  в силу нормировки (21).

Если все функции  $\operatorname{Re} [p_j^{(1)}(x) - p_k^{(1)}(x)]$  не меняют знак при  $x \gg 1$ , то каноническая система (19) имеет ФМ вида (5).

**2. Системы уравнений второго порядка.** Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$y'' = \lambda^2 A(x)y \quad (23)$$

на полуоси  $\mathbf{R}^+$ :  $x \geq 0$ , где  $\lambda > 0$  — параметр,  $A(x) \in C^2(\mathbf{R}^+)$ . Пусть  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  — собственные значения матрицы  $A(x)$ . Системе (23) отвечает матричный пучок  $L(x, p) = p^2 I - A(x)$ , собственные значения которого равны  $\pm \sqrt{p_j(x)}$ . Введем условие:

1) Функции  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  различны и отличны от нуля при  $x \geq 0$ .

Фиксируем ветви функций  $\sqrt{p_2(x)}, \dots, \sqrt{p_n(x)}$ . В силу условия 1) эти функции принадлежат классу  $C^2(\mathbf{R}^+)$ . Следующее условие означает, что собственные значения матрицы  $A(x)$  асимптотически простые:

2) При любых  $j, k$  пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_j(x)/p_k(x) = c_{jk}$$

существуют, конечны и  $c_{jk} \neq 1$  при  $j \neq k$ .

Из условий 1), 2) следует существование функции  $q(x) \in C^2(\mathbf{R}^+)$ ,  $q(x) \neq 0$  при  $x \geq 0$  и постоянных  $c_j \neq 0$  таких, что

$$p_j(x) = [c_j + o(1)] q(x), \quad x \rightarrow \infty, \quad (24)$$

где  $c_j \neq c_k$  при  $j \neq k$ . В силу условия 1) существуют базисы  $\{e_1(x), \dots, e_n(x)\}$ ,  $\{e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)\}$  класса  $C^2(\mathbf{R}^+)$  из правых и левых собственных векторов матрицы  $A(x)$ . Нормируем их.

условием

$$e_j^*(x) e_j(x) \equiv 1; \quad (25)$$

тогда матрица  $T(x) = (e_1(x), \dots, e_n(x))$  приводит матрицу  $A(x)$  к диагональному виду

$$T^{-1}(x) A(x) T(x) = \Lambda(x) = \text{diag}(p_1(x), \dots, p_n(x)),$$

а  $T^{-1}(x)$  — матрица со строками  $e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)$ . Положим

$$p_j^{(1)}(x) = -e_j^*(x) e_j'(x), \quad \Lambda^{(1)}(x) = \text{diag}(p_1^{(1)}(x), \dots, p_n^{(1)}(x)). \quad (26)$$

Введем условия, которые аналогичны условиям 1), 3), 4) из п. 1.1:

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (|q'| |q|^{-3/2} + |q|^{-1/2} \|T^{-1}(x) T'(x)\|) = 0.$$

4) Функция

$$b(x) = |q'|^2 |q|^{-5/2} + |q''| |q|^{-3/2} + |q'| |q|^{-3/2} \|T^{-1} T'\| + |q|^{-1/2} \|T^{-1} T'\|^2 + |q|^{-2} \|(T^{-1} T')'\|$$

принадлежит пространству  $L_1(0, \infty)$ .

Из условия 3) следует, что  $p_j^{(1)}(x) = o(p_j(x))$  при  $x \rightarrow \infty$ . Положим

$$\tilde{y}_k^\pm(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{p_k(x)}} \exp \left\{ \pm \lambda \int_{x_0}^x \sqrt{p_j(t)} dt + \int_{x_0}^x p_j^{(1)}(t) dt \right\}, \quad (27)$$

$$y_k^\pm(x, \lambda) = \tilde{y}_k^\pm(x, \lambda) [e_k(x) + \lambda^{-1} f_k^\pm(x, \lambda)]. \quad (28)$$

Пусть условия 1) — 4) выполнены; приведем условие, при котором для решений системы (23) справедлива двойная асимптотика (при  $x \rightarrow \infty$  и при  $\lambda \rightarrow +\infty$ ). Это условие сформулируем в двух вариантах. Обозначим

$$\mu_j(x) = \sqrt{p_j(x)}, \quad \mu_{n+j}(x) = -\sqrt{p_j(x)}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

$$S_{jk}(t, x) = \int_t^x [\mu_j(\tau) - \mu_k(\tau)] d\tau, \quad (29)$$

$$S_{jk}^{(1)}(t, x) = \int_t^x [p_j^{(1)}(\tau) - p_k^{(1)}(\tau)] d\tau.$$

$$5a) \text{Re } S_{jk}(0, +\infty) = \infty, \quad j \neq k,$$

$$\text{Re } [p_j^{(1)}(x) - p_k^{(1)}(x)] = o(\text{Re}(\mu_j(x) - \mu_k(x))), \quad x \rightarrow \infty.$$

$$5b) |\text{Re } S_{jk}(0, +\infty)| < \infty, \quad \sup_{t, x \geq 0} |\text{Re } S_{jk}^{(1)}(t, x)| < \infty.$$

Если при некотором  $k$  и при всех  $j \neq k$  выполнено одно из условий 5a), 5b), то система (23) имеет два решения  $y_k^\pm$  вида (28):

При этом для всякого  $\lambda_0 > 0$  существует  $x(\lambda_0) < \infty$  такое, что при  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $x(\lambda) \geq x(\lambda_0)$  справедливы оценки

$$\|f_j^\pm(x, \lambda)\| \leq \varphi(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0. \quad (30)$$

Если же эти условия выполнены при всех  $k$ , то система (23) имеет ФСР, состоящую из решений  $y_1^+, \dots, y_n^+, y_1^-, \dots, y_n^-$  вида (28). Кроме того,

$$\frac{d}{dx} y_k^\pm(x, \lambda) = \pm \lambda \sqrt{p_k(x)} \tilde{y}_k^\pm(x, \lambda) [e_k(x) + \lambda^{-1} f_{1k}^\pm(x, \lambda)],$$

где вектор-функции  $f_{1k}^\pm$  обладают теми же свойствами, что и  $f_j^\pm$ .

**З а м е ч а н и е.** Фиксируем  $\lambda > 0$ , и пусть при некотором  $k$  и при всех  $j \neq k$  функции

$$\operatorname{Re} [\mu_k(x) - \mu_j(x) + \mu_k^{(1)}(x) - \mu_j^{(1)}(x)]$$

не меняют знак при  $x \gg 1$ . Тогда система (23) имеет решения  $y_k^\pm$  вида (28), (30).

Рассмотрим матричное уравнение вида (23):

$$Y'' - \lambda^2 A(x) Y = 0, \quad (31)$$

где  $Y(x)$  —  $(n \times n)$ -матрица, и пусть выполнены сформулированные выше условия. Тогда всякое решение уравнения (31) представимо в виде

$$Y(x, \lambda) = Y^+(x, \lambda) C^+(\lambda) + Y^-(x, \lambda) C^-(\lambda),$$

где  $C^\pm(\lambda)$  — матрицы порядка  $n \times n$ ,

$$Y^\pm(x, \lambda) = T(x) [I + \lambda^{-1} U^\pm(x, \lambda)] \Lambda^{-1/4}(x) \times \\ \times \exp \left\{ \pm \lambda \int_{x_0}^x \Lambda(t) dt - \int_{x_0}^x \operatorname{diag} [T^{-1}(t) T'(t) dt] \right\}, \quad (32)$$

где  $U^\pm(x, \lambda)$  обладают теми же свойствами, что и  $f_j^\pm(x, \lambda)$  (см. (30)).

Аналогичная формула справедлива для производных  $\frac{d}{dx} Y^\pm(x, \lambda)$ ; в формуле (30) следует заменить матрицу  $\Lambda^{-1/4}(x)$  на матрицу  $\pm \lambda \Lambda^{1/4}(x)$  и матрицы  $U^\pm$  на матрицы  $U_1^\pm$  с теми же свойствами.

**3. Системы уравнений произвольного порядка.** Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$y^{(m)} - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{m-1} A_k(x) y^{(k)} = 0 \quad (33)$$

на полуоси  $x \geq 0$ , где  $\lambda > 0$  — параметр,  $A_k(x) \in C^2(\mathbf{R}^+)$  при всех  $k$ . Системе (33) отвечает матричный пучок

$$L(x, p) = p^m I - \sum_{k=0}^{m-1} p^k A_k(x).$$

Пусть  $p_j(x)$  — собственные значения пучка  $L$ , т. е. решения уравнения  $\det L(x, p) = 0$ . Будем предполагать, что все корни  $p_j(x)$  — простые, и введем базисы из правых и левых собственных векторов пучка  $\{e_1(x), \dots, e_{nm}(x)\}$ ,  $\{e_1^*(x), \dots, e_{nm}^*(x)\}$ , нормированные условиями

$$e_j^*(x) L_p(x, p_j(x)) e_j(x) = 1. \quad (34)$$

Введем функции

$$p_j^{(1)}(x) = - \left( e_j^* L_p e_j' + \frac{p_j'}{2} L_{pp} e_j \right), \quad (35)$$

где значения векторов  $e_j^*$ ,  $e_j$  берутся в точке  $x$ , значения производных  $L$  — в точке  $(x, p_j(x))$ . Пусть функция  $q(x)$  и матрица-функция  $Q(x)$  — такие же, как и в п. 1.1. Введем условия:

1)  $A_k(x) = q^{m-k}(x) Q(x) B_k(x) Q^{-1}(x)$ , пределы  $\lim_{x \rightarrow \infty} B_k(x) = B_k(+\infty)$  существуют и конечны.

2) Корни  $\eta_j$  уравнения

$$\det \left[ \eta^m I - \sum_{k=0}^{m-1} \eta^k B_k(\infty) \right] = 0$$

различны и отличны от нуля.

3) Условия 3), 4) из п. 1.1 выполнены, если заменить в них  $\|B(x)\|$  на  $\sum_{k=0}^{m-1} \|B_k(x)\|$ .

При  $m = 1$  эти условия совпадают с условиями п. 1.1. Пусть выполнены условия (8), (9) при некотором  $j$  и при всех  $k \neq j$  и  $\tilde{y}_j(x)$  определяется формулой (3). Тогда система (31) имеет решение  $y_j(x, \lambda)$  такое, что

$$y_j^{(s)}(x, \lambda) = \lambda^s p_j^s(x) \tilde{y}_j(x, \lambda) \left[ e_j(x) + \lambda^{-1} \sum_{l=1}^{nm} u_{jsl}(x, \lambda) e_l(x) \right], \quad 0 \leq s \leq m, \quad (36)$$

где функции  $u_{jsl}$  обладают теми же свойствами, что и функции  $u_{jk}$  в формуле (10).

4. Основные методы доказательства асимптотических формул для решений дифференциальных уравнений и систем. Асимптотическую формулу прежде всего необходимо угадать, и тут вряд ли можно сформулировать какие-либо общие принципы. После

того как формула найдена, ее доказательство в большинстве работ распадается на два этапа.

1. С помощью подходящего преобразования (замена переменной и неизвестных функций) уравнение (система) приводится к виду

$$(l_0 + l_1) y = 0,$$

где уравнение  $l_0 y = 0$  решается точно, а оператор  $l_1$  можно рассматривать как малое возмущение.

2. Уравнение  $l_0 y = -l_1 y$  решается как неоднородное уравнение с правой частью  $-l_1 y$  и исследуется возникающая при этом система интегральных уравнений.

Различные преобразования уравнений и систем встречались выше (гл. II, § 1; гл. IV, § 2; гл. V, §§ 1, 2, и т. д.). Приведем основные интегральные уравнения. Пусть имеется система из  $n$  уравнений

$$y' = [A_0(x) + A_1(x)] y, \quad (37)$$

причем система

$$z' = A_0(x) z$$

интегрируется. Обозначим через  $Y(x)$ ,  $Z(x)$  ФМ этих систем. Применяя метод вариации постоянных, получаем интегральное уравнение

$$Y(x) = Z(x) + \int_{\Gamma(x)} Z(x) Z^{-1}(t) A_1(t) Y(t) dt$$

для ФМ  $Y(x)$ . Здесь  $\Gamma(x)$  есть  $(n \times n)$ -матрица, элементы которой  $\gamma_{jk}(x)$  — интервалы вида  $(x_{jk}, x)$  (или кривые в комплексной плоскости  $x$ , соединяющие фиксированные точки  $x_{jk}$  и  $x$ ). Полагая

$$Y(x) = Z(x) W(x),$$

получаем основное интегральное уравнение

$$W = W_0 + KW, \quad (KW)(x) = \int_{\Gamma(x)} Z^{-1}(t) A_1(t) Z(t) W(t) dt. \quad (38)$$

Неопределенным остается выбор матрицы путей  $\Gamma(x)$ . Желательно выбрать ее так, чтобы к уравнению (38) был применим какой-либо принцип неподвижной точки. В этом случае удастся получить некоторую информацию о ФМ  $Y(x)$ .

Во многих случаях, в частности, рассмотренных в предыдущих главах, удастся построить асимптотику не ФМ, а лишь некоторых решений системы (37), и вместо матричного интегрального уравнения (38) использовать векторное интегральное уравнение. Получим это уравнение в случае, когда

$$A_0(x) = \Lambda(x) = \text{diag}(p_1(x), \dots, p_n(x)).$$

Введем обозначения

$$S_j(t, x) = \int_t^x p_j(\tau) d\tau, \quad S_{kj}(t, x) = S_k(t, x) - S_j(t, x),$$

$$\tilde{y}_j(x_0, x) = \exp \{S_j(x_0, x)\}, \quad y = \tilde{y}_j(x_0, x) w,$$

$$z = z_j(x_0, x) f_j,$$

где  $f_j$  — вектор-столбец с компонентами  $\delta_{jk}$ . Тогда для  $w$  получим интегральное уравнение

$$w = f_j + K_j(w), \quad (39)$$

где  $K_j$  — интегральный оператор:

$$(K_j w)_k = \int_{x_{kj}}^x \exp \{S_{kj}(t, x)\} [A_1(t) w(t)]_k dt.$$

Неопределенным остается выбор путей  $\gamma_{kj} = (x_{kj}, x)$ . Эти пути желательно выбрать так, чтобы в некотором банаховом пространстве  $B$  норма оператора  $K_j$  была малой:  $\|K_j\|_B \ll 1$ . Тогда для решения уравнения (39) получим оценку типа

$$\|w - f_j\|_B \leq c \|K_j\|_B.$$

Рассмотрим два простейших случая.

1) Пусть  $I = [a, b]$  — конечный отрезок,  $a < b$ ,  $\lambda > 0$  — большой параметр,

$$A_1(x) = \lambda^{-1} B(x), \quad \Lambda(x) = \lambda \operatorname{diag} (p_1(x), \dots, p_n(x)),$$

где функции  $p_j(x)$  и элементы матрицы  $B(x)$  принадлежат классу  $C(I)$ . В качестве  $B$  возьмем пространство вектор-функций  $w(x)$  с компонентами класса  $C(I)$  и с нормой  $\|w(x)\|_B = \max_{x \in I} |w(x)|$ .

Пусть при данном  $j$  все разности  $\varphi_{kj}(x) = \operatorname{Re} [p_k(x) - p_j(x)]$  не меняют знак. Положим

$$x_{kj} = b, \quad \text{если } \varphi_{kj}(x) \leq 0,$$

$$x_{kj} = a, \quad \text{если } \varphi_{kj}(x) \geq 0.$$

Тогда при  $t \in (x_{kj}, x)$  получим

$$\operatorname{Re} [\lambda S_{kj}(t, x)] \leq 0. \quad (40)$$

Следовательно,

$$|\exp \{\lambda S_{kj}(t, x)\}| \leq 1, \quad t \in \gamma_{kj}(x), \quad (41)$$

и потому  $\|K_j\|_B \leq c\lambda^{-1} \ll 1$  при  $\lambda \gg 1$ . В гл. II, § 7, было показано, что если функции  $\varphi_{kj}(x)$  могут менять знак, то для решений системы (37) не существует асимптотических формул, пригодных при  $\lambda \rightarrow +\infty$  на всем отрезке  $I$ .



2) Пусть  $I = [0, \infty)$ , матрицы  $A(x)$ ,  $A_1(x)$  удовлетворяют тем же условиям, что и в случае 1),  $\lambda = 1$  и  $\|B(x)\| \in L_1(0, \infty)$  (этот случай почти полностью совпадает с условиями теоремы Левинсона (гл. II, § 5)). Потребуем дополнительно, чтобы  $\lim_{x \rightarrow \infty} \|B(x)\| = 0$  и чтобы

$$\int_0^{\infty} \varphi_{kj}(x) dx = +\infty, \text{ если } \varphi_{kj}(x) \geq 0, \quad k \neq j.$$

Положим

$$x_{kj} = a, \quad \text{если } \varphi_{kj}(x) \leq 0, \quad (42a)$$

$$x_{kj} = \infty, \quad \text{если } \varphi_{kj}(x) \geq 0, \quad (42б)$$

где  $a > 0$  будет указано ниже. Тогда при  $t \in (x_{kj}, x)$  неравенства (40) выполняются. В качестве  $B$  возьмем пространство вектор-функций класса  $C(I)$ , ограниченных при  $x \in I$ , с той же нормой, что и в случае 1). Тогда

$$|(K_j w)_k(x)| \leq \|w\|_B \int_a^x \|B(t)\| dt,$$

$$|(K_j w)_k(x)| \leq \|w\|_B \int_x^{\infty} \|B(t)\| dt$$

при  $x \geq a$  соответственно в случаях (42a), (42б). Если  $a > 0$

таково, что  $\int_a^{\infty} \|B(t)\| dt < 1$ , то  $\|K_j\|_B < 1$  и к уравнению (37)

применим метод последовательных приближений.

Однако этого недостаточно для доказательства теоремы Левинсона: необходимо еще доказать, что  $(K_j w)(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , если  $w(x) \in B$ . Для компонента  $(K_j w)_k$  в случае (42б) это следует из условия  $B_1 \in L_1(0, \infty)$ . В случае (42a) воспользуемся более точной оценкой

$$|(K_j w)_k(x)| \leq \|w\|_B I_{jk}(x),$$

$$I_{jk}(x) = \int_a^x \exp \{ \operatorname{Re} S_{kj}(t, x) \} \|B(t)\| dt.$$

Применяя правило Лопиталья, получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I_{jk}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_a^x \exp \{ \operatorname{Re} S_{kj}(t, a) \} \|B(t)\| dt}{\exp \{ \operatorname{Re} S_{kj}(t, a) \}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \|B(x)\| = 0.$$

Из этих соотношений следует теорема Левинсона.

**З а м е ч а н и е.** Решение  $w_j$  интегрального уравнения (39) удовлетворяет краевым условиям:

$$\begin{aligned} w_{jk}(a) &= \delta_{jk} \quad \text{в случае (42а),} \\ w_{jk}(\infty) &= 0 \quad \text{в случае (42б).} \end{aligned}$$

Аналогичным краевым условиям в точках  $x = a$ ,  $x = b$  удовлетворяют решения системы с большим параметром  $\lambda$ . Для асимптотики решений этих систем имеют место явления типа пограничного слоя (гл. II, § 3, п. 3).

## § 5. Уравнения и системы в комплексной плоскости

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим уравнение  $n$ -го порядка

$$lw \equiv w^{(n)} + \lambda q_1(z) w^{(n-1)} + \dots + \lambda^n q_n(z) w = 0 \quad (1)$$

и систему из  $n$  уравнений

$$w' = \lambda A(z) w, \quad (2)$$

где  $\lambda > 0$  — параметр. Уравнению (1) и системе (2) отвечают характеристические уравнения

$$\begin{aligned} l(z, p) &\equiv p^n + q_1(z) p^{n-1} + \dots + q_n(z) = 0, \\ l(z, p) &= \det(A(z) - pI) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

корни которых обозначим  $p_1(z), \dots, p_n(z)$ .

Пусть  $D$  — односвязная область на комплексной плоскости  $z$ , возможно, неограниченная. Всюду в этом параграфе предполагается, что

1) коэффициенты уравнения (1) и системы (2) голоморфны в области  $D$ ;

2) корни  $p_1(z), \dots, p_n(z)$  различны при всех  $z \in D$ .

Таким образом, уравнения (1), (2) не имеют точек поворота в области  $D$ . Уравнения и системы с точками поворота будут рассмотрены в § 6. В этом параграфе исследуется асимптотика решений уравнений (1), (2) при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , а также при  $z \rightarrow \infty$ , если  $D$  — неограниченная область. Все асимптотические формулы точно такие же, как и в §§ 1—3, меняются лишь условия их применимости.

**2. Уравнения и системы в ограниченной области без точек поворота.**

**2.1. Асимптотическая диагонализация системы.** Пусть  $D$  — односвязная ограниченная область с кусочно-гладкой границей  $\partial D$  и условия 1), 2) выполнены в ее замыкании  $[D]$ . Тогда все корни  $p_1(z), \dots, p_n(z)$  голоморфны в  $[D]$ . Существует матрица-функция  $T(z)$ , голоморфная и невырожденная в  $[D]$ , которая приводит матрицу  $A(z)$  к диагональному виду

$$T^{-1}(z) A(z) T(z) = \text{diag}(p_1(z), \dots, p_n(z)).$$

Действительно, ранг матрицы  $B(z) = A(z) - p_1(z)I$  тождественно равен  $n - 1$  при  $z \in [D]$ . Пусть  $B_{11}(z), \dots, B_{1n}(z)$  — миноры, отвечающие элементам  $b_{11}(z), \dots, b_{1n}(z)$  матрицы  $B(z)$ . Не ограничивая общности, можно считать, что в некоторой точке  $z_0 \in D$  один из этих миноров отличен от нуля и потому в некоторой окрестности точки  $z_0$  вектор-функция  $\tilde{e}_1(z) = (B_{11}(z), \dots, B_{1n}(z))$  будет голоморфна и отлична от нуля. Вектор-функция  $\tilde{e}_1(z)$  может иметь лишь конечное число нулей  $z_1, \dots, z_N$  в  $[D]$ ; обозначим  $m_k$  минимальный порядок нулей ее компонент в точке  $z_k$ . Тогда вектор-функция  $e_1(z) = (z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_N)^{m_N} \tilde{e}_1(z)^T$  будет голоморфна и отлична от нуля в  $[D]$ . Точно так же строятся остальные первые собственные векторы  $e_2(z), \dots, e_n(z)$  матрицы  $A(z)$ . Матрицы функции  $T(z), T^{-1}(z)$  и все их производные ограничены в  $[D]$ .

**З а м е ч а н и е.** Если условия 1), 2) выполняются в открытой области  $D$ , то по-прежнему можно построить голоморфную и невырожденную в  $D$  матрицу-функцию  $T(z)$ , приводящую матрицу  $A(z)$  к диагональному виду. Однако ее производные или производные матрицы-функции  $T^{-1}(z)$  могут быть неограниченными в  $D$ .

Из рассуждений, проведенных в п. 1.3 § 1, следует существование матриц-функций  $T_1(z), T_2(z), \dots, T_{N-1}(z)$  и диагональных матриц-функций  $\Lambda_0(z), \dots, \Lambda_{N-1}(z)$  таких, что преобразование

$$w = T(z) \left[ I + \sum_{k=0}^{N-1} \lambda^{-k} T_k(z) \right] u$$

приводит систему (2) к диагональному виду

$$u' = [\lambda \Lambda_0(z) + \Lambda_1(z) + \dots + \lambda^{-N+1} \Lambda_{N-1}(z) + \lambda^{-N} B_N(z, \lambda)] u$$

с точностью до  $O(\lambda^{-N})$ . Здесь  $N \geq 1$  — любое, все указанные матрицы-функции голоморфны в  $[D]$ ,

$$\Lambda_0(z) = \Lambda(z), \quad \|B_N(z, \lambda)\| \leq c_N, \quad z \in [D], \quad \lambda \geq 1,$$

$$\Lambda_1(z) = -\text{diag} \left( T^{-1}(z) \frac{d}{dz} T(z) \right).$$

То же самое имеет место для системы первого порядка, эквивалентной уравнению (1).

**2.2. К а н о н и ч е с к и е п у т и и д о п у с т и м ы е о б л а с т и.** Введем стандартные для данной главы обозначения

$$S_j(z_0, z) = \int_{z_0}^z p_j(t) dt, \quad S_{jk}(z_0, z) = \int_{z_0}^z [p_j(t) - p_k(t)] dt. \quad (4)$$

Все интегралы берутся по путям, лежащим в  $[D]$ . Пусть кривая  $\gamma_{jk}(a, b)$  соединяет точки  $a, b$  и функция  $\text{Re } S_{jk}(a, z)$  не убывает при движении  $z$  от  $a$  к  $b$  вдоль этой кривой. Тогда кривая  $\gamma_{jk}$  называется *каноническим путем* (ср. гл. III, § 1). *Каноническим вектор-*

путем  $\gamma_j(b_j, z_0)$ ,  $b_j = (b_{j1}, \dots, b_{jn})$ , с концом в точке  $z_0$  называется вектор, компоненты которого — канонические пути  $\gamma_{jk}(b_{jk}, z_0)$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Матрицей (или звездой) канонических путей  $\Gamma(b, z_0)$  с концом в точке  $z_0$  назовем матрицу, столбцы которой — канонические вектор-пути  $\gamma_1(b_1, z_0), \dots, \gamma_n(b_n, z_0)$ ,  $B = (b_1, \dots, b_n)$ . Введем два типа допустимых областей.

1)  $j$ -допустимая область  $D$ : существуют точки  $b_1, \dots, b_n \in \partial G$  такие, что для каждой точки  $z \in [D]$  существует канонический вектор-путь  $\gamma_j(b, z)$ .

2) Допустимая область  $D$ : для любого  $j = 1, \dots, n$  область  $D$  является  $j$ -допустимой областью.

2.3. А с и м п т о т и к а р е ш е н и й. Пусть  $D$  есть  $j$ -допустимая область. Тогда для любого целого  $N \geq 1$  существуют решения  $w_j$  уравнения (1) и системы (2) вида

$$w_j(z, \lambda) = \exp \{ \lambda S_j(z_0, z) + S_j^{(1)}(z_0, z) \} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-k} a_{jk}(z) + O(\lambda^{-N}) \right], \quad (5)$$

$$w_j(z, \lambda) = \exp \{ \lambda S_j(z_0, z) + S_j^{(1)}(z_0, z) \} \left[ e_j(z) + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-k} e_{jk}(z) + O(\lambda^{-N}) \right],$$

$\lambda \rightarrow +\infty. \quad (6)$

Коэффициенты этих АР совпадают соответственно с коэффициентами АР (7) § 1 и (14) § 2 и голоморфны в  $[D]$ ,  $z_0 \in [D]$  — произвольная точка. Остаточный член в формуле (5) есть функция  $\lambda^{-N} \varphi(z, \lambda)$  класса  $C^\infty$  при  $z \in [D]$ ,  $\lambda \geq 1$ , голоморфная по  $z \in [D]$  при каждом фиксированном  $\lambda \geq 1$ , и  $|\varphi(z, \lambda)| \leq c$  при  $z \in [D]$ ,  $\lambda \geq 1$ . Аналогичный вид имеет остаточный член в формуле (6). АР (5), (6) можно дифференцировать по  $z$ ,  $\lambda$  любое число раз, с сохранением равномерной по  $z \in [D]$  оценки остаточного члена.

Доказательство АР (5), (6) немедленно следует из рассуждений, приведенных в § 4, п. 4, так как

$$|\exp \{ \lambda S_{kj}(t, z) \}| \leq 1,$$

если точка  $t$  лежит на каноническом пути  $\gamma_{jk}(b_{jk}, z)$ .

Если  $D$  — каноническая область, то уравнение (1) и система (2) имеют ФСР, состоящие из решений вида (5), (6). При этом ФМ системы (2) имеет вид

$$W(z, \lambda) = T(z) [I + O(\lambda^{-1})] \exp \left\{ \lambda \int_{z_0}^z \Lambda(t) dt + \int_{z_0}^z \Lambda_1(t) dt \right\}. \quad (7)$$

Отметим один важный частный случай. Пусть матрица-функция  $A(z)$  голоморфна в точке  $z_0$  и собственные значения  $p_1(z), \dots, p_n(z)$  различны. Тогда существует окрестность  $D$  точки  $z_0$ , которая является допустимой областью.

**З а м е ч а н и е.** В этом случае не налагается никаких ограничений на функции  $\operatorname{Re} (p_j(z) - p_k(z))$ , в отличие от неаналитического случая (ср. гл. II, § 7).

Приведенные выше результаты очевидным образом переносятся на системы вида

$$w' = \lambda A(z, \lambda^{-1}) w,$$

где матрица-функция  $A(z, \varepsilon)$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $A(z, \varepsilon) \in C^\infty([D] \times I)$ ,  $I = [0, \varepsilon_0]$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ .
- 2) При каждом фиксированном  $\varepsilon \in I$  матрица  $A(z, \varepsilon)$  голоморфна в  $[D]$ .
- 3) При  $\varepsilon \rightarrow +0$  справедливо асимптотическое разложение

$$A(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(z),$$

равномерное по  $z \in [D]$ .

4) Собственные значения матрицы  $A_0(z)$  различны при всех  $z \in [D]$ .

**2.4. Ф о р м у л ы с в я з и.** Пусть  $W(z, \lambda)$  — ФМ системы (2) и  $w_j(z, \lambda)$  — некоторое решение этой системы. Тогда

$$w_j(z, \lambda) = W(z, \lambda) \omega_j(\lambda),$$

где  $n$ -вектор  $\omega_j(\lambda)$  не зависит от  $z$ . Пусть  $M$  — связное компактное множество на комплексной плоскости  $z$  такое, что дополнение к  $M$  не содержит ограниченных областей. Типичный пример, который понадобится в дальнейшем, таков:  $M = [D] \cup l_1 \cup l_2$ , где  $D$  — ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей,  $l_1, l_2$  — конечные простые кусочно-гладкие кривые. Концы этих кривых лежат на  $\partial D$ , они не пересекаются и не имеют других общих точек с  $[D]$ .

Пусть матрица-функция  $A(z)$  голоморфна и не имеет точек поворота при  $z \in M$  и при  $\lambda \rightarrow +\infty$  для решения  $w_j$  и ФМ  $W$  справедливы асимптотические формулы (5), (7), равномерные по  $z \in M$ . Тогда

$$\begin{aligned} \omega_{jj}(\lambda) &= 1 + O(\lambda^{-1}), & \omega_{jk}(\lambda) &= O(\lambda^{-1} e^{\lambda a_{jk}}), & j \neq k, & (8) \\ a_{jk} &= \min_{z \in M} \operatorname{Re} S_{jk}(z_0, z) < 0. \end{aligned}$$

Пусть  $W_1(z, \lambda)$ ,  $W_2(z, \lambda)$  — где ФМ системы (2); тогда

$$W_2(z, \lambda) = W_1(z, \lambda) \Omega(\lambda),$$

где матрица перехода  $\Omega(\lambda)$  не зависит от  $z$ . Если для обеих ФМ  $W_1, W_2$  справедливы АР вида (7), то

$$\Omega(\lambda) = I + \operatorname{diag} O(\lambda^{-1}) + O(e^{-c\lambda}), \quad c > 0, \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

### 3. Структура допустимых областей.

3.1. Локальная структура точек поворота и линий Стокса. Пусть  $z_0$  — точка поворота,  $U$  — круг  $|z - z_0| \leq r$  достаточно малого радиуса  $r > 0$ . Всякий корень  $p_j(z)$  разлагается в ряд

$$p_j(z) = p_j(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk}(z - z_0)^{k p_j / q_j},$$

сходящийся в  $U$ , где  $p_j \geq 1$ ,  $q_j \geq 1$  — взаимно простые целые числа. Если  $q_j = 1$ , то функция  $p_j(z)$  голоморфна в  $U$ ; если  $q_j \geq 2$ , то  $z_0$  — точка ветвления порядка  $q_j$  функции  $p_j(z)$ . В области  $U$  характеристический полином разлагается на неприводимые множители  $l(z, p) = l_1^{m_1}(z, p) \dots l_N^{m_N}(z, p)$ ,  $l_j(z, p) \neq \text{const}$ , где  $m_1, \dots, m_N$  — целые положительные числа,  $l_1(z, p), \dots, l_N(z, p)$  — попарно различные полиномы от  $p$  с коэффициентами, которые являются голоморфными в  $U$  функциями. Каждый из полиномов  $l_j(z, p)$  неприводим,

$$l_j(z, p) = p^{n_j} + a_{j1}(z) p^{n_j-1} + \dots$$

Если  $n_j = 1$ , то корень  $p_j(z)$  уравнения  $l_j(z, p) = 0$  есть голоморфная в  $U$  функция. Если  $n_j \geq 2$ , то корни уравнения  $l_j(z, p)$  разлагаются в ряды Пуизе

$$p(z) = p(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk}(z - z_0)^{k q_j / n_j}, \quad (10)$$

сходящиеся в  $U$ , где  $q_j \geq 1$  — целое число, взаимно простое с  $n_j$ . Поэтому  $z_0$  — точка ветвления порядка  $n_j$  для каждого из корней.

Для уравнения второго порядка возможны только два варианта.

1) Полином  $l(z, p) = p^2 + a(z)p + b(z)$  неприводим. Тогда  $z_0$  — точка ветвления второго порядка для корней  $p_1(z), p_2(z)$ .

2) Полином  $l(z, p)$  приводим. Тогда  $l(z, p) = (p - p_1(z))(p - p_2(z))$ , функции  $p_1(z), p_2(z)$  голоморфны в  $U$ .

Для уравнения  $n$ -го порядка в точке поворота  $z_0$  могут совпадать корни, для которых  $z_0$  является либо точкой аналитичности, либо точкой ветвления любого целого порядка.

Пусть  $p_j(z_0) = p_k(z_0)$ ,  $j \neq k$ . Линия уровня

$$\text{Re} \int_{z_0}^z [p_j(t) - p_k(t)] dt = 0,$$

выходящая из точки  $z_0$ , называется *линией Стокса* (ЛС). В силу (10) существует целое число  $r \geq 1$  такое, что точка  $z_0$  есть точка ветвления порядка  $r$  функции  $p_j(z) - p_k(z)$ . Тогда

$$p_j(z) - p_k(z) \sim a(z - z_0)^{q/r}, \quad z \rightarrow z_0,$$

где  $a \neq 0$ ,  $q \geq 1$  — целое число, и из точки  $z_0$  выходит не больше  $2(p+q)$  ЛС.

**З а м е ч а н и е.** Правильнее рассматривать ЛС не на плоскости  $z$ , а на римановой поверхности  $\bar{U}$  алгеброидной функции  $\bar{p}(z)$ , которая определяется уравнением

$$\bar{l}(z, \bar{p}) \equiv \prod_{j \neq k} [\bar{p} - (p_j(z) - p_k(z))] = 0. \quad (11)$$

Полином  $\bar{l}$  строится следующим образом. Фиксируем точку  $z_1 \in U$ ,  $z_1 \neq z_0$ ; тогда в малой односвязной окрестности  $V$  точки  $z_1$  уравнение (3) имеет  $n$  различных корней  $p_1(z), \dots, p_n(z)$ , которые голоморфны в области  $V$ . Тем самым полином  $\bar{l}$  определен в области  $V$ ,

$$\bar{l}(z, p) = p^n + b_1(z)p^{n-1} + \dots + b_n(z),$$

функции  $b_1(z), \dots, b_n(z)$  голоморфны при  $z \in V$ . Пусть  $\gamma$  — окружность  $|z - z_0| = |z - z_1|$  с началом и концом в точке  $z_1$ ; тогда при обходе вокруг точки  $z_0$  вдоль  $\gamma$   $p_j(z) \rightarrow p_{s_j}(z)$ , причем множество  $\{s_1, \dots, s_n\}$  совпадает с множеством  $\{1, \dots, n\}$ . Отсюда следует, что коэффициенты полинома  $\bar{l}$  голоморфны в области  $U$  и уравнение (11) определяет многозначную алгеброидную функцию  $\bar{p}(z)$ . ЛС — кривая  $\gamma: \operatorname{Re} \int_{\xi_0}^z \bar{p}(t) dt = 0$ , где  $\xi_0 \in \bar{U}$  и проецируется в точку  $z_0$ , кривая  $\gamma$  лежит на  $\bar{U}$ . ЛС, лежащие на  $\bar{U}$ , различны, а их проекции на  $U$  могут совпадать.

**П р и м е р ы 1.** Пусть  $l(z, p) = p^n - i^n z^m$ , где  $m, n$  — взаимно простые числа; тогда полином  $l$  неприводим и ЛС — лучи

$$l_k: \arg = \frac{nk\pi}{m+n}, \quad k = 0, 1, \dots$$

2. Пусть  $l(z, p) = (p^2 - z)(p^3 - z)$ ; тогда

$$\begin{aligned} \bar{l}(z, p) &= (p^2 - z)(p^3 - 3\sqrt{3}z^2)(p^3 + 3\sqrt{3}z^2) \times \\ &\times [(p^2 - z)^3 - z^3] [(p^2 - z)^3 + z^3]. \end{aligned}$$

Риманова поверхность  $\bar{U}$  состоит из одной двулистной, двух трехлистных и двух шестилистных поверхностей.

**3.2. Д о п у с т и м ы е о б л а с т и.** Пусть  $D$  — ограниченная односвязная область в комплексной плоскости  $z$ , граница которой  $\partial D$  состоит из конечного числа простых аналитических кривых, функция  $f(z)$  голоморфна в  $D$  и непрерывна в  $[D]$ . Область  $D$  называется *допустимой* (для функции  $f(z)$ ), если существует точка  $a \in \partial D$  такая, что любую точку  $z_0 \in [D]$  можно соединить с точкой  $a$  кривой  $\gamma$ , вдоль которой функция  $u = \operatorname{Re} f(z)$  не убывает (при движении от  $a$  к  $z_0$  вдоль  $\gamma$ ).

В работе [81] получены необходимые и достаточные условия того, что область  $D$  — допустимая. Ограничимся ее формулировкой в простейшем случае, когда на  $\partial D$  имеются только изолированные точки минимума и седловые точки функции  $u(z)$ . Точка  $z_0 \in \partial D$  называется *седловой*, если выполнены условия:

- 1) в области  $D$  имеются две или более линий уровня  $\gamma_1, \dots, \dots, \gamma_k$ , на которых  $u(z) = u(z_0)$ , с концами в точке  $z_0$ ;
- 2) имеется не менее двух секторов с вершиной в точке  $z_0$ , которые ограничены кривыми  $\gamma_j$  и дугами границы  $\partial D$ , в которых  $u(z) < u(z_0)$ .

В этом определении области бóльших значений  $u(z) > u(z_0)$  и меньших значений  $u(z) < u(z_0)$  неравноправны.

Любое из сформулированных ниже условий необходимо и достаточно для того, чтобы область  $D$  была допустимой.

А. На границе области  $D$  нет седловых точек.

Б. На границе области  $D$  есть ровно одна точка минимума.

Эти условия эквивалентны. В [81] этот результат доказан в общем случае.

Между уравнениями порядка 2 и порядка больше 2 имеется существенное различие. Пусть коэффициенты этих уравнений — полиномы от  $z$ , для простоты. Область  $D$  является допустимой для уравнения

$$w'' - \lambda^2 q(z) w = 0, \quad (12)$$

если она является допустимой для одной функции  $f(z) = \int^z \sqrt{q(t)} dt$  при подходящем выборе ветви корня. Для уравнения  $n$ -го порядка эта область является допустимой, если она является допустимой для набора из  $n(n-1)$  функций

$$f_{jk}(z) = \int^z [p_j(t) - p_k(t)] dt, \quad 1 \leq j, k \leq n, \quad j \neq k.$$

В гл. III, § 3, п. 2, было показано, что если нет кратных точек поворота и конечных ЛС, то для уравнения (12) допустимой областью является вся комплексная плоскость  $z$  с конечным числом разрезов вдоль некоторых ЛС. По-видимому, аналогичный факт неверен уже для уравнений третьего порядка, даже с асимптотически простыми на бесконечности корнями. Это связано с тем, что ЛС на плоскости  $z$  могут пересекаться.

П р и м е р. Уравнение

$$w''' - 3\lambda w' + \lambda^3 z w = 0$$

имеет две точки поворота:  $z_1 = -2$ ,  $z_2 = 2$ . ЛС в этом случае пересекаются (рис. 24). Кроме того, для уравнения (12) точка  $z = \infty$  — иррегулярная особая, а для уравнения (2) эта точка может быть наложением регулярных и иррегулярных<sup>1</sup> особых точек, неособых точек и точек поворота.



4. Уравнения и системы в неограниченных областях. Пусть  $D$  — неограниченная односвязная область в комплексной плоскости  $z$ . Определения канонических путей,  $j$ -допустимых и допустимых областей (п. 2.2) полностью переносятся на случай неограниченных областей, с той лишь разницей, что одним из концов канонического пути может быть точка  $z = \infty$ .

4.1. Уравнения и системы без параметра. Будем считать для простоты, что  $\partial D$  состоит из одной связной компоненты. Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$w' = A(z)w, \quad (13)$$

где матрица-функция  $A(z)$  голоморфна при  $z \in [D] = D \cup \partial D$  и удовлетворяет условиям, аналогичным тем, которые приведены в § 4, п. 1.1:

$$\begin{aligned} 1) \quad & A(z) = q(z)Q^{-1}(z)B(z)Q(z), \\ & Q(z) = \text{diag}(q^{\alpha_1}(z), \dots, q^{\alpha_n}(z)), \end{aligned}$$

где функция  $q(z)$  и матрица-функция  $B(z)$  голоморфны при  $z \in [D]$ ,  $q(z) \neq 0$ .

2) Существует конечный предел  $\lim_{z \rightarrow \infty} B(z) = B(\infty)$ , собственные значения  $\eta_j$  матрицы  $B(\infty)$  различны и отличны от нуля.

$$3) \quad \lim_{z \rightarrow \infty, z \in [D]} r_1(z) = 0,$$

$$r_1(z) = |q'(z)| |q(z)|^{-2} + |q(z)|^{-1} \|B'(z)\|.$$

Собственные значения матрицы  $A(z)$  имеют вид

$$p_j(z) = [\eta_j + o(1)] q(z), \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in [D].$$

4) Область  $[D]$  является  $j$ -допустимой.

Пусть  $r_2(z)$  — функция, введенная в § 4, п. 1.1. В условии 4) из этого пункта требуется, чтобы сходилась интеграл от функции  $r_2(x)$  по полуоси  $[0, \infty)$ . Для системы (13) в комплексной плоскости требуется сходимость интегралов от функции  $r_2(z)$  по каноническим путям  $\gamma_{jk}(z)$ . Введем функции

$$\rho_{jk}(z) = \inf_{\gamma_{jk}(z)} \int |r_2(t)| |dt|,$$

где нижняя грань берется по всем каноническим путям, соединяющим точки  $z_{jk}$ ,  $z$ , и введем условие:

$$5) \quad \sup_{z \in [D]} \rho_{jk}(z) < \infty \text{ при всех } k = 1, \dots, n.$$

Тогда система (13) имеет решение вида

$$\begin{aligned} w_j(z) = \exp \left\{ \int_{z_0}^z [p_j(t) + p_j^{(1)}(t)] dt \right\} \left[ e_j(z) + \sum_{k=1}^n u_{jk}(z) e_k(z) \right], \\ |u_{jk}(z)| \leq k_j(z), \quad \lim_{z \rightarrow \infty, z \in [D]} k_j(z) = 0. \end{aligned}$$

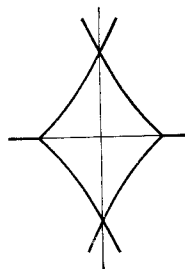


Рис. 24.

Если  $D$  — допустимая область и условие 5) выполнено при всех  $j$ , то система (13) имеет ФМ вида (5) § 4, где

$$\|U(z)\| \leq k(z), \quad \lim_{z \rightarrow \infty, z \in [D]} k(z) = 0.$$

Точно так же формулируются условия, при которых справедливы асимптотические формулы (15), (35), (45) из § 3 и (28), (36) из § 4 при  $z \rightarrow \infty, z \in D$ .

4.2. Двойные асимптотики. Рассмотрим систему (2) при условиях 1) — 5) из п. 2.1, и пусть выполнены условия:

$$6) \quad \lim_{z \rightarrow \infty, z \in [D]} \operatorname{Re} \int_{z_0}^z [p_j(t) - p_k(t)] dt = \infty$$

при всех  $k \neq j$ .

$$7) \quad \left| \operatorname{Re} \int_{z_0}^z [p_j(t) - p_k(t)] dt \right| \geq c \left| \operatorname{Re} \int_{z_0}^z [p_j^{(1)}(t) - p_k^{(1)}(t)] dt \right|, \\ z \in [D], \quad |z| \geq 1,$$

при всех  $k \neq j$ .

Тогда система (2) имеет решения вида

$$w_j(z, \lambda) = \exp \left\{ \lambda \int_{z_0}^z p_j(t) dt + \int_{z_0}^z p_j^{(1)}(t) dt \right\} \times \\ \times \left[ e_j(z) + \lambda^{-1} \sum_{k=1}^n u_{jk}(z, \lambda) e_k(z) \right],$$

где при  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$

$$|u_{jk}(z, \lambda)| \leq k_j(z), \quad \lim_{z \rightarrow \infty, z \in [D]} k_j(z) = 0.$$

Точно так же формулируются условия, при которых справедливы двойные асимптотики, приведенные в §§ 3, 4 для полусоси  $x \geq 0$ .

4.3. Уравнение (1) с полиномиальными коэффициентами. В этом случае корни характеристического уравнения разлагаются в ряды Пуизе, сходящиеся при  $|z| \geq R \geq 1$ :

$$p_j(z) = z^{q_j/r_j} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} z^{-kq_j/r_j},$$

где  $q_j, r_j$  — взаимно простые целые числа,  $r_j \geq 1$ . В работе [85] рассмотрен следующий случай:

1) Степень  $m \geq 1$  полинома  $q_n(z)$  не меньше степеней полиномов  $q_1(z), \dots, q_{n-1}(z)$ .

2) Корни  $p_j(z)$  — асимптотически некратные (§ 3).

Из условия 1) следует, что  $a_{j_0} \neq 0$ ,  $q_j \geq 0$  при всех  $j$ , и можно ввести такую нумерацию, что

$$0 \leq q_1/r_1 \leq q_2/r_2 \leq \dots \leq q_n/r_n.$$

Пусть  $l$  — луч  $\arg z = \varphi_0$  в комплексной плоскости  $z$  такой, что все разности  $\operatorname{Re} [p_j(z) - p_k(z)]$ ,  $1 \leq j, k \leq n$ , не меняют знак при  $z \in l$ ,  $|z| \geq 1$ . Тогда существует сектор  $S$ :  $\varphi_0 - \delta \leq \arg z \leq \varphi_0 + \delta$  такой, что уравнение (1) имеет решение вида

$$w_j(z, \lambda) = z^\nu \exp \left\{ \lambda \int_{z_0}^z p_j(t) dt \right\} \left[ \sum_{k=0}^N \lambda^{-k} u_{jk}(z) + \lambda^{-N-1} R_{jN}(z, \lambda) \right],$$

где  $\nu$  — рациональное число,  $N \geq 1$  — любое. Функции  $u_{jk}(z)$  голоморфны при  $z \in S$ , и если выбрать  $\lambda_0 > 0$ ,  $R > 0$  достаточно большими, то

$$|R_{jN}(z, \lambda)| \leq c_N |z|^{-(N+1)(1+q_1/r_1)}, \quad \lambda \geq \lambda_0, \quad |z| \geq R.$$

Функции  $u_{jk}(z)$  имеют порядок  $O(|z|^{-j(1+q_1/r_1)})$  при  $z \rightarrow \infty$ ,  $z \in S$ . Размеры сектора  $S$  более точно указаны в [85].

**З а м е ч а н и е.** Главный член асимптотики дается формулой (24) § 3. В [85] приведены более сложные формулы для  $\nu$  и  $u_{j_0}(z)$ .

## § 6. Точки поворота

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$\varepsilon y' = A(x, \varepsilon) y \quad (1)$$

и уравнение  $n$ -го порядка

$$ly \equiv \varepsilon^n y^{(n)} + \sum_{j=1}^n \varepsilon^{n-j} q_j(x, \varepsilon) y^{(n-j)} = 0, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр. Введем обозначения

$$\begin{aligned} l(x, p; \varepsilon) &= \det [A(x, \varepsilon) - pI], \\ l(x, p; \varepsilon) &= p^n + \sum_{j=1}^n q_j(x, \varepsilon) p^{n-j} \end{aligned} \quad (3)$$

соответственно для системы (1) и уравнения (2). Имеются два определения точки поворота.

1. Точка  $x_0$  называется *точкой поворота* системы (1) или уравнения (2), если уравнение  $l(x_0, p; 0) = 0$  имеет кратный корень.

В этом случае матрица  $A(x_0, 0)$  имеет кратное собственное значение. Точка поворота находится путем исключения  $p$  из системы

$$l(x, p; 0) = 0, \quad l_p(x, p; 0) = 0.$$

2. Точка  $x_0 = x_0(\varepsilon)$  называется *точкой поворота* системы (1) или уравнения (2), если уравнение  $l(x_0(\varepsilon), p; \varepsilon) = 0$  имеет кратный корень.

Очевидно, что эти определения не эквивалентны. Например, уравнение

$$\varepsilon^2 y'' - (x^n - \varepsilon) y = 0,$$

где  $n \geq 2$  — целое число, имеет единственную точку поворота  $x_0 = 0$  согласно определению 1 и  $n$  точек поворота  $x_j(\varepsilon) = \sqrt[n]{\varepsilon}$  согласно определению 2. Как правило, мы будем пользоваться первым определением.

Одна из основных задач асимптотической теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений — построение асимптотики ФСР системы (1) и уравнения (2) в окрестности точки поворота. Эта проблема является крайне сложной. Даже в случае аналитических по  $x$  и по  $\varepsilon$  коэффициентов в общем случае неизвестно, как построить формальные асимптотические решения, не говоря уже о строгих доказательствах.

В этом параграфе рассмотрены простейшие типы точек поворота. Всюду в дальнейшем предполагается, что выполнено одно из условий.

**С.** Матрица-функция  $A(x, \varepsilon)$  бесконечно дифференцируема при  $|x - x_0| \leq a$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , где  $a > 0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ .

**А.** Матрица-функция  $A(x, \varepsilon)$  голоморфна по совокупности переменных  $x, \varepsilon$  при  $x \in [D]$ ,  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $D$  — ограниченная односвязная область в комплексной плоскости  $x$  с кусочно-гладкой границей.

**2. Простая точка поворота.** К этому типу относятся такие точки поворота, в окрестности которых ФСР уравнения или системы выражается через функции Эйри.

**2.1. Структура корней.** Рассмотрим скалярное уравнение (2) при условии С. Точка поворота  $x_0$  называется *простой*, если выполнены условия:

1) Уравнение  $l(x_0, p; 0) = 0$  имеет один двукратный корень  $p_0$ , остальные корни простые.

2)  $l_x(x_0, p_0; 0) \neq 0$ .

Будем считать для определенности, что  $p_1(x_0, 0) = p_2(x_0, 0) = p_0$ ; тогда значения  $p_3(x_0, 0) = p_3^0, \dots, p_n(x_0, 0) = p_n^0$  различны и не равны  $p_0$ . Пусть  $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ ,  $J = [0, \varepsilon_0]$ , где  $a > 0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  и  $\varepsilon_0 \leq 1$ . Если на отрезке  $I$  нет других точек поворота, то  $p_j(x, \varepsilon) \in C^\infty(I \times J)$  при  $3 \leq j \leq n$ . Символ  $l$  представим в виде

$$l(x, p; \varepsilon) = (p^2 - 2\alpha(x, \varepsilon)p + \beta(x, \varepsilon)) \times \\ \times (p - p_3(x, \varepsilon)) \dots (p - p_n(x, \varepsilon)), \quad (4)$$

где  $\alpha, \beta \in C^\infty(I \times J)$ , так что

$$\begin{aligned} p_{1,2}(x, \varepsilon) &= \alpha(x, \varepsilon) \pm \sqrt{D(x, \varepsilon)}, \quad D = \alpha^2 - \beta, \\ D(x_0, 0) &= 0, \quad D'_x(x_0, 0) \neq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

При условии А функции  $\alpha(x, \varepsilon)$ ,  $\beta(x, \varepsilon)$ ,  $p_3(x, \varepsilon), \dots, p_n(x, \varepsilon)$  голоморфны в комплексной окрестности точки  $(x = x_0, \varepsilon = 0)$  и для корней  $p_1(x, 0)$ ,  $p_2(x, 0)$  точка  $x = x_0$  является точкой ветвления второго порядка.

Рассмотрим систему (1). Не ограничивая общности, можно считать, что матрица  $A(0, 0)$  приведена к жордановой нормальной форме. Точка поворота  $x_0$  системы (1) называется *простой*, если выполнены условия 1), 2) и если ее нормальная форма содержит один жорданов блок второго порядка:

$$A(0, 0) = \begin{bmatrix} p_0 & 1 & & 0 \\ & p_0 & & \\ & & p_3^0 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & p_n^0 \end{bmatrix}, \quad p_j^0 = p_j(x_0, 0).$$

Если  $x_0$  — простая точка поворота, то выполняются соотношения

$$\begin{aligned} l(x_0, p_j^0; 0) &= 0, \quad l_p(x_0, p_j^0; 0) \neq 0, \quad j = 3, \dots, n, \\ l(x_0, p_0; 0) &= l_p(x_0, p_0; 0) = 0, \\ l_{pp}(x_0, p_0; 0) &\neq 0, \quad l_x(x_0, p_0; 0) \neq 0. \end{aligned}$$

Пусть  $x_0$  — простая точка поворота системы (1) или уравнения (2) в смысле определения 1. Тогда при малых  $\varepsilon$  существует единственная точка поворота  $x_0 = x_0(\varepsilon)$  в смысле определения 2, т. е. уравнение

$$l(x_0(\varepsilon), p; \varepsilon) = 0$$

имеет кратный корень  $p_0(\varepsilon)$  при любом достаточно малом  $\varepsilon$ . При этом  $x_0(\varepsilon), p_0(\varepsilon) \in C^\infty(J)$ ,  $x_0(0) = x_0$ ,  $p_0(0) = p_0$ . Простая точка поворота устойчива относительно малых возмущений коэффициентов.

2.2. Формальные асимптотические решения уравнения (2). Уравнение (2) имеет ФАР  $y_3(x, \varepsilon), \dots, y_n(x, \varepsilon)$  вида (5) § 1. Пусть  $x_0 = 0$ , функция  $D(x)$  вещественна и  $D'(0) > 0$  для определенности; тогда  $D(x) > 0$  при  $x > 0$ ,  $D(x) < 0$  при  $x < 0$ . Рассмотрим вначале случай, когда коэффициенты уравнения (2) не зависят от  $\varepsilon$ . Будем искать недостающие ФАР уравнения (2) в виде

$$y_0(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-1/6} [Av(-\varepsilon^{-2/3}\xi) + i\varepsilon^{1/3}v'(-\varepsilon^{-2/3}\xi)] \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(t) dt\right\},$$

$$a(x) = \frac{1}{2}(p_1(x) + p_2(x)), \quad (6)$$

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \varepsilon^k, \quad B = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \varepsilon^k,$$

где  $v$  — функция Эйри — Фока (гл. IV, § 1).

Можно поступать так же, как и в § 1 гл. IV: подставить ФАР (6) в уравнение (2) и затем получить рекуррентные соотношения для функций  $A_j(x)$ ,  $B_j(x)$ . Однако проще поступить по-другому, используя следующие факты:

1. ФАР вида (6) существует.

2. Если  $x$  таково, что  $\varepsilon^{2/3} |\xi(x)| \gg 1$ , то уравнение (2) имеет ФАР  $\tilde{y}_{1,2}(x, \varepsilon)$  вида (5) § 1.

Одно из этих ФАР при  $x \leq -\delta < 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(x, \varepsilon) &= \\ &= \exp \left\{ \varepsilon^{-1} \int_0^x a(t) dt + \varepsilon^{-1} \int_0^x \sqrt{D(t)} dt + \int_0^x \varphi(t) dt \right\} \left[ 1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \varepsilon^k \right], \\ \varphi(x) &= \sum_{k=2}^n \frac{p'_k(x)}{p_k(x) - p_1(x)}. \end{aligned}$$

Решение  $\tilde{y}_2$  получается из  $\tilde{y}_1$  заменой  $\sqrt{D}$  на  $-\sqrt{D}$  и  $p_1$  на  $p_2$  в формуле для  $\varphi$ . Преобразуем  $\varphi(x)$ :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{D'(x)}{4D(x)} + \varphi_1(x) + \frac{\varphi_2(x)}{\sqrt{D(x)}}, \\ \varphi_1(x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{2a'(x)p_k(x) + D'(x)}{(p_k(x) - a(x))^2 - D(x)}, \\ \varphi_2(x) &= -\frac{a'(x)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{D'(x)(p_k(x) - a(x)) + 2a'(x)D(x)}{(p_k(x) - a(x))^2 - D(x)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x) \in C^\infty(I)$ , и положим

$$\exp \left\{ \int_0^x \varphi(t) dt \right\} = [D(x)]^{-1/4} \exp \left\{ \int_0^x \left[ \varphi_1(t) + \frac{\varphi_2(t)}{\sqrt{D(t)}} \right] dt \right\}.$$

Ветви корней выберем так, что

$$\begin{aligned} \sqrt{D(x)} > 0, \quad \sqrt[4]{D(x)} > 0, \quad x > 0, \\ \sqrt{D(x)} = -i |\sqrt{D(x)}|, \quad \sqrt[4]{D(x)} = e^{-i\pi/4} |\sqrt[4]{D(x)}|, \quad x < 0. \end{aligned}$$

Для аналитических функций это означает, что при переходе с полуоси  $x > 0$  на полуось  $x < 0$  точка ветвления  $x = 0$  обходится снизу. Вычислим  $A_0$ ,  $B_0$ . Заменяем функцию  $v$  ее АР при  $\varepsilon \rightarrow +0$ ,

$\xi(x) \geq \delta_1 > 0$ ; тогда главный член ФАР решения  $y_0$  будет иметь такой же вид, что и для ФАР линейной комбинации

$$\tilde{y}_0 = (-i + O(\varepsilon)) \tilde{y}_1 + (1 + O(\varepsilon)) \tilde{y}_2.$$

Сравнивая ФАР  $y_0$  и  $\tilde{y}_0$ , получаем

$$\xi(x) = \left[ -\frac{3i}{2} \int_0^x \sqrt{D(t)} dt \right]^{2/3},$$

или, в силу выбора ветви корня,

$$\xi(x) = \left[ \frac{3}{2} \int_0^x | \sqrt{D(t)} | dt \right]^{2/3}, \quad x < 0,$$

$$\xi(x) = - \left[ \frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{D(t)} dt \right]^{2/3}, \quad x > 0.$$

Учитывая, что  $\xi(x) \in C^\infty(I)$ ,  $\operatorname{sgn} \xi(x) = -\operatorname{sgn} x$ , для  $A_0, B_0$  получаем систему уравнений

$$\frac{1}{2} (A_0 \xi^{-1/4} \pm B_0 \xi^{1/4}) = \frac{1}{\sqrt[4]{D(x)}} \exp \left\{ \int_0^x \left[ \varphi_1(t) \pm \frac{\varphi_2(t)}{\sqrt{D(t)}} \right] dt \right\},$$

откуда находим

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \frac{\xi^{1/4}(x)}{D^{1/4}(x)} e^{\psi_1(x)} \operatorname{ch} \psi_2(x), \\ B_0(x) &= \frac{1}{[\xi(x) D(x)]^{1/4}} e^{\psi_1(x)} \operatorname{sh} \psi_2(x), \\ \psi_1(x) &= \int_0^x \varphi_1(t) dt, \quad \psi_2(x) = \int_0^x \frac{\varphi_2(t)}{\sqrt{D(t)}} dt, \end{aligned} \quad (8)$$

так что  $A_0, B_0 \in C^\infty$  при  $x \leq 0$ . Если выбрать ветвь  $\xi^{1/4}(x) = e^{i\pi/4} |\xi(x)|^{1/4}$ ,  $x \geq 0$ , то  $A_0, B_0 \in C^\infty(I)$ . Уравнение (2) имеет также решения  $y_1, y_2$  вида (6) — (8), в которые вместо функции  $v$  входят функции  $w_1, w_2$  (гл. IV, § 1).

Асимптотические формулы сильно упрощаются для уравнений самосопряженного вида

$$ly = \sum_{k=0}^n (-1)^k \varepsilon^{2k} [q_{n-k}(x) y^{(k)}]^{(k)} = 0. \quad (9)$$

Так как характеристическое уравнение (§ 1) содержит только четные степени  $p$ , то его корни образуют пары  $\{p_j(x, \varepsilon), -p_j(x, \varepsilon)\}$ . Точка поворота  $x_0$  является простой только в том случае, когда  $p_j = 0$  при некотором  $j$ , а остальные корни  $p_k$  различны и отличны от нуля в этой точке.

Пусть  $x_0 = 0$ , коэффициенты уравнения (9) не зависят от  $\varepsilon$ ,  $p_1(0) = 0$ ; тогда  $p_1(x) = \sqrt[4]{D(x)}$ ,  $p_2(x) = -\sqrt[4]{D(x)}$ . В качестве  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$  возьмем решения с асимптотиками

$$\tilde{y}_j(x, \varepsilon) = \frac{f_j(x)}{\sqrt[4]{D(x)}} [1 + O(\varepsilon)], \quad f_j(x) = \left[ \prod_{k=3}^n (p_j(x) - p_k(x)) \right]^{-1/2},$$

$j = 1, 2,$

существование которых доказано в § 1. Тогда для  $A_0, B_0$  получим формулы

$$A_0(x) = \sqrt[4]{\frac{\xi(x)}{D(x)}} [f_1(x) + f_2(x)],$$

$$B_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\xi(x) D(x)}} [f_1(x) - f_2(x)].$$

Пусть коэффициенты уравнения (2) зависят от  $\varepsilon$ ; тогда при малых  $|\varepsilon|$  имеется единственная точка поворота  $x = x_0(\varepsilon)$ ,  $x_0(0) = 0$ ,  $x_0(\varepsilon) \in C^\infty$ , которая находится из системы

$$l(x, p; \varepsilon) = 0, \quad l_p(x, p; \varepsilon) = 0.$$

Сделаем замену переменной  $x - x_0(\varepsilon) = \tilde{x}$ ; тогда равенство  $p_1(\tilde{x}, \varepsilon) = p_2(\tilde{x}, \varepsilon)$  возможно лишь при  $\tilde{x} = 0$ , так что дискриминант  $D$  (см. (5)) имеет вид

$$D(\tilde{x}, \varepsilon) = \tilde{x} D_1(\tilde{x}, \varepsilon), \quad D_1(0, 0) \neq 0.$$

Пусть функция  $D(\tilde{x}, \varepsilon)$  вещественна,  $D_1(0, 0) > 0$ . Тогда справедливы полученные выше формулы (6) — (9). Разница состоит лишь в том, что следует заменить  $x$  на  $\tilde{x}$  во всех формулах, так что функции  $\xi_0, \xi_1, p_1, \dots, p_n$  будут зависеть еще и от  $\varepsilon$ .

2.3. Асимптотика решений. Пусть  $x_0$  — простая точка поворота и выполнено следующее условие:

3) Функции  $\operatorname{Re}(p_1(x) - p_j(x))$ ,  $\operatorname{Re}(p_2(x) - p_j(x))$  не меняют знак при  $x \in I$ .

Тогда уравнение (2) имеет решения  $y_0, y_1, y_2$  вида (6) — (9) (для решений  $y_{1,2}$  следует заменить  $v$  на  $w_{1,2}$ ), в которых все ряды  $A(x, \varepsilon), B(x, \varepsilon)$  — асимптотические при  $\varepsilon \rightarrow +0$  равномерно по  $x \in I$ .

Если коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют условию А п. 1, то существует комплексная окрестность  $U$  точки  $x_0$ , в которой указанные АР справедливы при  $\varepsilon \rightarrow +0$  равномерно по  $x \in U$ . Все эти АР можно дифференцировать по  $x$  и по  $\varepsilon$  любое число раз, с сохранением равномерной оценки остаточного члена.

2.4. Асимптотика решений системы (1). Не ограничивая общности, можно считать, что  $x_0(\varepsilon) = 0$  (см. п. 2.2). Все рассматриваемые ниже скалярные, векторные и матричные функции принадлежат классу  $C^\infty(I)$ , если  $A(x, \varepsilon)$  удов-



летворяет условию С п. 1, и голоморфны в области  $D$ , если  $A(x, \varepsilon)$  удовлетворяет условию  $\Lambda$ . Отрезок  $I \ni 0$  и область  $D \ni 0$  предполагаются малыми. Обозначим  $D(x) = D(x, 0)$  (см. (5)),  $A_0(x) = A(x, 0)$ ,  $p_j(x) = p_j(x, 0)$ . Существует матрица  $T_0(x)$ , приводящая матрицу  $A_0(0)$  при  $x \in I$  ( $x \in D$ ) к блочно-диагональному виду

$$T_0^{-1}(x) A_0(x) T(x) = \begin{bmatrix} B(x) & 0 \\ 0 & \Lambda(x) \end{bmatrix},$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} a(x) & 1 \\ D(x) & a(x) \end{bmatrix}, \quad a(x) = \frac{1}{2} [p_1(x) + p_2(x)], \quad (10)$$

$$\Lambda(x) = \text{diag} (p_3(x), \dots, p_n(x)).$$

Преобразование

$$y = \exp \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^x [p_1(t) + p_2(t)] dt \right\} T_0(x) u \quad (11)$$

приводит систему (1) к виду

$$\varepsilon u' = B_0(x) u + \varepsilon B(x, \varepsilon) u, \quad (12)$$

$$B(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} T_0^{-1}(x) [A(x, \varepsilon) - A(x, 0)] T_0(x) - T^{-1}(x) T'(x),$$

где  $B_0(x)$  — блочно-диагональная матрица:

$$B_0(x) = \text{diag} (\bar{B}(x), \Lambda(x) - a(x) I_{n-2}),$$

$$\bar{B}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ D(x) & 0 \end{bmatrix}.$$

Имеем  $B(x, \varepsilon) = B_1(x) + \varepsilon B_2(x) + \dots$ . Будем искать ФАР системы (12) в виде

$$u(x, \varepsilon) = w(\varepsilon^{-2/3} \xi(x)) f(x, \varepsilon) + \varepsilon^{1/3} w'(\varepsilon^{-2/3} \xi(x)) g(x, \varepsilon),$$

$$f(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \varepsilon^k, \quad g(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \varepsilon^k, \quad (13)$$

где  $w(t)$  — решение уравнения Эйри  $w'' - tw = 0$ . Подставляя (13) в (12) и приравнявая коэффициенты при  $w$  и при  $w'$ , получаем систему

$$\xi' \xi g + \varepsilon f' = (B_0 + \varepsilon B) f,$$

$$\xi' f + \varepsilon g' = (B_0 + \varepsilon B) g.$$

Разложим  $f$ ,  $g$ ,  $B$  в ряды по степеням  $\varepsilon$  и приравняем коэффициенты при этих степенях; тогда получим рекуррентную систему уравнений для  $f_k$ ,  $g_k$ . Первая пара уравнений имеет вид

$$B_0 f_0 = \xi' \xi g_0, \quad B_0 g_0 = \xi' f_0,$$

так что

$$B_0^2 f_0 = \xi'^2 \xi f_0, \quad B_0^2 g_0 = \xi'^2 \xi g_0.$$

Заметим, что  $B_0^2 = \text{diag} (D(x) I_2, (\Lambda(x) - I_a(x))^2)$ , и положим

$$\xi(x) = \left( \frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{D(t)} dt \right)^{2,3}. \quad (14)$$

Пусть  $x \in I$ ,  $D(x) > 0$  при  $x > 0$  для определенности, ветвь  $\sqrt{D(x)}$  выберем так же, как и в п. 2.2; тогда

$$\xi(x) \in C^\infty(I), \quad \text{sgn } \xi(x) = \text{sgn } x.$$

Имеем

$$\begin{aligned} g_0(x) &= \alpha_1(x) e_1 + \alpha_2(x) e_2, \\ f_0(x) &= \alpha_1(x) \frac{D(x)}{\xi'(x)} e_2 + \alpha_2(x) \frac{e_1}{\xi'(x)}, \\ e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0)^T, \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T. \end{aligned} \quad (15)$$

Неизвестные функции  $\alpha_1(x)$ ,  $\alpha_2(x)$  определяются из системы уравнений для второго приближения:

$$\begin{bmatrix} B_0 & -\xi' \xi I_n \\ -\xi' I_n & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_0 - B_1 f_0 \\ g'_0 - B_1 g_0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Соответствующая однородная система имеет нетривиальные решения, так что необходимое условие разрешимости есть ортогональность правой части системы (16) к решениям сопряженной однородной системы. Базис в пространстве решений последней системы образуют  $2n$ -векторы

$$(e_1^T, e_2^T / \xi'), \quad (e_2^T, (D/\xi') e_1^T),$$

векторы  $e_1, e_2$  указаны в (15). Условия разрешимости приводят к системе уравнений для коэффициентов  $\alpha_1, \alpha_2$ :

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \xi' \xi)' + \alpha_1' \xi' \xi &= A \xi' \xi \alpha_1 + \frac{B}{\xi'} \alpha_2, \\ \left( \frac{\alpha_2}{\xi'} \right)' + \frac{\alpha_2'}{\xi'} &= \frac{B}{\xi'} \alpha_1 + \frac{A}{\xi'} \alpha_2, \\ A &= b_{11} + b_{22}, \quad B = D b_{12} + b_{21}. \end{aligned} \quad (17)$$

Это система того же вида, что и система из § 1 гл. IV, так что

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{\xi'(x) \xi(x)}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x A(t) dt \right\} \text{sh} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x \frac{B(t) dt}{\sqrt{D(t)}} \right\}, \\ \alpha_2(x) &= \sqrt{\xi'(x)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x A(t) dt \right\} \text{ch} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x \frac{B(t) dt}{\sqrt{D(t)}} \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Формулы (10), (11), (13) — (15), (17), (18) полностью определяют главный член асимптотики. Вектор-функции  $f_k, g_k, k \geq 1$ , определяются из линейной системы уравнений, матрица которой



Тогда уравнение (9) имеет АР вида (6), где

$$A_0(x) = \sqrt[4]{\frac{\xi(x)}{a(x)D(x)}} [f_1(x) + f_2(x)],$$

$$B_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{a(x)\xi(x)D(x)}} [f_1(x) - f_2(x)].$$

### 3. Асимптотическое упрощение систем.

3.1. Точная редукция системы. Пусть матрица-функция  $A(x, \varepsilon)$  удовлетворяет условию А из п. 1,  $0 \in D$ . Тогда

$$A(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(x),$$

матрицы-функции  $A_k(x)$  голоморфны в области  $D$ . Пусть  $U$  — достаточно малая окрестность точки  $x = 0$ ,  $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ , и  $\varepsilon_1$  достаточно мало. Для любого целого  $m \geq 0$  существует матрица-функция  $T(x, \varepsilon)$ , голоморфная по  $x, \varepsilon$  при  $x \in U$ ,  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$ ,

$$T(x, 0) = I, x \in U; T(0, \varepsilon) = I, |\varepsilon| \leq \varepsilon_1,$$

и такая, что преобразование

$$y = T(x, \varepsilon) z \quad (19)$$

приводит систему (1) к виду

$$\varepsilon z' = \left[ \sum_{k=0}^m \varepsilon^k A_k(x) + \varepsilon^{m+1} B(x) \right] z.$$

Здесь  $x \in U$ ,  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$ , матрица-функция  $B(x)$  голоморфна в области  $U$ . В частности, систему (1) с помощью подстановки (19) можно привести к виду

$$\varepsilon z' = [A_0(x) + \varepsilon B(x)] z.$$

3.2. Асимптотическая блочная диагонализация систем. Пусть  $A_0(x)$  — квадратная матрица порядка  $n$  и класса  $C^\infty(I)$ ,  $I = [-a, a]$ ,  $a > 0$ , и ее собственные значения можно разбить на две группы  $M_1 = \{p_1(x), \dots, p_k(x)\}$ ,  $M_2 = \{p_{k+1}(x), \dots, p_n(x)\}$  такие, что

$$p_j(x) \neq p_l(x), p_j(x) \in M_1, p_l(x) \in M_2, \quad (20)$$

при всех  $x \in I$ . Тогда существуют число  $b$ ,  $0 < b \leq a$ , и невырожденная при  $x \in \tilde{I} = [-b, b]$  матрица-функция  $T_0(x)$  класса  $C^\infty(\tilde{I})$  такие, что

$$T_0^{-1}(x) A_0(x) T_0(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & B_2(x) \end{bmatrix}, \quad x \in \tilde{I}. \quad (21)$$

Здесь  $B_1(x)$ ,  $B_2(x)$  — квадратные матрицы-функции порядков  $k$ ,  $n - k$  и класса  $C^\infty(\bar{I})$ , собственные значения которых составляют соответственно группы  $M_1, M_2$ .

Аналогичный результат справедлив для системы (1), если  $A(x, \varepsilon)$  удовлетворяет условию  $C$ , матрица  $A_0(x) = A(x, 0)$  удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда для любого целого числа  $N \geq 1$  существует матрица-функция  $T_N(x, \varepsilon)$  класса  $C^\infty(\bar{I} \times J)$  такая, что преобразование (19) приводит систему (1) к виду

$$\varepsilon z' = \begin{bmatrix} B_1(x, \varepsilon) & 0 \\ 0 & B_2(x, \varepsilon) \end{bmatrix} z + \varepsilon^{N+1} C(x, \varepsilon) z. \quad (22)$$

Здесь  $B_1, B_2, C$  — квадратные матрицы порядков  $k, n - k, n$  и класса  $C^\infty(\bar{I} \times J)$ ,

$$B_j(x, \varepsilon) = B_j(x) + \sum_{l=1}^N \varepsilon^l B_{jl}(x), \quad j = 1, 2, \quad (23)$$

$$T(x, \varepsilon) = T_0(x) + \sum_{l=1}^N \varepsilon^l T_l(x), \quad B_{jl}(x), \quad T_l(x) \in C^\infty(\bar{I}).$$

Пусть матрица-функция  $A_0(x)$  голоморфна в замыкании  $[D]$  ограниченной односвязной области  $D$  на комплексной плоскости  $x$  и условие (20) выполняется всюду в  $[D]$ . Тогда существует голоморфная и невырожденная при  $x \in [D]$  матрица-функция  $T_0(x)$ , приводящая матрицу  $A_0(x)$  к виду (21). Если  $A(x, \varepsilon)$  голоморфна по  $x$ ,  $\varepsilon$  при  $x \in [D]$ ,  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ , то все сформулированные выше утверждения относительно системы (1) сохраняются при  $x \in [D]$ ,  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ , если  $\varepsilon_1 > 0$  достаточно мало, причем условия бесконечной дифференцируемости всех матриц заменяются условиями голоморфности.

Возможны другие варианты условий на систему (1), например, следующие. Пусть матрица-функция  $A(x, \varepsilon)$  голоморфна по  $x, \varepsilon$  в области

$$D_0: |x| \leq x_0, \quad 0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \quad |\arg \varepsilon| \leq \theta_0,$$

и разлагается в АР

$$A(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad |\arg \varepsilon| \leq \theta_0,$$

равномерный по  $|x| \leq x_0$ . Тогда блочная диагонализация системы (1) возможна в области

$$D_1: |x| \leq x_1, \quad 0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_1, \quad |\arg \varepsilon| \leq \theta_1,$$

если  $x_1, \varepsilon_1, \theta_1$  достаточно малы. Матрицы-функции  $T, B, B_2, C$  обладают теми же свойствами, что и матрица  $A(x, \varepsilon)$ , но в меньшей области  $D_1$ .

Если система (1) самосопряженная, т. е. матрица  $A(x, \varepsilon)$  антиэрмитова:

$$A(x, \varepsilon) = -\overline{A^T(x, \bar{\varepsilon})},$$

то матрицы  $B_1, B_2$  при подходящем выборе преобразования (19) также будут антиэрмитовыми.

Во всех рассмотренных случаях можно привести систему к виду

$$\varepsilon z' = \begin{bmatrix} B_1(x, \varepsilon) & 0 \\ 0 & B_2(x, \varepsilon) \end{bmatrix} z + C(x, \varepsilon) z,$$

где  $B_j(x, \varepsilon)$  — АР по степеням  $\varepsilon$ ,  $C(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^\infty)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  (замечания по этому поводу см. в гл. I, § 3, п. 3).

3.3. К а н о н и ч е с к и е с и с т е м ы. Пусть  $0, I_n$  — нулевая и единичная матрицы порядка  $n$ ,

$$J_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}_{2n} = \begin{bmatrix} J_{2p} & 0 \\ 0 & J_{2(n-p)} \end{bmatrix},$$

система (1) каноническая (§ 4) при  $x \in \mathbf{R}$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Матрица-функция  $A(x, \varepsilon)$  вещественна и *гамильтонова*, т. е.

$$J_{2n} A(x, \varepsilon) + A^T(x, \varepsilon) J_{2n} \equiv 0.$$

Собственные значения матрицы  $A$  образуют пары  $(p, -p)$ . Комплекснозначная функция  $f(x)$  называется *плавной* (gentle), если  $f(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$ ,  $f^{(k)}(x) \in L_1(\mathbf{R})$  при всех  $k \geq 0$ .

Пусть выполнены условия:

1) Элементы матриц-функций  $A'(x, \varepsilon)$ ,  $A(x, \varepsilon) - A(x, 0)$  — плавные функции.

2) При  $\varepsilon \rightarrow +0$  равномерно по  $x \in \mathbf{R}$  справедливо асимптотическое разложение

$$A(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x) \varepsilon^r. \quad (24)$$

3) Характеристический полином  $d(p^2, x)$  матрицы  $A_0(x)$  при всех  $x \in \mathbf{R}$  представим в виде

$$d(p^2, x) = d_1(p^2, x) d_2(p^2, x),$$

где  $d_1, d_2$  — непостоянные полиномы соответственно степеней  $2p, 2(n-p)$ , не имеющие общих корней ни при каком  $x \in \mathbf{R}$ .

Матрица  $M$  порядка  $(2n \times 2n)$  называется *блочно-гамильтоновой*, если

$$J_{2n} M + M^T J_{2n} = 0.$$

При этих условиях существует вещественная матрица-функция  $T_0(x)$ , которая приводит матрицу  $A_0(x)$  к блочно-диагональному виду

$$T_0^{-1}(x) A_0(x) T_0(x) = \text{diag}(B_0^{11}(x), B_0^{22}(x)) \quad (25)$$

при всех  $x \in \mathbf{R}$ . Матрицы-функции  $B_0^{jj}(x)$ ,  $j = 1, 2$ , — гамильтоновы матрицы соответственно порядков  $2p$ ,  $2(n-p)$ ,  $d_j(p^2, x)$  — их характеристические полиномы, и при всех  $x \in \mathbf{R}$  справедливо тождество

$$T_0^T(x) J_{2n} T_0(x) = J_{2n}. \quad (26)$$

Элементы производных матриц-функций  $T_0(x)$ ,  $B_0^{jj}(x)$ ,  $j = 1, 2$ , являются плавными функциями.

Существует матрица  $T(x, \varepsilon)$  такая, что преобразование (19) приводит систему (1) к виду

$$\varepsilon z' = \left[ \sum_{r=0}^{\infty} B_r(x) \varepsilon^r + C(x, \varepsilon) \right] z, \quad (27)$$

$$B_r(x) = \begin{bmatrix} B_r^{11}(x) & 0 \\ 0 & B_r^{22}(x) \end{bmatrix},$$

где  $B_r^{jj}(x)$ ,  $j = 1, 2$ , — гамильтоновы матрицы соответственно порядков  $2p$ ,  $2(n-p)$  и при  $r = 0$  совпадают с указанными в (25) матрицами. При  $\varepsilon \rightarrow +0$  и при любом целом  $N \geq 1$  имеем  $C(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^N)$  равномерно по  $x \in \mathbf{R}$ . Матрица  $T$  удовлетворяет тождеству (26) при всех  $x \in \mathbf{R}$ , разлагается в AP

$$T(x, \varepsilon) = T_0(x) + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r T_r(x), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (28)$$

равномерное по  $x \in \mathbf{R}$ ,  $T(x, \varepsilon) - T_0(x)$  обращается в нуль при  $x = \pm \infty$ , и элементы матриц-функций  $B_r^{jj}(x)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $T_r(x)$  при  $r \geq 1$  и  $T'(x, \varepsilon)$  являются плавными функциями.

Приведенные в пп. 3.2, 3.3 результаты принадлежат В. Вазову и И. Сибуйя [101, 102, 106, 110].

3.4. Нормальные формы Арнольда матриц и редукция систем. Рассмотрим систему (1), где матрица-функция  $A(x, \varepsilon)$  голоморфна при  $|x| \leq r \leq 1$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq 1$ , и обозначим  $A_0(x) = A(x, 0)$ . Пусть  $A_0(0)$  имеет жорданову нормальную форму и единственное собственное значение. Последнее условие не ограничивает общности (см. п. 3.2). Пусть  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_p$  — степени элементарных делителей матрицы  $A_0(0)$ , ее жордановы блоки расположены также в порядке убывания их размерностей. Разобьем матрицу  $A_0(0)$  на блоки  $A^{jk}$  соответственно. Введем матрицы  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_d$ ,  $d = \sum_{k=1}^p (2k-1)m_k$ , порядка  $n \times n$ . Матрица  $\Gamma_s$  имеет единственный элемент, равный 1, все остальные элементы равны нулю. Если  $\Gamma_s^{jk}$  — ненулевой блок, то единичный элемент расположен в последней строке блока при  $j \leq k$  и в первом столбце при  $j = k$ . Пусть матрицы  $\Gamma_s$  упорядочены так, что их единичный элемент

расположен в последней строке блока  $\Gamma_1^{11}$  и т. д. Сформулируем результат В. И. Арнольда [37] применительно к матрицам-функциям одной переменной. Существуют скалярные функции  $\rho_1(x), \dots, \rho_d(x)$  и матрица-функция  $T_0(x)$ , голоморфные в точке  $x = 0$ , такие, что

$$T_0^{-1}(x) A_0(x) T_0(x) = A_0(0) + \sum_{s=1}^d \rho_s(x) \Gamma_s \quad (29)$$

в некоторой окрестности точки  $x = 0$ . При этом

$$\rho_1(0) = \dots = \rho_d(0) = 0, \quad \det T_0(0) \neq 0.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что все собственные значения матрицы  $A_0(0)$  равны нулю и что  $A_0(x)$  имеет каноническую форму (29). Тогда существуют матрицы-функции  $T_r(x)$  и скалярные функции  $\rho_{sr}(x)$ ,  $r = 0, 1, \dots$ ,  $s = 1, 2, \dots, d$ ,  $T_0(0) = I$ , такие, что преобразование (19) приводит систему (1) к виду [112]

$$\varepsilon z' = [A_0(0) + \sum_{s=1}^d \rho_s(x, \varepsilon) \Gamma_s] z, \quad \rho_s(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \rho_{sr}(x) \varepsilon^r. \quad (30)$$

Здесь  $T(x, \varepsilon)$  имеет вид (28), причем  $T, \rho_1, \dots, \rho_d$  — формальные степенные ряды. Отсюда следует существование матрицы  $T$  и функций  $\rho_s$  класса  $C^\infty$  при  $|x| \leq r$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , которые голоморфны по  $x$  при каждом фиксированном  $\varepsilon$  и для которых формальные ряды являются асимптотическими при  $\varepsilon \rightarrow +0$  равномерно по  $x$ . Преобразование (19) приводит систему (1) к виду

$$\varepsilon z' = [A_0(0) + \sum_{s=1}^d \rho_s(x, \varepsilon) \Gamma_s + B(x, \varepsilon)],$$

$$B(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^N), \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

при любом целом  $N \geq 1$  равномерно по  $x$ .

Ничего не известно об асимптотике решений приведенной системы в общем случае.

**3.5. Системы с подвижными особенностями и. Рассмотрим матричное уравнение**

$$\varepsilon^h \varphi(x, \varepsilon) Y' = A(x, \varepsilon) Y, \quad (31)$$

где  $\varphi$  — скалярная функция,  $h$  — постоянная,  $Y, A$  — квадратные матрицы порядка  $n$ . Система (31) имеет особенности в точках, где  $\varphi(x, \varepsilon) = 0$ . Типичным примером служит система

$$\varepsilon^h (x + \varepsilon) Y' = A(x) Y. \quad (32)$$

Асимптотика решений этой системы при  $h = 0$  для неаналитических матриц-функций  $A(x)$  исследована в [14].



Введем обозначения:  $U, V$  — круги  $|x| \leq x_0, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$  в комплексных плоскостях  $x, \varepsilon$ ;  $S(x_0, \alpha, \beta), S(\varepsilon_0, \alpha, \beta)$  — пересечения  $U \setminus \{0\}, V \setminus \{0\}$  соответственно с секторами  $\alpha < \arg x < \beta, \alpha < \arg \varepsilon < \beta$ ;  $U_0 \subset U, V_0 \subset V$  — открытые области такие, что  $0 \in [U_0], 0 \in [V_0]$ . Предполагается, что числа  $x_0 > 0, \varepsilon_0 > 0$  и области  $U_0, V_0$  достаточно малы. Пусть выполнены условия:

1) Функция  $\varphi(x, \varepsilon)$  голоморфна при  $(x, \varepsilon) \in U \times V, \varphi(x, 0) \neq 0, \varphi(x, \varepsilon) \neq 0$  при  $(x, \varepsilon) \in U_0 \times V_0$ .

2) матрица-функция  $A(x, \varepsilon)$  голоморфна при  $(x, \varepsilon) \in U \times S(\varepsilon_0, \alpha, \beta)$  и разлагается в АР вида (24) при  $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \in S(\varepsilon_0, \alpha, \beta)$ .

3) Собственные значения  $p_1, \dots, p_n$  матрицы  $A(0, 0)$  распадаются на две группы  $M_1 = \{p_1, \dots, p_k\}, M_2 = \{p_{k+1}, \dots, p_n\}$  такие, что  $p_j \neq p_l$  при  $p_j \in M_1, p_l \in M_2$ .

4) Существуют точка  $a \in [U_0]$  и непрерывное по  $x \in [U_0]$  семейство простых гладких кривых

$$\gamma_x: t = t(s, x), t(0, x) = 0, t(1, x) = a,$$

лежащих в  $[U_0]$ , таких, что  $t'_s(s_x, x) = x$  в некоторой точке на  $\gamma_x$ .

В силу условия 3) можно считать, что матрица  $A(x, 0)$  приведена к блочно-диагональному виду (21). Обозначим

$$p_{jl} = p_j - p_l, p_j \in M_1, p_l \in M_2,$$

$$\psi = \arg(p_j t'_s) - \arg(\varepsilon^h \varphi(t, \varepsilon)).$$

Приведем два варианта редукции системы (31).

I.  $h \geq 1$  — целое число. Пусть существует  $\delta, 0 < \delta < \pi/2$ , такое, что  $\psi$  лежит на одном из отрезков вида

$$I_m^+ = [-\pi/2 + \delta + 2\pi m, \pi/2 - \delta + 2\pi m],$$

$$I_m^- = [\pi/2 + \delta + 2\pi m, 3\pi/2 - \delta + 2\pi m],$$

где  $m = 0, \pm 1, \dots$ , когда  $t \in \gamma_x, \varepsilon \in V_0$ .

Тогда существует преобразование вида (19), приводящее систему (31) к блочно-диагональному виду

$$\varepsilon z' = B(x, \varepsilon) z, \quad B = \begin{bmatrix} B_1(x, \varepsilon) & 0 \\ 0 & B_2(x, \varepsilon) \end{bmatrix}, \quad (33)$$

где  $B(x, 0) = A(x, 0)$ . Матрицы-функции  $T(x, \varepsilon), B(x, \varepsilon)$  обладают следующими свойствами:

1)  $T(x, \varepsilon), B(x, \varepsilon)$  голоморфны при  $(x, \varepsilon) \in U_0 \times V_0$  и непрерывны при  $(x, \varepsilon) \in [U_0 \times V_0]$ .

2) При  $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \in V_0$  матрицы-функции  $T(x, \varepsilon), B(x, \varepsilon)$  разлагаются в АР вида (28), равномерные по  $x \in [U_0]$ .

3) При  $x \in [U_0], \det T_0(x) \neq 0$ , матрицы-функции  $B_r(x), T_r(x), r = 0, 1, \dots$ , голоморфны при  $x \in S(x_0, \alpha, \beta)$  и разлагаются в этом секторе в АР по степеням  $x$  при  $x \rightarrow 0$ .

II. Пусть  $h = \varphi(0, 0) = \varphi'_x(0, 0) = 0, m$  — кратность нуля ( $x = 0$ ) функции  $\varphi(x, 0), 0 \leq \beta - \alpha \leq \pi/(m - 1)$ . Пусть существ-

вует  $s_0$ ,  $0 < s_0 < 1$ , такое, что значения функции  $\psi$  лежат на одном из отрезков  $I_m^+$ ,  $I_m^-$ , когда  $t = t(s, x)$ ,  $0 < s \leq s_0$ .

Тогда существует преобразование (19), приводящее систему (31) к виду (33) и матрицы-функции  $T(x, \varepsilon)$ ,  $B(x, \varepsilon)$  обладают перечисленными выше свойствами.

Простейшим примером в этом случае служит система

$$(x^2 - \varepsilon) Y' = AY, \quad A \neq 0.$$

При  $\varepsilon \neq 0$  система имеет две регулярные особые точки  $x = \pm \sqrt{\varepsilon}$ , которые при  $\varepsilon \rightarrow 0$  сливаются в одну иррегулярную особую точку  $x = 0$ .

**З а м е ч а н и е.** Условия на функцию  $\varphi$  означают, что для любой точки  $x \in [U_0]$  существует матрица из канонических путей с началом в точке  $x = 0$  или  $x = a$ .

Результаты, приведенные в п. 3.5, получены в работе [75].

**4. Метод канонического оператора Маслова.** Приведенные в этом пункте результаты принадлежат В. П. Маслову и являются весьма частными приложениями развитого им метода канонического оператора [15, 16]. Рассмотрим уравнение

$$\hat{L}y \equiv L\left(x, \frac{1}{i\lambda} D; \frac{1}{i\lambda}\right)y = 0, \quad (34)$$

где  $\lambda > 0$  — большой параметр,

$$L(x, p; \varepsilon) = p^n + \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k}(x, \varepsilon) p^k, \quad \varepsilon = \frac{1}{i\lambda}.$$

Функция  $L$  называется  $\lambda$ -символом оператора  $\hat{L}$ , функция  $L^0(x, p) = L(x, p; 0)$  — главным  $\lambda$ -символом.

Коэффициенты уравнения (31) удовлетворяют условию А из п. 1. Здесь приняты обозначения Р. Фейнмана: цифры 1, 2 указывают порядок действия операторов умножения на функции от  $x$  и дифференцирования. Например, если  $L = xp$ , то

$$L\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = x \frac{d}{dx} y, \quad L\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = \frac{d}{dx}(xy).$$

**4.1. Переход в  $p$ -представление.** Введем  $\lambda$ -преобразование Фурье

$$\{F\lambda, x \rightarrow p f(x)\}(p) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\{-i\lambda px\} dx,$$

$$\{F\lambda^{-1}, p \rightarrow x g(p)\}(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{-2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} g(p) \exp\{i\lambda xp\} dp,$$

где  $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$ ,  $\sqrt{-i} = e^{-i\pi/4}$ . Тогда

$$F_{\lambda, x \rightarrow p} \hat{L} \left( x, \frac{1}{i\lambda} \frac{d}{dx}; \varepsilon \right) F_{\lambda, p \rightarrow x}^{-1} = \hat{L} = L \left( -\frac{1}{i\lambda} \frac{d}{dp}, p; \varepsilon \right).$$

Если коэффициенты оператора  $\hat{L}$  — полиномы от  $x$ , то оператор  $\hat{L}$  — дифференциальный. В общем случае оператор  $\hat{L}$  является псевдодифференциальным.

Будем искать ФАР уравнения (31) в виде преобразования Фурье от экспоненты, умноженной на АР по степеням  $\varepsilon$ :

$$y = F_{\lambda, p \rightarrow x}^{-1} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = \exp \{i\lambda S(p)\} \varphi(p, \varepsilon),$$

так что  $\hat{L}\tilde{y} = 0$ . Если  $S$  — вещественная,  $\varphi(p)$  — финитная функции, то справедливо АР [16]

$$\hat{L} [\exp \{i\lambda S(p)\} \varphi(p)] = \exp \{i\lambda S(p)\} \left\{ L\varphi + \right. \\ \left. + \frac{1}{i\lambda} \left[ -L_x \varphi' + \left( \frac{1}{2} L_{xx} S'' - L_{xp} \right) \varphi + L_\varepsilon \varphi \right] + \dots \right\},$$

где значения символа  $L$  и его производных берутся в точке  $(-S'(p), p; 0)$ . Для функции  $S$  получаем уравнение

$$L^0(-S'(p), p) = 0.$$

**4.2. Структура корней.** Пусть главный символ  $L^0$  оператора  $\hat{L}$  веществен и уравнение

$$L^0(x, p) = 0 \tag{35}$$

определяет гладкую кривую  $\Gamma$  на плоскости  $(x, p)$ , так что  $\text{grad } L^0 \neq 0$  на  $\Gamma$ . Если точка  $r_0 = (x_0, p_0) \in \Gamma$ , то  $x_0$  является точкой поворота тогда и только тогда, когда касательная к  $\Gamma$  в точке  $r_0$  параллельна оси  $p$ . Так как  $L_x^0(x_0, p_0) \neq 0$ , то существует целое число  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , такое, что

$$\frac{\partial L^0}{\partial p} = \dots = \left( \frac{\partial}{\partial p} \right)^{k-1} L^0 = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial p} \right)^k L^0 \neq 0 \tag{36}$$

в точке  $r_0$ . Если  $k = 2$ , то точка поворота  $x_0$  — простая.

В малой окрестности точки  $r_0$  кривая  $\Gamma$  задается уравнением  $x = x(p)$ , где  $x(p)$  — функция класса  $C^\infty$  при малых  $|p - p_0|$  и

$$x(p) - x_0 \sim a(p - p_0)^k, \quad p \rightarrow p_0, \quad a \neq 0.$$

Заметим, что в точке поворота  $x_0$  совпадают  $k + 1$  корней  $p_j(x)$  характеристического уравнения (35).

**З а м е ч а н и е.** В малой окрестности точки  $r_0$  с помощью замены переменных  $\tilde{p} = p_0 + \psi(x, p)$ ,  $\tilde{x} = x - x_0$  главный символ можно привести к виду

$$L^0(x, p) = (\tilde{p}^k \pm \tilde{x}) L_1(\tilde{x}, \tilde{p}), \quad L_1(0, 0) \neq 0.$$

Функция  $\psi(x, p)$  принадлежит  $C^\infty$  при малых  $|x - x_0|$ ,  $|p - p_0|$ , вещественна при вещественных  $x, p$  и голоморфна по  $p$  при фиксированном  $x$ .

4.3. Асимптотика решений. Пусть  $x_0 = 0$ ,  $L = L(x, p)$ . Функция  $\eta(p)$  принадлежит  $C_0^\infty(\mathbf{R})$ ,  $\eta(p) \equiv 1$  в окрестности точки  $p_0 = 0$ , и носитель функции  $\eta(p)$  достаточно мал.

Положим  $S(p) = -\int_0^p x(p') dp'$ . Уравнение (34) имеет ФАР  $y$  вида

$$y(x, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{-2\pi i}} \int_0^\infty \exp\left\{i\lambda \left[px - \int_0^p x(p') dp'\right] - \frac{1}{2} \int_0^p \frac{L_{px}^0(x(p'), p')}{I_x^0(x(p'), p')} dp'\right\} [L_x(x(p'), p')]^{-1/2} \times \\ \times \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i\lambda}\right)^k \varphi_k(p)\right] \eta(p) dp. \quad (37)$$

Функции  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  можно найти из последовательности рекуррентных уравнений вида

$$-L_x \varphi_k' + \left(-\frac{1}{2} L_{xx} S'' + L_{xp}\right) \varphi_k = f(\varphi_0, \dots, \varphi_{k-1}).$$

Формула (37) — это аналог формулы (7) § 1 в  $p$ -представлении. Существование решения, имеющего АР вида (37), строго доказано при  $k = n$  (см. п. 6).

Поведение решения  $y$  существенно зависит от четности числа  $k$ . Пусть  $L_x < 0$ ,  $(\partial/\partial p)^k L > 0$  в точке  $(0, p_0)$  для определенности,  $\delta > 0$  достаточно мало. Если  $k$  нечетно, то при малых  $|x|$  интеграл из (37) имеет единственную вещественную точку стационарной фазы, которая определяется из уравнения  $x = x(p)$ , задающего кривую  $\Gamma$ , и при  $|x| \geq \delta$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$

$$y(x, \lambda) = A(x) \exp\left\{i\lambda \int_0^x p(t) dt + c\right\} [1 + O(\lambda^{-1})],$$

где  $c$  — постоянная, так что решение осциллирует по обе стороны от точки поворота. В самой точке поворота

$$y(0, \lambda) \sim a\lambda^{1/2-1/(k+1)}, \quad a \neq 0,$$

так что  $y(0, \lambda) \rightarrow \infty$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Имеется также решение  $y(x, \lambda)$ .

Если  $k$  четно, то при  $x \geq \delta$  имеются две вещественные стационарные точки  $p = p_1(x)$ ,  $p = p_2(x)$  и

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=1}^2 A_j(x) \exp\left\{i\lambda \int_0^{p_j(x)} p(t) dt\right\} + O(\lambda^{-1}).$$

При  $x < 0$  нет вещественных стационарных точек, так что  $y(x, \lambda) = O(\lambda^{-\infty})$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$ ,  $x \leq -\delta$ . Решение  $y(x, \lambda)$  можно выбрать вещественным. Асимптотика  $y(0, \lambda)$  имеет тот же вид, что и при нечетном  $k$ . Модельным примером служит уравнение

$$\left(\frac{1}{i\lambda} \frac{d}{dx}\right)^k y - xy = 0$$

(см. замечание п. 4.2, а также п. 6.2).

**5. Точки поворота самосопряженных систем.** Приведенный в этом пункте метод принадлежит В. В. Кучеренко [49].

5.1. Система уравнений первого порядка. Рассмотрим систему (1) на отрезке  $I = [a, b]$ . Матрица-функция  $A(x, \varepsilon)$  удовлетворяет условию С из п. 1 при  $x \in I$ ,  $\varepsilon \in J = [0, \varepsilon_0]$ . Будем предполагать, что матрица  $A_0(x)$  *антиэрмитова* при всех  $x \in I$ , т. е.  $A_0^*(x) = -A_0(x)$ , где  $A_0^*(x) = A^T(x)$ , и система (1) имеет ровно одну точку поворота на отрезке  $I$ ,  $a < x_0 < b$ . Пусть в этой точке совпадают ровно два собственных значения матрицы  $A_0(x)$ :

$$\begin{aligned} p_1(x_0) = p_2(x_0) = p_0, \quad p_j(x_0) \neq p_k(x_0), \\ p_j(x_0) \neq p_0, \quad 3 \leq j, k \leq n, \quad j \neq k. \end{aligned} \quad (38)$$

Собственные значения матрицы  $A_0(x)$  — чисто мнимые; обозначим  $p_j(x) = iq_j(x)$ . Функции  $q_j(x)$  вещественнозначны и  $q_j(x) \in C^\infty(I)$  при всех  $j$ . Существует базис  $\{e_1(x), \dots, e_n(x)\}$  из ортонормированных собственных векторов матрицы  $A_0(x)$  класса  $C^\infty(I)$ . Матрица  $T_0(x) = (e_1(x), \dots, e_n(x))$  унитарна и приводит матрицу  $A_0(x)$  к диагональному виду. Преобразование  $y = T_0(x)z$  приводит систему (1) к виду

$$z' = (\Lambda(x) + \varepsilon B(x, \varepsilon))z, \quad (39)$$

$$B(x) = \varepsilon^{-1} T_0^{-1}(x) [A_0(x, \varepsilon) - A_0(x)] T_0(x) - T_0^{-1}(x) T_0'(x).$$

Рассмотрим простейший случай

$$p_1(x_0) \neq p_2(x_0). \quad (40)$$

Это условие устойчиво относительно малых возмущений коэффициентов системы (1), сохраняющих антиэрмитовость матрицы  $A_0(x)$ . Пусть  $x_0 = 0$ ,  $I = [-a, a]$ ,  $a > 0$ .

**З а м е ч а н и е.** Пусть  $n = 2$ ; тогда кривая  $\Gamma: \det(pI - A_0(x)) = 0$  распадается на две гладкие кривые  $p = p_1(x)$ ,  $p = p_2(x)$ , которые пересекаются или касаются в точке  $x_0$ . Поэтому  $\Gamma$  не является гладкой кривой и результаты п. 4 к таким точкам поворота неприменимы.

5.2. Система из двух уравнений. Пусть система (1) приведена к виду (39), так что она имеет вид

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda p_1(x) y_1 + b_{11}(x, \varepsilon) y_1 + b_{12}(x, \varepsilon) y_2, \\ y_2' &= \lambda p_2(x) y_2 + b_{21}(x, \varepsilon) y_1 + b_{22}(x, \varepsilon) y_2. \end{aligned} \quad (41)$$

Так как  $p_1(0) = p_2(0)$ , то система не допускает асимптотической диагонализации (§ 1, п. 1.3). Сделаем подстановку

$$y_j = \exp \left\{ \lambda \int_0^x p_j(t) dt + \int_0^x b_{jj}(t, \varepsilon) dt \right\} z_j, \quad j = 1, 2,$$

и заменим полученную систему системой интегральных уравнений

$$z = c + Kz, \quad (Kz)(x) = \int_0^x K(x, t, \lambda) z(t) dt, \quad (42)$$

$$K(x, t, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & b_{21}(t, \varepsilon) \exp\{H\} \\ b_{21}(t, \varepsilon) \exp\{-H\} & 0 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

$$S(t, x) = i\lambda \int_t^x [q_1(\tau) - q_2(\tau)] d\tau, \quad S_1(t, x) = \int_t^x [b_{22}(\tau) - b_{11}(\tau)] d\tau.$$

где  $H = i\lambda S(t, x) + S_1(t, x)$ ,  $z = (z_1, z_2)^T$ ,  $c = (c_1, c_2)^T$ ,  $c_j$  — постоянные.

Норма  $\|K(x, t, \lambda)\|$  ядра оператора  $K$  имеет порядок  $O(1)$  при любом  $\lambda > 0$ , так как функции  $q_1(x)$ ,  $q_2(x)$  вещественны. Но можно получить из уравнения (42) уравнение с малым ядром, записав его в виде

$$z = c + Kc + K^2z. \quad (44)$$

Здесь  $K^2$  — интегральный оператор:

$$(K^2z)(x) = \int_t^x K_1(x, t, \lambda) z(t) dt,$$

где  $K_1$  — диагональная матрица с диагональными элементами

$$\varphi_1 = b_{21}(t, \varepsilon) \int_t^x b_{12}(\tau, \varepsilon) \exp\{i\lambda [S(\tau, t) + S(\tau, x)] + S_1(\tau, t)\} d\tau, \quad (45)$$

$$\varphi_2 = b_{12}(t, \varepsilon) \int_t^x b_{21}(\tau, \varepsilon) \exp\{-i\lambda [S(\tau, t) + S(\tau, x)] - S_1(\tau, t)\} d\tau.$$

Так как  $p_1(x) \neq p_2(x)$  при  $x \in I$ ,  $x \neq 0$ , то  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_j = 0$  в силу быстрой осцилляции экспоненты. Если условие (40) выполнено, то метод стационарной фазы позволяет получить оценку

$$|\varphi_j(t, x, \lambda)| \leq c\lambda^{-1/2}, \quad \lambda \gg 1,$$

где постоянная  $c$  не зависит от  $t, x \in I$ .

Приведем асимптотические формулы для решений. Положим  $c = (1, 0)^T$ ; тогда  $z = c + Kc + K^2c + O(\lambda^{-1})$ . Более подробный

анализ показывает, что  $K^2c = O(\lambda^{-1})$ , так что

$$z^{(1)} = \left( 0, \int_0^x \exp \{ -i\lambda S(t, x) - S_1(t, x) \} b_{21}(t, \varepsilon) dt \right)^T + O(\lambda^{-1}),$$

$$z^{(2)} = \left( \int_0^x \exp \{ i\lambda S(t, x) + S_1(t, x) \} b_{12}(t, \varepsilon) dt, 0 \right)^T + O(\lambda^{-1}),$$
(46)

где  $|O(\lambda^{-1})| \leq c\lambda^{-1}$  при  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $x \in I$ . Интегралы, входящие в формулу (46), практически не допускают дальнейших упрощений; можно лишь выразить их через интеграл Френеля

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{it^2} dt$$

(см. [25]). Но если отойти от точки поворота, то метод стационарной фазы позволяет вычислить асимптотику интегралов. Пусть  $\alpha > 0$  фиксировано; можно выбрать  $\alpha$  сколь угодно малым, но не зависящим от  $\lambda$ . Тогда система (41) имеет ФСР такую, что при  $\lambda \rightarrow +\infty$ ,  $x \in I$ ,  $|x| \geq \alpha$

$$y_j(x, \lambda) = \exp \left\{ \lambda \int_0^x p_j(t) dt + \int_0^x b_{jj}(t, 0) dt \right\} [f_j + O(\lambda^{-1})], \quad j=1, 2,$$

$$f_1 = \left( 1, \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda |p'_1(0) - p'_2(0)|}} b_{21}(0, 0) e^{i\pi\delta/4} \operatorname{sgn} x \right)^T,$$

$$f_2 = \left( \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda |p'_1(0) - p'_2(0)|}} b_{12}(0, 0) e^{-i\pi\delta/4} \operatorname{sgn} x, 1 \right)^T,$$

$$\delta = \operatorname{sgn} [q'_2(0) - q'_1(0)].$$
(47)

Напомним, что корни  $p_j(x)$  — чисто мнимые. Так как матрица  $T_0(x)$  унитарна, то матрица  $T_0^{-1}(x)T'(x)$  антиэрмитова. Если  $A$  не зависит от  $\varepsilon$ , то элементы  $b_{11}(x)$ ,  $b_{22}(x)$  — чисто мнимые,  $b_{21}(x) = -\overline{b_{12}(x)}$  и  $(f_1)_2 = -\overline{(f_2)_1}$ .

Применяя метод последовательных приближений к уравнению (44) и метод стационарной фазы, можно получить АР решений системы (1). Этот метод применим и в том случае, когда функция  $p_1(x) - p_2(x)$  имеет нуль произвольного конечного порядка в точке поворота  $x_0$ . Этот случай, однако, неустойчив относительно малых возмущений коэффициентов системы.

5.3. Система из  $n$  уравнений. С помощью преобразования (19), где  $T(x, \varepsilon)$  имеет вид (23), систему (1) можно при  $x \in I$  привести к блочно-диагональному виду (22), где

$$B_1(x, \varepsilon) = \begin{bmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & p_2(x) \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k B_k(x),$$

$$B_2(x, \varepsilon) = \Lambda(x) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k \Lambda_k(x)$$

и  $\Lambda_k(x)$  — диагональные матрицы. Система (1) имеет решения  $y_3(x, \varepsilon), \dots, y_n(x, \varepsilon)$  вида (8) § 2, асимптотика решений  $y_{1,2}(x, \varepsilon)$  определяется из системы  $\varepsilon y' = B_1(x, \varepsilon)$ .

Пусть в точке  $x_0$  пересекается несколько корней, т. е.  $p_1(x_0) = \dots = p_k(x_0) = p_0$ ,  $p_j(x_0) \neq p_l(x_0)$ ,  $j \neq l$ ,  $1 \leq j, l \leq k$ , а остальные корни различны и отличны от  $p_0$ . Изложенный выше метод применим в этом случае, так как ядро оператора  $K^2$  имеет порядок  $O(\lambda^{-1/2})$  при  $\lambda \gg 1$ .

**З а м е ч а н и е.** Пусть все собственные значения матрицы  $A_0(x)$  — чисто мнимые при  $x \in I$  и существует базис  $\{e_1(x), \dots, e_n(x)\}$  класса  $C^\infty(I)$  из собственных векторов этой матрицы. Тогда для системы (1) справедливы приведенные выше результаты.

**5.4. Система уравнений второго порядка.** Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$y'' + \lambda^2 A(x, \lambda^{-1}) y = 0 \quad (48)$$

с эрмитовой матрицей  $A_0(x) = A(x, 0)$ . Пусть матрица-функция  $A(x, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon = \lambda^{-1}$ , удовлетворяет условию С из п. 1 и собственные значения  $p_j(x)$  матрицы  $A_0(x)$  положительны:

$$p_j(x) > 0, \quad x \in I, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Пусть на отрезке  $I$  имеется ровно одна точка поворота  $x_0$ ,  $a < x_0 < b$ , и выполнены условия (38), (40). Будем также считать, что  $x_0 = 0$ ,  $I = [-a, a]$ . Система (48) эквивалентна системе из  $2n$  уравнений

$$\varepsilon \begin{bmatrix} z \\ \varepsilon z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ A(x, \varepsilon) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \varepsilon z' \end{bmatrix} = 0,$$

которая удовлетворяет условиям замечания п. 4.2. Здесь  $0, I$  — нулевая и единичная матрицы порядка  $n$ .

Пусть матрица  $T_0(x)$  приводит матрицу  $A_0(x)$  к диагональному виду  $\Lambda(x)$ . Полагая

$$\begin{bmatrix} z \\ \varepsilon z' \end{bmatrix} = Tw, \quad T(x) = \begin{bmatrix} T_0(x) & T_0(x) \\ T_0(x) \sqrt{\Lambda(x)} & -T_0(x) \sqrt{\Lambda(x)} \end{bmatrix}, \quad (49)$$

получаем систему

$$\varepsilon w' + \Lambda_0(x) w + \varepsilon B(x, \varepsilon) w = 0, \quad (50)$$

$$\Lambda_0(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{\Lambda(x)} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\Lambda(x)} \end{bmatrix}, \quad B(x, \varepsilon) = B_1(x) + B_2(x, \varepsilon),$$

$$B_1(x) = \frac{1}{4} \Lambda^{-1}(x) \Lambda'(x) \begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I \end{bmatrix} + \frac{1}{2} T_0^{-1}(x) T_0'(x) \begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix} + \\ + \frac{1}{2} \Lambda^{-1/2}(x) T_0(x) T_0'(x) \Lambda^{1/2}(x) \begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I \end{bmatrix}, \quad (51)$$

$$B_2(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} T^{-1}(x) \begin{bmatrix} 0 & I \\ A(x, \varepsilon) - A_0(x) & 0 \end{bmatrix} T(x).$$



Здесь приняты обозначения: если  $C, C_j$  — квадратные матрицы порядка  $n$ , то

$$C \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CC_1 & CC_2 \\ CC_3 & CC_4 \end{bmatrix},$$

$$\sqrt{\Lambda}(x) = \text{diag} \left( \sqrt{p_1(x)}, \dots, \sqrt{p_n(x)} \right),$$

все корни арифметические. Заметим, что

$$\text{diag } B_1(x) = \text{diag} [T_0^{-1}(x) T'(x)].$$

В силу условия (38) достаточно рассмотреть систему (48) из двух уравнений. Введем обозначения

$$w_j(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{\mu_j(x)}} \exp \left\{ i\lambda \int_0^x \mu_j(t) dt - \int_0^x \mu_j^{(1)}(t) dt \right\},$$

$$\mu_1(x) = -\mu_3(x) = \sqrt{p_1(x)}, \quad \mu_2(x) = -\mu_4(x) = \sqrt{p_2(x)},$$

$$\mu_j^{(1)}(x) = [B_1(x) + B_2(x, 0)]_{jj}.$$
(52)

Система (49) имеет ФСР вида

$$w_j(x, \lambda) = \tilde{w}_j(x, \lambda) [f_j + K_j f_j + O(\lambda^{-1})],$$
(53)

где  $f_j$  — вектор с компонентами  $\delta_{jk}$ ,  $K_j$  — интегральный оператор:

$$(K_j w)_l(x) = \int_0^x \exp \left\{ i\lambda \int_t^x [\mu_l(\tau) - \mu_j(\tau)] d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_t^x [\mu_l^{(1)}(\tau) - \mu_j^{(1)}(\tau)] d\tau \right\} [(\tilde{B}_1(t) + \tilde{B}_2(t, 0)) w]_l dt,$$

$$\tilde{B}_1(t) = B_1(t) - \text{diag } B_1(t)$$

и аналогично определяется матрица  $\tilde{B}_2(t, 0)$ .

Эти формулы упрощаются вне некоторой окрестности точки поворота. Пусть  $\delta > 0$  фиксировано; оно может быть выбрано сколь угодно малым, но не зависящим от  $\varepsilon$ . Ограничимся для простоты случаем, когда матрица  $A(x, \varepsilon)$  не зависит от  $\varepsilon$ , и положим

$$\delta = \text{sgn} [p_1'(0) - p_2'(0)],$$

$$a = -\sqrt[4]{p_1(0)} \sqrt{\frac{\pi}{|p_1'(0) - p_2'(0)|}} e^{i\pi\delta/4} e_2^*(0) e_1'(0) \text{sgn } x.$$
(54)

При  $\lambda \rightarrow +\infty$ ,  $|x| \geq \delta$  система (48) имеет ФСР вида

$$y_1(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{p(x)}} \exp \left\{ i\lambda \int_0^x \sqrt{p_1(t)} dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^x e_1^*(t) e_1'(t) dt \right\} \left[ e_1(x) + \frac{a}{\sqrt{\lambda}} e_2(x) + O(\lambda^{-1}) \right],$$

$$y_2(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{p_2(x)}} \exp \left\{ i\lambda \int_0^x \sqrt[4]{p_2(t)} dt - \int_0^x e_1^*(t) e_1'(t) dt \right\} \left[ e_2(x) - \frac{\bar{a}}{\sqrt{\lambda}} e_1(x) + O(\lambda^{-1}) \right], \quad (55)$$

$$y_3(x, \lambda) = \overline{y_1(x, \bar{\lambda})}, \quad y_4(x, \lambda) = \overline{y_2(x, \bar{\lambda})}. \quad (56)$$

Оценки остаточных членов равномерны по  $x \in I$ ,  $|x| \geq \delta$ , и АР (55) можно дифференцировать по  $x$  и по  $\lambda$ .

**6. Точки поворота возмущений обобщенного уравнения Эйри.** Уравнение

$$y^{(n)} - xy = 0 \quad (57)$$

при  $n \geq 3$  называется *обобщенным уравнением Эйри*, а его решения — *обобщенными функциями Эйри*. В этом пункте приведены результаты работы [108] об асимптотике ФСР системы (1) и уравнения (2) в полной комплексной окрестности точки поворота в случае, когда главный символ близок к символу  $l^0 = p^n - x$  при малых  $|x|$ .

**6.1. Структура корней.** Рассмотрим систему (1), где матрица-функция  $A(x, \varepsilon)$  голоморфна по  $x$ ,  $\varepsilon$  при  $|x| \leq r$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  и разлагается в асимптотический ряд

$$A(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

равномерный по  $x$ ,  $|x| \leq r$ . Числа  $r > 0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  предполагаются достаточно малыми.

**6.2. Структура корней.** Пусть матрица  $A_0(0)$  имеет жорданову нормальную форму вида

$$A_0(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dx} \det A_0(x)|_{x=0} = (-1)^{n+1}. \quad (58)$$

Тогда главный символ системы (1) имеет вид

$$l^0(x, p) = (-1)^n [p^n + xa_{n-1}(x)p^{n-1} + \dots + xa_1(x)p - x + O(x^2)],$$

где функции  $a_j(x)$  голоморфны при  $|x| \leq r$ , так что

$$l^0(x, p) = p^n - x + O(|x|^2 + |xp|)$$

при малых  $|x|$ ,  $|p|$ . Уравнение  $l^0(x, p) = 0$  при малых  $|x|$ ,  $|p|$  определяет одномерное комплексное аналитическое многообразие  $\Gamma$  в двумерном комплексном пространстве  $C_x \times C_p$ .

Собственные значения  $p_j(x)$  матрицы  $A_0(x)$  имеют вид

$$p_j(x) = \omega^{j-1}x^{1/n} + x^{2/n}\tilde{p}_j(x^{1/n}), \quad 1 \leq j \leq n,$$

где  $\omega = e^{2\pi i/n}$ , функции  $\tilde{p}_j(t)$  голоморфны при  $|t| \leq r^{1/n}$ .

В п. 4 было показано, что сформулированные выше условия на точку поворота  $x = 0$  носят характер «общего положения».

6.3. Внешнее разложение. AP решений системы (1) строятся с помощью метода сращивания асимптотических разложений, суть которого состоит в следующем. Строятся два различных типа AP — внешнее и внутреннее. Внешнее AP пригодно в кольце  $K_1: 0 \leq \delta_1(\varepsilon) \leq |x| \leq r$ , которое не содержит точку поворота, внутреннее — в окрестности точки поворота  $K_2: |x| \leq \delta_2(\varepsilon)$ . При  $0 < \varepsilon \ll 1$  области  $K_1$  и  $K_2$  перекрываются, что позволяет установить связь между внешним и внутренним AP (или, как принято говорить, срастить эти AP). Метод сращивания AP широко применяется в асимптотической теории линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

Внешнее разложение имеет тот же вид, что и AP из § 2. Пусть  $S(\theta_1, \theta_2)$  — сектор

$$|x| \leq r, \quad \theta_1 \leq \arg x \leq \theta_2, \quad \theta_2 - \theta_1 < \pi n/(n+1).$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \text{diag}(p_1(x), \dots, p_n(x)), \\ \Omega(t) &= \text{diag}(1, t, \dots, t^{n-1}), \quad \omega = e^{2\pi i/n}. \end{aligned} \quad (59)$$

Система (1) имеет ФМ вида

$$Y(x, \varepsilon) = \Omega(x^{1/n})[\varepsilon^{-1/(n+1)}x^{1/n}]^{(1-n)/2} \tilde{Y}(x, \varepsilon) \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \Lambda(t) dt\right\}, \quad (60)$$

и справедлива оценка

$$\|\tilde{Y}(x, \varepsilon)\| \leq c, \quad |\varepsilon x^{-(n+1)/n}| \leq c_1, \quad x \in S(\theta_1, \theta_2), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (61)$$

Далее,

$$\tilde{Y}(x, \varepsilon) = U(x, \varepsilon) e^{B(\varepsilon)}, \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

где  $B(\varepsilon)$  — диагональная матрица, и справедливы AP

$$B(\varepsilon) = \sum_{r=1}^{\infty} B_r \varepsilon^r, \quad U(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} U_r(x^{1/n}) [\varepsilon x^{-(n+1)/n}]^r \quad (60)$$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$ ,  $\varepsilon x^{-(n+1)/n} \rightarrow 0$ . Матрицы  $U_r(t)$  голоморфны при  $|t| \leq r^{1/n}$ ,

$$U_0(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}.$$

6.4. Внутреннее разложение. Введем внутреннюю переменную

$$s = xe^{-n/(n+1)},$$

и пусть  $\Sigma$  — сектор

$$\begin{aligned} |\arg s| &\leq n\pi/2 (n+1), \quad n \text{ нечетно,} \\ -\pi/2 &\leq \arg s \leq (n-1)\pi/2 (n+1), \quad n \text{ четно,} \\ Q(s) &= \frac{n}{n+1} \Omega(\omega) s^{(n+1)/n}, \end{aligned} \quad (63)$$

матрица  $\Omega$  определена формулой (59).

Система (1) имеет ФМ вида

$$\begin{aligned} Z(x, \varepsilon) &= \Omega(\varepsilon^{1/(n+1)} s^{1/n})^{(1-n)/(2n)} \tilde{Z}(x, \varepsilon) e^{Q(s)}, \quad |s| \geq s_0 > 0, \\ Z(x, \varepsilon) &= \tilde{Z}(x, \varepsilon) e^{Q(s)}, \quad |s| \leq s_0, \end{aligned} \quad (64)$$

и справедлива оценка

$$\|Z(x, \varepsilon)\| \leq c, \quad |s| \geq s_0, \quad |\varepsilon^{1/(n+1)} s^{(n+2)/n}| \leq c_1, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad s \in \Sigma. \quad (65)$$

Далее,

$$\tilde{Z}(x, \varepsilon) = V(s, \varepsilon) s^{D(\varepsilon)},$$

где  $D(\varepsilon)$  — диагональная матрица, и справедливы АР

$$\begin{aligned} D(\varepsilon) &= \sum_{r=1}^{\infty} D_r \varepsilon^{r/(n+1)}, \\ V(s, \varepsilon) &= \sum_{r=0}^{\infty} V_r(s) [\varepsilon^{1/(n+1)} s^{(n+2)/n}]^r \end{aligned} \quad (66)$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $|s| \geq s_0$ ,  $s \in \Sigma$ ,  $\varepsilon^{1/(n+1)} s^{(n+2)/n} \rightarrow 0$ . Для матриц  $V_r(s)$  справедливо АР

$$V_r(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} V_{r\nu} s^{-\nu/n}, \quad s \rightarrow \infty, \quad s \in \Sigma, \quad V_{00} = U_0(0).$$

6.5. Сращивание асимптотических разложений. Сектор  $S$  выберем так, чтобы ограничивающие его лучи лежали внутри сектора  $\Sigma$ . Можно положить

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\frac{n\pi}{2(n+1)} + \delta = -\theta_2, \quad n \text{ нечетно,} \\ \theta_1 &= -\frac{\pi}{2} + \delta, \quad \theta_2 = \frac{(n-1)\pi}{2(n+1)} - \delta, \quad n \text{ четно,} \end{aligned}$$

где  $\delta > 0$  достаточно мало, и пусть  $\theta_1 \leq \arg x \leq \theta_2$ .

Так как  $Y, Z$  — ФМ системы (1), то

$$Y(x, \varepsilon) = Z(x, \varepsilon) \Gamma(\varepsilon),$$

где матрица  $\Gamma(\varepsilon)$  не зависит от  $x$ . Области применимости внешнего и внутреннего разложений перекрываются, так как оба АР пригодны при

$$\varepsilon^{n/(n+1)} \ll |x| \ll \varepsilon^{n/(n+2)}$$

В этой зоне можно срастить эти АР. Введем внутреннюю область  $S_i: |\varepsilon^{1/(n+1)} s^{\kappa(s)(n+2)/n}| \leq \eta$ , внешней область  $S_e: |\varepsilon x^{-(n+1)/n}| \leq \xi_0$  и промежуточную область  $S_m = S_i \cap S_e$ , где

$$s_0 = \frac{\xi_0^{-n/(n+1)}}{\xi_0}, \quad \varepsilon_0 < \xi_0^{n+2} \eta_0^{n+1}, \\ \kappa(s) = 1, \quad |s| \geq s_0, \quad \kappa(s) = 0, \quad |s| \leq s_0.$$

Если числа  $\xi_0 > 0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  достаточно малы, то справедливы формулы связи при  $j, k = 1, \dots, n$ :

$$y_{jk}(x, \varepsilon) = \begin{cases} z_{jk}(x, \varepsilon) [\gamma_{kk}(x, \varepsilon) + \mu_{jk}(x, \varepsilon)], & (x, \varepsilon) \in S_m, \\ z_{jk}(x, \varepsilon) + \mu_{jk}(x, \varepsilon), & (x, \varepsilon) \in (S_i \cap S_m), \end{cases}$$

где  $\mu_{jk}(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^N)$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ ,  $(x, \varepsilon) \in S_i$  и при любом  $N$ . Для элементов  $\gamma_{kk}(\varepsilon)$  справедливо АР

$$\gamma_{kk}(\varepsilon) = \varepsilon^{nb_{kk}(\varepsilon)/(n+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{kk,r} \varepsilon^{r/(n+1)}, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (67)$$

где  $b_{kk}(\varepsilon)$  — диагональные элементы матрицы  $B(\varepsilon)$  из (62).

**6.6. Р е д у к ц и я с и с т е м ы (1) п р и ч е т н о м  $n$ .** Пусть  $S_0$  — сектор

$$|x| \leq x_0, \quad \pi + \delta \leq \arg x \leq \pi + \frac{2\pi}{n+1} \delta,$$

где  $\delta > 0$  может быть выбрано сколь угодно малым. Тогда существует преобразование вида (19), приводящее систему (1) к виду

$$\varepsilon z' = A_0(x) z, \quad A_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ x & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $T(x, \varepsilon)$  разлагается в АР вида (28) при  $\varepsilon \rightarrow +0$  равномерно по  $x \in S_0$  и голоморфна по  $x, \varepsilon$  при  $x \in S$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Коэффициенты АР определяются из формального тождества

$$\varepsilon \frac{dT}{dx} = A_0(x) T - T A(x, \varepsilon)$$

для формального ряда (28).

**7. Почти диагональные системы.** Рассмотрим систему (1), где матрица-функция  $A(x, \varepsilon)$  голоморфна по  $x, \varepsilon$  при

$$|x| \leq x_0, \quad 0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \quad |\arg \varepsilon| \leq \theta_0, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad x_0 > 0, \quad \theta_0 > 0 \quad (68)$$

и удовлетворяет условиям:

1) Существует голоморфная и невырожденная при  $|x| \leq x_0$  матрица  $T(x)$  такая, что

$$T^{-1}(x) A_0(x) T(x) = \text{diag} (p_1(x), \dots, p_n(x)).$$

2) Если  $p_1(x), \dots, p_k(x)$  — все различные собственные значения матрицы  $A_0(x)$ , то  $p_j(x) = x^q \tilde{p}_j(x)$ ,  $1 \leq j \leq k$ , где  $q \geq 1$  — целое число, функции  $\tilde{p}_j(x)$  голоморфны при  $|x| \leq x_0$  и все  $\tilde{p}_j(0)$  различны. Здесь  $A_0(x) = A(x, 0)$ .

Пусть  $S$  — сектор  $|\arg x - \alpha| \leq \beta$ ,  $0 < \beta < \pi/(2(q+1))$ ,  $\alpha$  вещественно, числа  $x_0, \varepsilon_0, \theta_0$  достаточно малы. В [84] доказано, что система (1) имеет ФМ вида

$$Y(x, \varepsilon) = U(x, \varepsilon) \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x A_0(t) dt \right\}$$

и справедливо АР

$$U(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} U_r(x, \varepsilon) \varepsilon^{r/(q+1)}, \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

равномерное по  $x, \varepsilon$ , если  $x \in S$  и  $x, \varepsilon$  лежат в области (68). Далее,

$$U(x, \varepsilon) - \sum_{r=0}^N U_r(x, \varepsilon) \varepsilon^{r/(q+1)} = O(\gamma(\varepsilon)^{N+1}),$$

$$\gamma(\varepsilon) = \varepsilon^{1/(q+1)} (\ln \varepsilon)^{\delta_{1q}/2},$$

где  $\delta_{1q}$  — символ Кронекера.

Оба условия 1), 2) выполнены, в частности, если матрица  $A_0(x)$  антиэрмитова при вещественных  $x$  (ср. п. 5).

**8. Уравнение Территина.** Уравнение

$$x^n y^{(n)} - x^m y = 0, \quad (69)$$

где  $m$  — любое комплексное число, называется *уравнением Территина*. При  $m = 0$  это *уравнение Эйлера*, ниже  $m \neq 0$ . При  $n = 2$  решения уравнения (69) выражаются через функции Бесселя; в частности, при  $m = 3$  его решения — функции Эйри. При  $m = n + 1$  уравнение (69) есть *обобщенное уравнение Эйри*.

Решения уравнения (69) выражаются через  $G$ -функции Майера [22] (обобщения гипергеометрического ряда), асимптотика которых мало исследована. Ниже мы следуем работе [69].

**8.1. Интегральные представления и ряды.** Пусть  $C$  — контур в комплексной плоскости  $t$ , состоящий из полуоси  $(+\infty - ia, w - ia]$ , отрезка  $[w - ia, w + ia]$  и полуоси  $[w + ia, +\infty)$ , где

$$a > (n-1) \left| \text{Im} \frac{1}{m} \right|, \quad w < \text{Re} \left( \frac{n-1}{m} \right), \quad w < 0.$$

Положим

$$\varphi_j(t) = \left\{ \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(1 + t - \frac{k}{m}\right) \right\}^{-1} \left\{ \sin \pi \left(t - \frac{j}{m}\right) \right\}^{-1} m^{-nt} e^{-i\pi t},$$

$$j = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{m} - t\right) m^{-nt} e^{-\pi i n t}.$$

Тогда функции

$$y_j(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi_j(t) x^{mt} dt, \quad \tilde{y}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \tilde{\varphi}(t) x^{mt} dt$$

являются решениями уравнения (69) и разлагаются в ряды

$$y_j(x) = -\frac{1}{\pi} e^{-\pi i j/m} m^{-nj/m} x^j \sum_{v=0}^{\infty} \left\{ \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(1 + v + \frac{j-k}{m}\right) \right\}^{-1} m^{-nv} x^{mv},$$
(70)

которые сходятся при  $x^m \neq 0$ . Ветвь

$$x^{mt} = \exp \{mt [\ln |x| + i \arg x]\}$$

зависит от выбора  $\arg x$ . Формула (70) определяет асимптотику решений при  $x \rightarrow 0$ .

Решения  $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$  линейно независимы, если  $m \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-1)$ . Пусть

$$m = \pm 1, \pm 2, \pm(n-1). \quad (71)$$

Введем функции

$$\varphi_{jh}(t) = \left\{ \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(1 + t - \frac{k}{m}\right) \right\}^{-1} \left\{ \sin \pi \left(t - \frac{j}{m}\right) \right\}^{-1} m^{-nt} e^{-\pi i (h+1)t},$$

где  $j, h$  — целые числа такие, что

$$0 \leq h |m| + j \leq n-1, \quad 0 \leq h \leq n-1, \quad 0 \leq j \leq |m|-1. \quad (72)$$

Тогда функции

$$y_{jh}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi_{jh}(t) x^{mt} dt \quad (73)$$

образуют ФСР уравнения (69) и разлагаются в ряды, сходящиеся при  $x^m \neq 0$ :

$$y_{jh}(x) = -\sum_{l=0}^h [\ln(m^{-n} x^m)]^{h-l} \sum_{v=0}^{\infty} a_{lv}(j, h) x^{mv+j},$$

$$a_{lv}(j, h) =$$

$$= \frac{1}{(h-l)!} \pi^{-k-1} m^{-nv-nj/m} e^{-j(k+1)\pi i/m} \sum_{\mu=0}^l \frac{(2\pi i)^\mu}{\mu! (l-\mu)!} B_\mu^{(h+1)} f_j^{(l-j)}(v).$$

Здесь  $B_{\mu}^{(h+1)}$  — числа Бернулли порядка  $h + 1$ ,

$$f_j(t) = \left\{ \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma \left( 1 + t + \frac{j-h}{m} \right) \right\}^{-1}.$$

В частности,  $y_{j_0} = y_j(x)$ .

Приведем некоторые свойства решений уравнения (69). Положим

$$\omega = e^{2\pi i/m}, \quad \omega^\alpha = e^{2\pi i\alpha/m}. \quad (74)$$

1. Если  $y(x)$  — решение, то  $y(\omega x)$  — решение.

2. Если  $m$  не имеет вида (71), то

$$y_j(x) = \omega^p y_j(x\omega^{-p}), \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (75)$$

3. Если  $m$  имеет вид (71), то

$$y_{jk}(x) = \sum_{q=0}^h C_p^q (2i)^q \omega^{(2p-q)j} y_{j, h-q}(x\omega^{-p}). \quad (76)$$

4. Все решения  $y_{jh}(x)$  выражаются через решение  $\tilde{y}(x)$ :

$$y_{jh}(x) = \sum_{k=0}^{n-h-1} c_k(j, h) \tilde{y}(x\omega^k),$$

постоянные  $c_k(j, h)$  определяются из соотношений

$$\sum_{k=0}^{n-h-1} c_k(j, h) x^k = c_0(j, h) \prod_{k=0}^{n-1} (1 - x\omega^{-k}),$$

$$c_0(j, h) = (2\pi i)^{-n} (-2i)^{h+1} \exp \left\{ \left[ \frac{n(n-1)}{2} - j(h+1) \right] \frac{\pi i}{m} \right\},$$

$$c_{n-h-1}(h) = (-2\pi i)^{-n} (2i)^{h+1} \exp \left\{ \left[ j(h+1) - \frac{n(n-1)}{2} \right] \frac{\pi i}{m} \right\}.$$

Штрих означает, что в произведении опущены множители с номерами  $k = j, j + |m|, \dots, j + h|m|$ .

5. Решения  $\tilde{y}(x), \tilde{y}(x\omega^{-1}), \dots, \tilde{y}(x\omega^{-n+1})$  образуют ФСР.

8.2. А с и м п т о т и к а решения  $\tilde{y}(x)$ . Все приведенные в этом разделе АР при  $|x^m| \rightarrow \infty$  равномерны по  $x$ , и  $\varepsilon$  — фиксированное число,  $0 < \varepsilon < \pi$ . При

$$|x| \rightarrow \infty, \quad -\pi \leq \arg(m^{-n}x^m) \leq (2n+1)\pi$$

справедливо АР

$$\tilde{y}(x) = E(x) \equiv$$

$$\equiv \exp \left\{ \frac{n}{m} x^{m/n} \right\} (m^{-n} e^{-n\pi i} x^m)^{\alpha_{mn}} \left[ n^{-1/2} (2\pi)^{(n-1)/2} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k x^{-mk/n} \right],$$

$$\alpha_{mn} = \frac{1}{2} (n-1) \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right), \quad (77)$$



равномерно по  $\arg x$ . Коэффициенты  $d_1, d_2, \dots$  выбраны так, что формальный ряд  $E(x)$  удовлетворяет уравнению (69).

Приведенные в п. 8.1 тождества позволяют выразить асимптотику ФСР при  $|x| \rightarrow \infty$  через асимптотику решения  $\tilde{y}(x)$ . Решения  $\tilde{y}(x), \tilde{y}(x\omega^{-1}), \dots, \tilde{y}(x\omega^{-n+1})$  образуют ФСР, которая однозначно определяется условием: решение с номером  $j$  асимптотически равно  $E(x\omega^{-m})$  при

$$|x^m| \rightarrow \infty, \quad -\pi + \varepsilon \leq \arg(m^{-n}x^m\omega^{-j}) \leq (2n + 1)\pi - \varepsilon.$$

Постоянные  $c_k(j, h)$  — это множители Стокса ФСР  $\{y_{jh}(x)\}$  по отношению к ФСР  $\{\tilde{y}_j(x\omega^{-j})\}, j = 0, 1, \dots, n - 1$ . В [69] приведена также другая ФСР, аналогичная рассмотренной ранее X. Территивным, но множители Стокса ФСР  $\{y_{jh}(x)\}$  являются более громоздкими.

8.3. Асимптотика фундаментальной системы решений. Положим

$$c = -\pi^{-n} (2i)^{1-n} \omega^{n(n-1)/4}.$$

Приведем АР решений при  $|x^m| \rightarrow \infty$  в указанных ниже секторах. Если  $m$  не имеет вида (71), то  $h = 0, j = 0, 1, \dots, n - 1$ ; если  $m$  имеет вид (71), то  $j, h$  — целые числа, удовлетворяющие неравенствам (72). Положим

$$\alpha = \arg(m^{-n}x^m). \tag{78}$$

1. Если  $-\pi + \varepsilon \leq \alpha \leq (2h + 3)\pi - \varepsilon$ , то

$$y_{jh}(x) = c (-2i)^h \omega^{-j(h+1)/2} E(x) + c (2i)^h \omega^{j(h+1)/2} E(x\omega^{-h-1}),$$

за исключением случая  $m = \pm 1, j = 0, h = n - 1$ .

2. Если  $-\pi + \varepsilon \leq \alpha \leq (h + 1)\pi - \varepsilon$ , то

$$y_{jh}(x) = c (-2i)^h \omega^{-j(h+1)/2} E(x).$$

3. Если  $(h + 1)\pi + \varepsilon \leq \alpha \leq (2h + 3)\pi - \varepsilon$ , то

$$y_{jh}(x) = c (2i)^h \omega^{j(h+1)/2} E(x\omega^{-h-1}).$$

4. Если  $(2p - 1)\pi + \varepsilon \leq \alpha \leq (2p + 3)\pi - \varepsilon$ , то

$$y_{jh}(x) = c (2i)^h \omega^{j(2p-h-1)/2} \binom{p-1}{h} E(x\omega^{-p}) + \omega^j \binom{p}{h} E(x\omega^{-p-1}),$$

где  $p$  — целое число,  $p \leq -1$  или  $p \geq h + 1$ .

5. Если  $(2p - 1)\pi + \varepsilon \leq \alpha \leq (2p + 1)\pi - \varepsilon$ , то

$$y_{jh}(x) = c (2i)^h \binom{p-1}{h} \omega^{j(2p-h-1)/2} E(x\omega^{-p}),$$

где  $p$  — целое число,  $p < 0$  или  $p > h + 1$ .

Постоянные  $c_k(j, h)$  — это множители Стокса ФСР  $\{y_{jh}(x)\}$  по отношению к ФСР  $\{\tilde{y}(x\omega^{-j})\}$ . В [69] вместе с первой из этих ФСР приведена еще одна, множители Стокса для которой выражаются более громоздкими формулами.

8.4. **Обобщенные функции Эйри.** Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} - xy = 0,$$

так что  $m = n + 1$  в уравнении Территина (69). Положим

$$\varphi_p = \frac{2p-1}{m+1} \pi, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2,$$

и пусть  $\varepsilon > 0$  мало, но фиксировано. Введем функцию

$$E(x) = -\frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2} n^{1/2} \pi} (n+1)^{(n-1)/2} x^{(1-n)/(2n)} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{n}{n+1} x^{(n+1)/n} \right\} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{d}_k x^{-(n+1)k/n} \right], \quad (79)$$

которая отличается от  $E(x)$  постоянным множителем. Тогда при  $|x| \rightarrow \infty$

$$y_j(x) = (p-1) \exp \{2p\pi i/(n+1)\} E(x \exp \{-2p\pi i/m\}) \quad (80)$$

в секторах

$$\varphi_p + \varepsilon < \arg x < \varphi_{p+1} - \varepsilon,$$

так что эти решения ведут себя как экспоненты. В оставшихся секторах, т. е. в малых окрестностях лучей  $\arg x = \varphi_p$ , решения  $y_j(x)$  ведут себя как суммы экспонент. Имеем

$$y_j(x) = \exp \{j(2p-1)\pi i/(n+1)\} E(x \exp \{-2p\pi i/(n+1)\}) + \\ + \exp \{j(2p+1)\pi i/(n+1)\} E(x \exp \{-2(p+1)\pi i/(n+1)\}) \quad (81)$$

при  $|x| \rightarrow \infty$ ,  $|\varphi - \varphi_{p+1}| \leq \varepsilon$ . На луче  $\varphi = \varphi_{p+1}$  имеем

$$|\exp \{(x e^{-2\pi i p/(n+1)})^{(n+1)/n}\}| = |\exp \{(x e^{-2\pi i (p+2)/(n+1)})^{(n+1)/n}\}|,$$

так что оба слагаемых в формуле (81) имеют одинаковый порядок роста при  $|x| \rightarrow \infty$  и решение  $y_j(x)$  может иметь бесконечно много нулей вблизи лучей  $\arg x = \varphi_p$ .

8.5. **Обобщенные функции Эйри первого рода.** Пусть  $n = 2N$  четно. М. Коно [82] ввел функции  $Ai(z)$ , которые при  $n = 2$  совпадают с функцией Эйри (гл. IV, § 1):

$$Ai(z) = \gamma \sum_{j=1}^n (-1)^j (n+1)^{n(j-1)/(n+1)} \eta_{n-j} w_j(z), \\ w_j(z) = z^{n-j} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \prod_{k=1}^n \Gamma \left( m+1 + \frac{k-j}{n+1} \right) \right\}^{-1} [z^{n+1} (n+1)^{-n}]^m, \quad (82) \\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь  $\gamma$ ,  $\eta_j$  — вещественные постоянные,

$$\gamma = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}} (n+1)^{\frac{(2n+1)(1-n)}{2(n+1)}} \left\{ \prod_{k=1}^n \sin \frac{\pi k}{n+1} \right\}^{-1},$$

$$\eta_0 x^{n-1} + \eta_1 x^{n-2} + \dots + \eta_{n-1} = (x+1) \prod_{k=1}^{N-1} \left( x^2 + 2x \cos \frac{\pi k}{n+1} + 1 \right).$$

Эти функции обладают следующими свойствами:

1) Пусть целые числа  $k_1, \dots, k_n$  различны по mod  $(n+1)$ ,  $\omega = \exp \{2\pi i/(n+1)\}$ . Тогда функции  $A_i(\omega^k z)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , образуют ФСР и их вронскиан равен

$$W = c_1 \dots c_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left[ \sin \left( \frac{k_i - k_j}{n+1} \pi \right) \right] \exp \left\{ \left( \frac{k_i + k_j}{n+1} + \frac{1}{2} \right) \pi i \right\},$$

$$c_j = \gamma (-1)^j (n+1)^{n(n-j)/(n+1)} \eta_{n-j} = A_i^{(n-j)}(0).$$

2) Справедливо тождество

$$\sum_{k=0}^n \beta_k A_i(\omega^{-k} z) = 0,$$

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_k = -\omega^{-k} \prod_{j=1}^{k-1} \left| \sin \left( \frac{j-k}{n+1} \pi \right) \right| \left| \sin \frac{j}{n+1} \pi \right|^{-1}, \quad k \geq 1.$$

3) При  $|z| \rightarrow \infty$  функция  $A_i(z)$  имеет вид

$$\bar{c} z^{-(n-1)/(2n)} \exp \left\{ -\frac{n}{n+1} z^{(n+1)/n} \omega_n \right\} (1 + \varepsilon_1), \quad -2\pi \leq \arg z < -\pi,$$

$$z^{-(n-1)/(2n)} \exp \left\{ -\frac{n}{n+1} z^{(n+1)/n} \right\} (1 + \varepsilon_2), \quad -\pi \leq \arg z < \pi,$$

$$d z^{-(n-1)/(2n)} \exp \left\{ -\frac{n}{n+1} z^{(n+1)/n} \omega_n^{-1} \right\} (1 + \varepsilon_3), \quad -\pi \leq \arg z < 2\pi,$$

$$\omega_n = \exp \left\{ \frac{2\pi i}{n} \right\}, \quad d = \exp \left\{ \frac{n-1}{n} \pi i \right\}, \quad \varepsilon_j = O(z^{-(n+1)/n}).$$

### § 7. Задача о рассеянии, адиабатические инварианты и задача на собственные значения

1. Матрица рассеяния. Рассмотрим систему  $n$  уравнений

$$y'' + \lambda^2 A(x) y = 0, \tag{1}$$

где  $\lambda > 0$  — параметр. Пусть выполнены условия:

- 1) Существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} A(x) = A_{\pm}$ , собственные значения  $p_j^+$  ( $p_j^-$ ) матрицы  $A_+$  ( $A_-$ ) положительны и различны.
- 2)  $A(x) \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $A(x) - A_+ \in L_1(0, \infty)$ ,  $A(x) - A_-(x) \in L_1(0, \infty)$ .

Тогда при фиксированном  $\lambda > 0$  всякое решение системы (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) &= A_-^{-1/4} \exp\{i\lambda\sqrt{A_-}x\} [b_+ + \lambda^{-1}\varepsilon_1^-] + \\ &+ A_-^{-1/4} \exp\{-i\lambda\sqrt{A_-}x\} [b_- + \lambda^{-1}\varepsilon_2^-] = \\ &= A_+^{-1/4} \exp\{i\lambda\sqrt{A_+}x\} [c_+ + \lambda^{-1}\varepsilon_1^+] + \\ &+ A_+^{-1/4} \exp\{-i\lambda\sqrt{A_+}x\} [c_- + \lambda^{-1}\varepsilon_2^+]. \end{aligned}$$

Матрица  $\sqrt{A_-}$  подобна диагональной матрице с элементами  $\sqrt{p_1^-} > 0, \dots, \sqrt{p_n^-} > 0$ , и аналогично определяются остальные корни из матриц. Векторы  $b_{\pm}, c_{\pm}$  зависят только от  $\lambda, |\varepsilon_j^-(x, \lambda)| \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty, |\varepsilon_j^+(x, \lambda)| \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Матрицей рассеяния (или  $S$ -матрицей) называется  $(2n \times 2n)$ -матрица

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{22} & S_{21} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c_+ \\ c_- \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} b_+ \\ b_- \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $S_{jk}$  — квадратные матрицы порядка  $n$ . Матрица рассеяния не зависит от выбора решения  $Y$  и обладает следующими свойствами:

1. Если матрица  $A(x)$  эрмитова при всех  $x$ , то  $S$ -матрица унитарна.
2. Если матрица  $A(x)$  вещественна при всех  $x$ , то

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{S_{22}} & \overline{S_{12}} \\ \overline{S_{21}} & \overline{S_{11}} \end{bmatrix}.$$

Пусть выполнены условия:

3) Матрица  $A(x)$  вещественна и симметрична, ее собственные значения строго положительны и различны при всех  $x \in \mathbf{R}$ .

4) Элементы матриц  $A(x) - A_+, A(x) - A_-$  — плавные функции (§ 6, п. 3.3) соответственно на полуосях  $(0, +\infty), (-\infty, 0)$ .

Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty$  справедливы формулы типа (9) § 11 гл. II:

$$\begin{aligned} s_{jj}(\lambda) &= \exp\left\{i\lambda \int_0^{\infty} (\sqrt{p_j(x)} - \sqrt{p_j^+}) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^0 (\sqrt{p_j(x)} - \sqrt{p_j^-}) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \lambda^{-k}\right\}, \\ s_{jl}(\lambda) &= O(\lambda^{-\infty}), \quad j \neq l. \end{aligned}$$

Если матрица-функция  $A(z)$  голоморфна в полосе вида  $\Pi: |\operatorname{Im} z| < a, a > 0$ , и условия 1), 2), 4) выполнены в  $\Pi$ , то недиагональные элементы  $S$ -матрицы имеют порядок  $O(e^{-c\lambda}), c > 0, \lambda \rightarrow +\infty$ .

2. Адиабатические инварианты системы (1). При условиях 1) — 4) и при  $\lambda \gg 1$  уравнения (1) описывают колебания системы из слабо связанных линейных осцилляторов, частоты колебаний

которых медленно меняются со временем (гл. II, § 11, п. 3). Пусть  $\{e_1(x), \dots, e_n(x)\}$  — ортонормированный базис из вещественных собственных векторов класса  $C^\infty(\mathbf{R})$ ,  $y$  — решение системы (1). Тогда функции

$$J_k(x, \varepsilon) = \frac{1}{2\sqrt{p_k(x)}} [p_k(x)(e_k(x), y(x))^2 + (e_k(x), y'(x))^2], \quad 1 \leq k \leq n, \quad (3)$$

являются адиабатическими инвариантами системы (1). Величина

$$J_k(\lambda) = J_k(+\infty, \lambda) - J_k(-\infty, \lambda)$$

называется *полным изменением адиабатического инварианта*.

Пусть  $y_j^+$  — решения системы (1) такие, что

$$y_j^+ = (p_j^+)^{-1/2} \exp\{i\lambda \sqrt{p_j^+} x\} [e_j(+\infty) + o(1)], \quad x \rightarrow +\infty,$$

и  $\bar{y}_j^-$  — решения с аналогичным асимптотическим поведением при  $x \rightarrow -\infty$ . Решения  $\{y_1^+, \bar{y}_j^+\}$ ,  $\{\bar{y}_j^-, y_j^-\}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , образуют две ФСР, и любое решение имеет вид

$$y = Y^+ a^+ + \bar{Y}^+ b^+ = Y^- a^- + \bar{Y}^- b^-.$$

Здесь  $a^\pm$ ,  $b^\pm$  суть  $n$ -векторы,  $Y^+$  есть  $(n \times n)$ -матрица со столбцами  $y_1^+(x), \dots, y_n^+(x)$ , аналогично определяются остальные матрицы. Тогда

$$J_k(\lambda) = 2(a_k^+ b_k^+ - \bar{a}_k^- \bar{b}_k^-). \quad (4)$$

Если условия 1) — 4) выполнены, то  $J_k(\lambda) = O(\lambda^{-\infty})$  и  $J_k(\lambda) = O(e^{-c\lambda})$ ,  $c > 0$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$ , если матрица  $A(x)$  удовлетворяет сформулированным в конце п. 1 условиям.

**3. Адиабатические инварианты канонических систем.** Рассмотрим систему из  $2n$  уравнений

$$\varepsilon y' = A(x) y, \quad (5)$$

где  $J_{2n} A(x)$  — вещественная симметрическая матрица,  $J_{2n}$  см. в § 4. Введем условия:

1) Собственные значения матрицы  $A(x)$  — различные и чисто мнимые при всех  $x$ ,  $-\infty \leq x \leq +\infty$ .

2) Пределы  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} A(x) = A_\pm$  существуют и конечны, элементы матрицы-функции  $A'(x)$  — плавные функции.

Пусть  $p_j(x)$  — собственные значения,  $e_j(x)$  — правые собственные векторы матрицы  $A(x)$ . Занумеруем их так, что

$$p_{j+n}(x) = -p_j(x) = \overline{p_j(x)}, \quad e_{j+n}(x) = \overline{e_j(x)}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

и возьмем левые собственные векторы в виде  $e_j^*(x) = \overline{e_j^T(x)}$ . Система (5) имеет  $n$  независимых адиабатических инвариантов

$$J_s(x, \varepsilon) = i \frac{(e_s^* y) \overline{(e_s^* y)}}{e_s^* J e_s^*}, \quad s = 1, \dots, n, \quad (6)$$

которые вещественны для вещественных решений  $y$ . Эти инварианты находятся в инволюции, т. е. равны нулю скобки Пуассона  $\{J_r, J_s\} = 0, r \neq s$ . При условиях 1), 2) полные изменения адиабатических инвариантов

$$J_s(\varepsilon) = J_s(+\infty, \varepsilon) - J_s(-\infty, \varepsilon)$$

имеют порядок  $O(\varepsilon^\infty)$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Отметим, что формула (4) является частным случаем формулы (6). В [111] содержится обзор работ по теории адиабатических инвариантов.

#### 4. Задачи на собственные значения.

4.1. Задача на полуоси. Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$y' = \lambda A(x) y \quad (7)$$

на полуоси  $\mathbf{R}^+$ :  $x \geq 0$  и поставим краевое условие

$$Uy(0, \lambda) = 0, \quad (8)$$

где  $U$  — постоянная матрица порядка  $m \times n$  и ранга  $m$ . Точка  $\lambda_0$  называется *собственным значением* задачи (7), (8) на полуоси  $\mathbf{R}^+$ , если существует нетривиальное решение  $y(x, \lambda_0) \in L_2(\mathbf{R}^+)$  системы (7) (*собственная функция*), удовлетворяющее краевому условию (8). Ниже рассматривается случай, когда собственные значения образуют дискретное множество и вычисляется их асимптотика для некоторых классов систем.

Будем предполагать, что матрица  $A(x)$  удовлетворяет условиям 1) — 4) из § 4, п. 1.1, причем

$$q(x) > 0, \quad \int_0^\infty q(x) dx = \infty. \quad (9)$$

Пусть  $\eta_j, p_j(x)$  — соответственно собственные значения матриц  $B(+\infty), A(x)$ . Тогда

$$p_j(x) = [\eta_j + o(1)] q(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Пусть числа  $\eta_j$  таковы, что

$$\operatorname{Re} \eta_1 < \operatorname{Re} \eta_2 < \dots < \operatorname{Re} \eta_m < 0 < \operatorname{Re} \eta_{m+1} < \dots < \operatorname{Re} \eta_n,$$

где  $m = \operatorname{rank} U$ . Тогда система (7) имеет ФСР  $\{y_1, \dots, y_n\}$  вида (10) § 4:

$$y_j(x, \lambda) = \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^x p_j(t) dt + \int_{x_0}^x p_j^{(1)}(t) dt \right\} [e_j(x) + \lambda^{-1} u_j(x, \lambda)], \quad (10)$$

где при  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $x \geq x(\lambda_0)$  справедливы оценки

$$|u_j(x, \lambda)| \leq k(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Кроме того, существует сектор  $S: |\lambda| \geq \lambda_0 > 0, |\arg \lambda| \leq \delta$  в комплексной плоскости  $\lambda$  такой, что

1) решение  $y_j(x, \lambda)$  голоморфно по  $\lambda$  при  $\lambda \in S$  и при каждом фиксированном  $x \geq 0, 1 \leq j \leq n$ ;

2) решения  $y_1, \dots, y_m$  принадлежат  $L_2(\mathbb{R}^+)$ , решения  $y_{m+1}, \dots, y_n$  и никакие их нетривиальные линейные комбинации не принадлежат  $L_2(\mathbb{R}^+)$  при каждом фиксированном  $\lambda \in S$ .

Обозначим  $\tilde{Y}(x, \lambda) = (y_1(x, \lambda), \dots, y_m(x, \lambda))$ ; тогда всякая собственная функция имеет вид

$$y(x, \lambda) = \tilde{Y}(x, \lambda) c(\lambda), \quad (11)$$

где  $c(\lambda)$  — вектор с  $m$  компонентами, а собственные значения определяются из уравнения

$$\det \Omega_0(\lambda) = 0, \quad \Omega_0(\lambda) = U\tilde{Y}(0, \lambda). \quad (12)$$

Из свойств ФСР следует, что при  $\lambda \in S^\delta$  собственные значения либо образуют дискретное множество, либо  $\det \Omega_0(\lambda) \equiv 0$ , так что любая точка сектора  $S_\delta$  есть точка спектра. Последний случай является исключительным.

Введем следующие предположения:

1) На полуоси  $x \geq 0$  имеется ровно одна, и притом простая, точка поворота  $x_0 > 0, p_m(x_0) = p_{m+1}(x_0)$ .

2)  $\operatorname{Re} p_m(x_0) \equiv \operatorname{Re} p_{m+1}(x_0), 0 \leq x \leq x_0, \operatorname{Re} p_j(x) < \operatorname{Re} p_{j+1}(x)$  при всех  $x \geq 0$ , если  $j \neq m, n$ , и при  $x \geq x_0$ , если  $j = m$ .

3) Матрица-функция  $A(x)$  голоморфна в окрестности  $V$  отрезка  $I = [0, x_0]$ .

В данном случае  $I$  есть ЛС и локальная структура ЛС, выходящих из точки  $x_0$ , такая же, как и для уравнения Эйри  $y'' - \lambda^2(x - x_0)y = 0$ . Из точки  $x_0$  выходят еще две ЛС  $l_1, l_2 = l_1^*, \operatorname{Im} x > 0$  на  $l_1$ .

4.2. Асимптотика решений. Чтобы найти асимптотику собственных значений, необходимо найти асимптотику решений  $y_1(x, \lambda), \dots, y_m(x, \lambda)$  при  $x = 0, \lambda \rightarrow +\infty$ . Поскольку на полуоси  $x \geq 0$  имеется точка поворота  $x_0$ , АР (10) непригодны при  $x = 0$  и поэтому приходится рассматривать асимптотику решений в различных областях комплексной плоскости  $x$ . Пусть  $G, G_m, G^+$  — области, изображенные на рис. 25 и достаточно узкие, область  $G^-$  симметрична с  $G^+$  относительно вещественной оси. Все эти области содержат точку  $x_1 > x_0$ , а их границы — точку  $ia, a > 0$ . Обозначим  $G = G \cup [a, +\infty)$ ; аналогично определяют области  $G_m, G^\pm$ .

Дальнейшие рассуждения аналогичны проведенным в § 5 гл. III, п. 2.1. Пусть  $1 \leq j \leq m-1$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $j \neq k$ ,  $j \neq m, m+1$ ; тогда для каждой  $x \in [G]$  существует канонический путь  $\gamma_{jk}$ , соединяющий точки  $x_{jk}$ ,  $x$  и лежащий в  $[G]$ . Здесь  $x_{jk} = +\infty$  при  $k > j$ ,  $x_{jk} = ia$ ,  $k < j$ , так что АР вида (10) для решений  $y_1, \dots, y_{m-1}$  справедливы при  $\lambda \rightarrow +\infty$ ,  $x \in G$ . Аналогичные АР справедливы для решений  $y_m, y_{m+1}^\pm$  в областях  $[G_m], [G^\pm]$ .

Решения  $y_1, \dots, y_m, y_{m+1}^+, y_{m+1}^-$  линейно зависимы, так что

$$y_m(x, \lambda) = a_+( \lambda ) y_{m+1}^+(x, \lambda) + a_-( \lambda ) y_{m+1}^-(x, \lambda) + \sum_{j=1}^{m-1} a_j(\lambda) y_j(x, \lambda). \quad (13)$$

Решения  $y_{m+1}^\pm$  имеют наибольший и одинаковый порядок роста при  $x \rightarrow +\infty$ , и в силу того, что асимптотика (10) двойная,

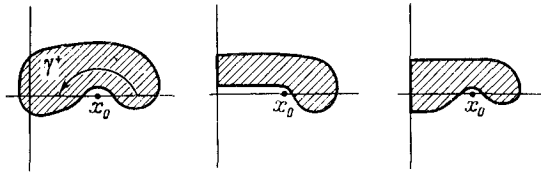


Рис. 25.

имеем  $a_1^+(\lambda) + a_2^+(\lambda) = 0$ ,  $\lambda \gg 1$ . Уточним нормировку решений  $y_m, y_{m+1}^\pm$ . Так как  $x_0$  — простая точка поворота, то

$$p_{m+1}(x) = q(x) + \sqrt{D(x)}, \quad p_m(x) = q(x) - \sqrt{D(x)},$$

где  $D(x)$  имеет простой нуль в точке  $x = x_0$ ,  $D(x) > 0$  при  $x > x_0$ ,  $q(x)$  — гладкая функция. Далее (§ 5),

$$p_j^{(1)}(x) = -\frac{1}{4(x-x_0)} + p_j^{(2)}(x), \quad j = m, m+1,$$

где  $p_j^{(2)}(x) = O((x-x_0)^{-1/2})$ ,  $x \rightarrow x_0$ . При  $x > x_0$ ,  $j = m, m+1$  положим

$$\tilde{y}_j(x, \lambda) = (x-x_0)^{-1/4} \exp\{\lambda S_j(x) + S_j^{(2)}(x)\},$$

$$S_j^{(2)}(x) = \int_{x_0}^x p_j^{(2)}(t) dt,$$

где  $\sqrt[4]{x-x_0} > 0$ . Положим  $x = ia$  в тождестве (13). Значения всех функций и вектор-функций при  $x = ia$  получаются в результате их аналитического продолжения вдоль путей  $\gamma$ , лежащих в соответствующих областях. При этом в областях  $G, G_m, G^\pm$  можно положить  $\gamma = \gamma^+$  (рис. 25), в области  $G^-$   $\gamma = \gamma^-$ . Соот-



ветствующие значения  $\tilde{y}_{m+1}$ ,  $e_{m+1}$  обозначим  $\tilde{y}_{m+1}^{\pm i}$ ,  $e_{m+1}^{\pm}$ ; тогда

$$\begin{aligned} (e_{m+1}(x) e^{S_{m+1}^{(2)}(x)})_- &= e_m(x) e^{S_m^{(2)}(x)}, \\ (x - x_0)_+^{1/4} &= i(x - x_0)_-^{1/4}, \quad (S_{m+1}(x))_- = S_m(x); \end{aligned}$$

поэтому при  $x = ia$  все отношения  $\tilde{y}_j/y_m$ ,  $y_{m+1}^+/y_m^-$  — экспоненциально малые величины и после сокращения на  $\tilde{y}_m$  тождество (13) принимает вид

$$e_m(x) = ia_-(\lambda) [e_m(x) + O(\lambda^{-1})] + \sum_{j=1}^m a_j(\lambda) \frac{y_j(x, \lambda)}{\tilde{y}_m(x, \lambda)} [e_j(x) + O(\lambda^{-1})].$$

Умножая это тождество слева на векторы  $e_1^*(x), \dots, e_m^*(x)$ , получаем систему уравнений, из которой находим  $a_+(\lambda) = i + O(\lambda^{-1})$ , так что

$$a_+(\lambda) = i + O(\lambda^{-1}), \quad a_-(\lambda) = -i + O(\lambda^{-1}).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} y_m(0, \lambda) &= [i + O(\lambda^{-1})] y_{m+1}^+(0, \lambda) + \\ &+ [-i + O(\lambda^{-1})] y_{m+1}^-(0, \lambda) + O(|y_{m+2}^{\pm}(0, \lambda)| e^{-c\lambda}), \quad c > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Для этого достаточно в полученной выше системе положить  $x = x_1 > x_0$  и воспользоваться тем, что

$$\operatorname{Re} \int_{x_0}^x [p_j(t) - p_k(t)] dt \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow +\infty,$$

при  $1 \leq j \leq m+1$ ,  $k = m, m+1$ . Последняя оценка полностью аналогична формуле связи (8) из § 5.

4.3. Асимптотика собственных значений. По построению AP решения  $y_1, \dots, y_{m-1}$ ,  $y_{m+1}^{\pm}$  пригодны в точке  $x = 0$ , а решение  $y_m$  выражается через эти решения. Заменяя значения всех решений на AP при  $x = 0$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$  и учитывая (13), (14), получим из (12) уравнение для собственных значений. Введем обозначения

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \int_0^{x_0} [p_{m+1}(t) - p_m(t)] dt, \quad (15)$$

$$\xi_1^{\pm} = [S_{m+1}^{(2)}(x_0, 0)]_{\pm}, \quad \Delta_{\pm} = \det B_{\pm},$$

где  $B_{\pm}$  — матрицы:

$$B_{\pm} = U \{e_1(0), \dots, e_{m-1}(0), e_{m+1}^{\pm}(0)\}.$$

Пусть хотя бы одно из чисел  $\Delta_+$ ,  $\Delta_-$  отлично от нуля. Имеем

$$B_+ e^{-i\pi/4} \exp\{-i\lambda \xi_0 + \xi_1^+\} + B_- e^{i\pi/4} \exp\{i\lambda \xi_0 + \xi_1^-\} = O(\lambda^{-1}),$$

откуда находим асимптотику серии собственных значений

$$\lambda_k = \left\{ k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2} [(S_{m+1}^{(2)}(x_0, 0))_+ - (S_{m+1}^{(2)}(x_0, 0))_-] + \frac{i}{2} \ln \frac{A_+}{A_-} \right\} \xi_0^{-1} + O(k^{-1}), \quad k \rightarrow +\infty. \quad (16)$$

Из формул (12)–(16) можно найти асимптотику собственных функций всюду на полуоси  $x \geq 0$ , за исключением малой окрестности точки поворота  $x_0$ . AP решений вблизи точки  $x_0$  можно найти, используя результаты § 4.

4.4. У р а в н е н и е  $n$ -г о п о р я д к а. Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + \lambda q_1(x) y^{(n-1)} + \dots + \lambda^n q_n(x) y = 0 \quad (17)$$

при тех же условиях на корни характеристического уравнения, что и выше, и задачу на собственные значения на полуоси  $x \geq 0$  с простейшими краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad \dots, \quad y^{(m-1)}(0) = 0.$$

В данном случае  $\Delta_{\pm}$  есть определитель Ван-дер-Монда от функций  $p_1(x), \dots, p_{m-1}(x), p_{m+1}^{\pm}(x)$  при  $x = 0$ , так что

$$\frac{\Delta_+}{\Delta_-} = \prod_{j=1}^{m-1} \frac{p_{m+1}^+(0) - p_j(0)}{p_{m+1}^-(0) - p_j(0)}.$$

Учитывая явные выражения для функций  $p_j^{(1)}(x)$ , получаем асимптотическую формулу для собственных значений

$$\lambda_k = \left[ k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{m-1} \ln \frac{p_{m+1}^+(0) - p_j(0)}{p_{m+1}^-(0) - p_j(0)} - \frac{i}{4} \int_0^{x_0} \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{(p_{m+1}^+(t))'}{p_{m+1}^+(t) - p_j(t)} - \frac{(p_{m+1}^-(t))'}{p_{m+1}^-(t) - p_j(t)} \right\} dt \right] \xi_0^{-1} + O(k^{-1}).$$

Для уравнения  $y'' - \lambda^2 q(x) y = 0$  эта формула совпадает с приведенной в гл. III, § 5, п. 2.1.

4.5. Задача на всей оси. В этом случае число  $\lambda_0$  называется *собственным значением*, если система (7) имеет нетривиальное решение  $y(x, \lambda_0) \in L_2(-\infty, \infty)$ . Будем предполагать, что условия из § 4, п. 4.1, выполнены на каждой из полуосей  $x \geq 0, x \leq 0$ , так что

$$A(x) = q_+(x) Q_+^{-1}(x) B_+(x) Q_+(x), \quad x \geq 0,$$

$$A(x) = q_-(x) Q_-^{-1}(x) B_-(x) Q_-(x), \quad x \leq 0,$$

каждая из матриц  $Q_{\pm}(x), B_{\pm}(x)$  и функций  $q_{\pm}(x)$  удовлетворяет условиям 3), 4) из § 4. Пусть

$$q_{\pm}(x) > 0, \quad \int_0^{+\infty} q_+(x) dx = \infty, \quad \int_{-\infty}^0 q_-(x) dx = \infty$$

и собственные значения  $\eta_j^\pm$  матриц  $B_\pm (\pm \infty)$  таковы, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \eta_1^+ < \dots < \operatorname{Re} \eta_m^+ < 0 < \operatorname{Re} \eta_{m+1}^+ < \dots < \operatorname{Re} \eta_n^+, \\ \operatorname{Re} \eta_1^- < \dots < \operatorname{Re} \eta_m^- < 0 < \operatorname{Re} \eta_{m+1}^- < \dots < \operatorname{Re} \eta_n^-. \end{aligned}$$

Тогда система (7) имеет две ФСР  $\{y_1^+, \dots, y_n^+\}$ ,  $\{y_1^-, \dots, y_n^-\}$ , для которых асимптотика вида (10) является двойной соответственно при  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ . При каждом фиксированном  $\lambda$ ,  $\lambda \geq \lambda_0 \gg 1$ , имеем:

1) решения  $y_1^+(x, \lambda), \dots, y_n^+(x, \lambda)$  принадлежат  $L_2(\mathbf{R}^+)$ , решения  $y_{m+1}^+(x, \lambda), \dots, y_n^+(x, \lambda)$  и никакие их нетривиальные линейные комбинации не принадлежат пространству  $L_2(\mathbf{R}^+)$ ;

2) решения  $y_{m+1}^-(x, \lambda), \dots, y_n^-(x, \lambda)$  принадлежат  $L_2(\mathbf{R}^-)$ , решения  $y_1^-(x, \lambda), \dots, y_m^-(x, \lambda)$  и никакие их нетривиальные линейные комбинации не принадлежат пространству  $L_2(\mathbf{R}^-)$ ;

3) существуют  $\rho > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $a > 0$  такие что решения  $y_j^\pm(x, \lambda)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , голоморфны по  $\lambda$  при  $|\lambda| \geq \rho$ ,  $|\arg \lambda| \leq \delta$  и при каждом фиксированном  $x \geq a$  (соответственно  $x \leq -a$ ).

Всякая собственная функция имеет при  $\lambda \in S_\delta$ ,  $|\lambda| \gg 1$  вид

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) &= c_1^+(\lambda) y_1^+(x, \lambda) + \dots + c_m^+(\lambda) y_m^+(x, \lambda) = \\ &= c_{m+1}^-(\lambda) y_{m+1}^-(x, \lambda) + \dots + c_n^-(\lambda) y_n^-(x, \lambda). \end{aligned}$$

Собственные значения определяются из уравнения  $W(\lambda) = 0$ , где  $W$  — вронскиан решений  $y_1^+, \dots, y_m^+$ ,  $y_{m+1}^-, \dots, y_n^-$ . Пусть выполнены условия, аналогичные условиям 1) — 3) из п. 4.1:

1) На вещественной оси имеются ровно две точки поворота  $x_1 < x_2$ , обе простые,  $p_m(x_j) = p_{m+1}(x_j)$ ,  $j = 1, 2$ .

2)  $\operatorname{Re} p_m(x) \equiv \operatorname{Re} p_{m+1}(x)$ ,  $x_1 \leq x \leq x_2$ ,  $\operatorname{Re} p_j(x) < \operatorname{Re} p_{j+1}(x)$  при всех  $x$ , если  $j \neq m, n$ , и при  $x \notin (x_1, x_2)$ , если  $j = m$ .

3) Матрица-функция  $A(x)$  голоморфна в окрестности отрезка  $[x_1, x_2]$ .

Пусть  $C$  — простой замкнутый контур в комплексной плоскости  $x$ , охватывающий отрезок  $[x_1, x_2]$  и ориентированный положительно. Введем обозначения

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \oint_C [p_{m+1}(x) - p_m(x)] dx,$$

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \oint_C [p_{m+1}^{(1)}(x) - p_m^{(1)}(x)] dx.$$

Система (7) имеет бесконечную серию собственных значений вида

$$\lambda_k = \xi_0^{-1} [\pi(k + 1/2) - i\xi_1] + O(k^{-1}), \quad k \rightarrow \infty.$$

Аналогичные результаты справедливы в случае, когда система (7) имеет несколько простых вещественных точек поворота [60].

## § 8. Примеры

**1. Система Штюккельберга.** Эта система возникла при исследовании неупругих столкновений двух атомов и имеет вид

$$h^2 u_1'' + \varphi_1 u_1 = \alpha u_2, \quad h^2 u_2'' + \varphi_2 u_2 = \alpha u_1, \quad (1)$$

где  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $\alpha(x)$  — гладкие на отрезке  $I = [a, b]$  вещественные функции,  $h > 0$  — малый параметр. Положим

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)], \quad \psi(x) = \frac{1}{2} [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]. \quad (2)$$

Собственные значения и собственные векторы матрицы системы равны

$$\begin{aligned} p_{1,2}(x) &= \varphi(x) \pm \sqrt{D(x)}, \quad D = \psi^2 + \alpha^2, \\ e_{1,2}(x) &= (\alpha, \psi \mp \sqrt{\psi^2 + \alpha^2})^T, \quad e_j^*(x) = e_j^T(x), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (1) имеет два типа точек поворота.

А.  $\varphi^2(x) = \psi^2(x) + \alpha^2(x)$ . В этом случае либо  $p_1 = 0$ , либо  $p_2 = 0$ .

Б.  $\psi^2(x) + \alpha^2(x) = 0$ . В этом случае  $p_1 = p_2$ .

Пусть на отрезке  $I$  нет точек поворота. Так как

$$\exp \left\{ - \int_{x_0}^x \frac{e_j^*(t) e_j'(t)}{e_j^*(t) e_j(t)} dt \right\} = \frac{c}{\sqrt{e_j^T(x) e_j(x)}},$$

то система (1) имеет ФСР вида

$$\begin{aligned} u_j^\pm(x, h) &= \frac{1}{\sqrt[4]{p_j(x)}} \frac{1}{\sqrt{e_j^T(x) e_j(x)}} \exp \left\{ \pm \frac{i}{h} \int_{x_0}^x \sqrt{p_j(t)} dt \right\} \times \\ &\quad \times [e_j(x) + O(h)], \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Эти формулы можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_1^+(x, h) &= \frac{1}{\sqrt[4]{p_1 D}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{D} - \psi}} \exp \left\{ \frac{i}{h} \int_{x_0}^x \sqrt{p_1(t)} dt \right\} \left[ \left[ \psi - \sqrt{D} \right]^\alpha + O(h) \right], \\ u_2^+(x, h) &= \frac{1}{\sqrt[4]{p_2 D}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{D} + \psi}} \exp \left\{ \frac{i}{h} \int_{x_0}^x \sqrt{p_2(t)} dt \right\} \times \\ &\quad \times \left[ \left[ \psi + \sqrt{D} \right]^\alpha + O(h) \right], \\ u_j^-(x, h) &= \overline{u_j^+(x, h)}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

**2. Волны в плазме.** При исследовании распространения электромагнитных волн в неоднородной плоско-слоистой анизотропной среде и, в частности, в магнитоактивной плазме возникает система

уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [AE_x + iCE_y] &= 0, \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [-iCE_x + BE_y] &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\omega > 0$  — частота,  $c$  — скорость света в вакууме,  $A, B, C$  — функции от  $z$ . Этот случай отвечает нормальному падению волны на плазменный слой. Собственные значения и собственные векторы матрицы системы равны

$$\begin{aligned} p_{1,2}(z) &= \frac{1}{2}(A + B \pm \sqrt{D}), \quad D = (A - B)^2 + 4C^2, \\ e_{1,2}(z) &= \begin{bmatrix} -2iC \\ A - B \mp \sqrt{D} \end{bmatrix}, \quad e_{1,2}^*(z) = [2iC, A - B \mp \sqrt{D}]. \end{aligned}$$

Точки поворота системы определяются уравнениями  $D = 0$ ,  $AB = C^2$ .

Пусть  $\omega/c \gg 1$ , на отрезке  $I$  нет точек поворота и функции  $\operatorname{Re} \sqrt{p_1(z)}$ ,  $\operatorname{Re} \sqrt{p_2(z)}$ ,  $\operatorname{Re} (\sqrt{p_1(z)} - \sqrt{p_2(z)})$ , не меняют знак при  $z \in I$ . Если функции  $A, B, C$  вещественны, то это условие выполняется. В данном случае правые и левые собственные векторы таковы, что  $e_j = (\alpha_j, \beta_j)^T$ ,  $e_j^* = (-\alpha_j, \beta_j)$ , и потому

$$\exp \left\{ - \int^x \frac{e_j^*(t) e_j'(t)}{e_j^*(t) e_j(t)} dt \right\} = \frac{c}{\sqrt{\beta_j^2(x) - \alpha_j^2(x)}}.$$

Система (6) имеет ФСР вида

$$\begin{aligned} E_1^\pm &= \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{D} - A + B}} \exp \left\{ \pm i \frac{\omega}{c} \int_{z_0}^z \sqrt{p_1(t)} dt \right\} [e_1(z) + O(h)], \\ E_2^\pm &= \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{D} + A - B}} \exp \left\{ \pm i \frac{\omega}{c} \int_{z_0}^z \sqrt{p_2(t)} dt \right\} [e_2(z) + O(h)], \end{aligned}$$

где  $E_j = (E_{xj}, E_{yj})^T$ .

**3. Система теории упругости.** Малые колебания плоской упругой изотропной среды описываются системой

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho \omega^2 u_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho \omega^2 u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $u = (u_1, u_2)^T$  — вектор смещений,  $\sigma = (\sigma_{jk})$  — тензор деформаций,

$$\begin{aligned} \sigma_{jj} &= \lambda \operatorname{div} u + 2\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \end{aligned}$$

$\lambda$ ,  $\mu$  — параметры Ламе,  $\rho$  — плотность среды,  $\omega$  — частота колебаний. Рассмотрим слоисто-неоднородную среду:  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  зависят только от переменной  $x_1 = x$ . Тогда система (7) имеет решения вида  $u(x_1, x_2) = e^{ikx_2} v(x_1)$ , где вектор-функция  $v$  — решение системы

$$Av'' + (ikB + A')v' + (-k^2C + ikD + \rho\omega^2I)v = 0. \quad (8)$$

Здесь  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  — матрицы, зависящие от  $x$ ,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \lambda + \mu \\ \lambda + \mu & 0 \end{bmatrix}, \\ C = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & \lambda' \\ \mu' & 0 \end{bmatrix}.$$

Системе (8) отвечает пучок

$$L(x, p) = Ap^2 + (ikB + A')p - k^2C + ikD + \rho\omega^2I,$$

собственные значения которого равны

$$p_{1,2}(x) = -\frac{1}{2} [\ln(\lambda + 2\mu)]' \pm \sqrt{k^2 + \frac{1}{2} [\ln(\lambda + 2\mu)]' - \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}}, \quad (9)$$

$$p_{3,4}(x) = -\frac{1}{2} (\ln\mu)' \pm \sqrt{k^2 + \frac{1}{2} (\ln\mu)' - \frac{\rho\omega^2}{\mu}}.$$

Рассмотрим два варианта.

3.1. Частота  $\omega$  не зависит от  $k$ . В этом случае корни пучка асимптотически кратные:

$$p_{1,2}(x) = \pm k - \frac{1}{2} [\ln(\lambda + 2\mu)]' + O(k^{-1}),$$

$$p_{3,4}(x) = \pm k - \frac{1}{2} (\ln\mu)' + O(k^{-1}).$$

Этот случай аналогичен рассмотренному в гл. II, § 8, п. 2, А. Главный член асимптотики не находится в квадратурах — он выражается через решения дифференциального уравнения второго порядка

$$lw \equiv (\mu w)'' + \mu w' + 2\mu \left[ \frac{(\mu w)'}{\lambda + \mu} \right]' = 0. \quad (10)$$

Пусть  $I$  — конечный отрезок,  $\lambda(x)$ ,  $\mu(x)$ ,  $\rho(x) \in C^\infty(I)$ . Будем искать ФАР системы (8) в виде

$$v(x, k) = e^{kx} \left[ f_0(x) + \frac{1}{k} f_1(x) + \dots \right];$$

тогда для вектор-функций  $f_0(x), f_1(x), \dots$  получим рекуррентную систему уравнений

$$\begin{aligned} (A + B - C) f_0 &= 0, \\ (A + B - C) f_1 &= -(2A + B) f'_0 - (A' + D) f_0, \\ (A + B - C) f_j &= -(2A + B) f'_{j-1} - (A' + D) f_{j-1} - \\ &\quad - A f''_{j-2} + \rho \omega^2 f_{j-2}, \quad j = 2, 3, \dots, \\ A + B - C &= (\lambda + \mu) \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Все решения первого из уравнений (11) имеют вид  $f_0(x) = w_0(x) (1, i)^T$ , где  $w_0(x)$  — произвольная функция. Матрица  $A + B - C$  вырождена; тем не менее второе из уравнений (11) разрешимо для любой функции  $w_0(x)$  и все решения этого уравнения имеют вид

$$f_1(x) = w_1(x) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{bmatrix} 0 \\ (\lambda + 3\mu) w'_0(x) + 2\mu' w_0(x) \end{bmatrix},$$

где  $w_1(x)$  — произвольная функция. Функция  $w_0(x)$  остается неопределенной и определяется только из условия разрешимости третьего из уравнений (11). Это условие таково: функция  $w_0(x)$  удовлетворяет уравнению (10). Окончательно для ФАР системы (9) получаем выражение

$$\begin{aligned} v^+(x, h) &= e^{kx} \begin{bmatrix} w_0(x) + \frac{1}{k} w_1(x) + \frac{1}{k^2} w_2(x) + \dots \\ i w_0(x) + \frac{i}{k} q_1 + \frac{i}{k^2} q_2 + \dots \end{bmatrix}, \\ a_j(x) &= (\lambda + 3\mu) w'_{j-1} + 2\mu' w_{j-1} - (\lambda + \mu) \left( \frac{a_{j-1}}{\lambda + \mu} \right)' - \\ &\quad - \frac{\lambda'}{\mu} a_{j-1} + [(\lambda + 2\mu) w'_{j-2}]' + \rho \omega^2 w_{j-2}, \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где  $q_n = w_n(x) + \frac{a_n(x)}{\lambda(x) + \mu(x)}$ ,  $n = 1, 2$ ,  $a_{-1} = a_0 \equiv 0$ ,  $w_j(x)$  — решение неоднородного уравнения

$$[(\lambda + \mu) w'_j - a_{j+1}] - 2\mu \left( \frac{a_{j+1}}{\lambda + \mu} \right)' - \left[ \mu \left( \frac{a_j}{\lambda + \mu} \right)' \right]' + \frac{\rho \omega^2 a_j}{\lambda + \mu} = 0. \quad (13)$$

Это уравнение имеет вид  $lw_j = q_j(w_0, w_1, \dots, w_{j-1})$ , где  $l$  — оператор из (10).

Формула (12) определяет два линейно независимых ФАР  $v_1^+(x, h)$ ,  $v_2^+(x, h)$  системы (8). Именно, пусть  $w_{01}, w_{02}$  — ФАР уравнения (10) и  $w_j$  — произвольное частное решение уравнения (13). Полагая  $w_0 = w_{0j}$  в формуле (12), получим ФАР  $v_j^+$ ,  $j = 1, 2$ .

Система (8) имеет также ФАР вида

$$v_{1,2}^-(x) = e^{-kx} \begin{bmatrix} w_0(x) - \frac{1}{k} w_1(x) + \frac{1}{k^2} w_2(x) + \dots \\ -i w_0(x) + \frac{i}{k} q_1 - \frac{i}{k^2} q_2 + \dots \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где  $q_n = w_n(x) + \frac{a_n(x)}{\lambda(x) + \mu(x)}$ ,  $n = 1, 2$ .

Пусть выполнено условие

$$\begin{aligned} \lambda(x) \neq 0, \mu(x) \neq 0, \lambda(x) + 2\mu(x) \neq 0, \\ \lambda'(x)\mu(x) - \lambda(x)\mu'(x) \neq 0, x \in I. \end{aligned}$$

Тогда система (8) имеет ФСР  $\{v_1^+(x, k), v_2^+(x, k), v_1^-(x, k), v_2^-(x, k)\}$  и для этих решений справедливы АР (12), (14) при  $\operatorname{Re} k \geq 0$ ,  $|k| \rightarrow \infty$ , равномерные по  $x \in I$ .

**З а м е ч а н и е.** Если  $\mu(x) \equiv \text{const}$ , то уравнение (11) интегрируется — одно из решений есть  $w_0(x) \equiv 1$ .

**3.2. Ч а с т о т а  $\omega$  з а в и с и т о т  $k$ :**  $\omega = k\sigma$ ,  $\sigma > 0$ . В этом случае ФАР системы (8) будем искать в виде

$$v(x, k) = \exp \left\{ ik \int_x^{\infty} p(t) dt \right\} \left[ e_0(x) + \frac{1}{k} e_1(x) + \dots \right].$$

Тогда для определения функции  $p(x)$  и вектор-функций  $e_0(x)$ ,  $e_1(x)$ , ... получим рекуррентную систему уравнений. Первые два уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} L(x, p) e_0 &= 0, \\ L(x, p) e_1 &= i(2pAe'_0 + p'Ae_0 + Be'_0 + pA'e_0 + De_0), \\ L(x, p) &= A(x)p^2 + B(x)p + C(x) - \rho(x)\sigma^2 I. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение имеет вид  $\det L(x, p) = 0$ , и его корни равны

$$p_{1,2}^2 = -1 + \frac{\rho\sigma^2}{\mu}, \quad p_{3,4}^2 = -1 + \frac{\rho\sigma^2}{\lambda + 2\mu}. \quad (15)$$

Собственные векторы пучка  $L(x, p)$  равны

$$f = (1, -p)^T, f^* = (1, -p),$$

где  $p(x)$  — один из корней характеристического уравнения. Условие разрешимости второго из уравнений таково:

$$e_0^* (2pAe'_0 + p'Ae_0 + Be'_0 + pA'e_0 + De_0) = 0.$$

Полагая в этом тождестве  $e_0(x) = \alpha(x)f(x)$ , находим

$$\alpha(x) = \frac{c}{\sqrt{\mu p(p^2 + 1)}}.$$



Система (8) имеет ФАР вида

$$\begin{aligned}
 v_j(x, k) &= \\
 &= \frac{1}{\sqrt{p_j(x)}} \exp \left\{ \pm k \int_{x_0}^x \sqrt{p_j(t)} dt \right\} [(1, -p_j(x))^T + O(k^{-1})], \quad j=1, 2, \\
 v_j(x, k) &= \\
 &= \sqrt{\frac{\lambda(x) + 2\mu(x)}{\mu(x)p_j(x)}} \exp \left\{ \pm k \int_{x_0}^x \sqrt{p_j(t)} dt \right\} [(1, -p_j(x))^T + O(k^{-1})], \\
 & \qquad \qquad \qquad j=3, 4.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Пусть  $\lambda(x) > 0$ ,  $\mu(x) > 0$ ,  $\rho(x) > 0$  при  $x \in I$  и выполнено одно из условий

$$\rho(x) \sigma^2 < \mu(x), \quad \rho(x) \sigma^2 > \lambda(x) + 2\mu(x), \quad x \in I.$$

Тогда система (8) не имеет точек поворота при  $x \in I$  и существует ФСР  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , для которой при  $k \rightarrow +\infty$  справедливы АР вида (16), равномерные по  $x \in I$ . Асимптотика решений системы (8) с точками поворота исследована в работе [36].

4. Система Штюккельберга с точками поворота. Система (1) возникает при исследовании неупругих столкновений двух атомов [104] с массами  $M_1, M_2$  и рассматривается на полуоси  $0 < r < \infty$ , где  $r$  — расстояние между атомами. Ее коэффициенты имеют вид

$$\varphi_j = [\varepsilon - V_j(r)] 2m - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2}, \quad \alpha = 2mV_{12}(r), \quad M = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2},$$

где  $\varepsilon > 0$ ,  $V_j(r)$  — энергетические термы электронных состояний,  $V_{12}(r)$  — матричный элемент взаимодействия электронных состояний,

$$V_1(\infty) = 0, \quad V_2(\infty) = \Delta\varepsilon, \quad 0 < \Delta\varepsilon < \varepsilon, \quad V_{12}(\infty) = 0.$$

Граничные условия таковы:

$$\begin{aligned}
 u_1(0) &= 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2(r) = \eta_1 e^{ik_2 r} + o(1), \\
 u_1(r) &= \alpha_1 e^{ik_1 r} - e^{-ik_1 r} + o(1), \quad r \rightarrow \infty, \\
 k_1 &= \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(\varepsilon - \Delta\varepsilon)}}{\hbar}.
 \end{aligned}$$

Пусть функции  $V_1(r), V_2(r)$  имеют вид, изображенный на рис. 26; тогда система (1) имеет две вещественные точки поворота  $r_1 < r_2$ ,

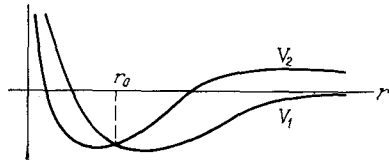


Рис. 26.

$\varphi_j(r_j) = 0$ . Если функция  $V_{12}(r)$  мала и коэффициенты системы (1) голоморфны в окрестности полуоси  $r > 0$ , то имеются две близкие к точке  $r_0$  комплексные точки поворота. Формулы связи в этом случае получены в [104] и впоследствии многократно использовались без какого-либо их анализа. Строгое математическое обоснование этих формул отсутствует. Ниже изложены методы, позволяющие получить некоторые из формул связи.

Пусть  $I = [a, b]$ , функции  $\varphi_1(z)$ ,  $\varphi_2(z)$ ,  $\alpha(z)$  голоморфны в области  $U$  комплексной плоскости  $z$ , содержащей  $I$ , и

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) > 0, \quad 4\varphi_1(x)\varphi_2(x) > \alpha^2(x), \quad \alpha(x) > 0, \quad x \in I.$$

Тогда  $p_1(x) > p_2(x) > 0$  при  $x \in I$  и система (1) не имеет вещественных точек поворота. Выберем ветви корней  $\sqrt{p_1(x)}$ ,  $\sqrt{p_2(x)}$ ,  $\sqrt{D(x)}$  положительными при  $x \in I$ . Пусть существует единственная точка  $x_0 \in I$ ,  $a < x_0 < b$ , такая, что  $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$ , и пусть

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0) &\neq \varphi_2'(x_0), \quad \varphi_1(x) > \varphi_2(x), \quad x \in I, \\ \alpha(x) &= \delta \tilde{\alpha}(x), \quad \delta > 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\delta$  — малый параметр, не зависящий от  $h$ . При  $\delta = 0$  точка  $x_0$  является точкой поворота системы (1), при малых  $\delta > 0$  имеются две близкие комплексные точки поворота  $z_0, \bar{z}_0$ ,

$$z_0(\delta) = \frac{\delta i \Psi(x_0)}{\varphi_1'(x_0) - \varphi_2'(x_0)} + O(\delta^2).$$

Пусть  $\varepsilon > 0$  фиксировано и не зависит от  $h, \delta$ ; тогда система (1) имеет ФСР  $\{u_1^\pm, u_2^\pm\}$ , для которой АР (4) справедливо при  $h \rightarrow 0$ ,  $a \leq x \leq x_0 - \varepsilon$ , и ФСР  $\{v_1^\pm, v_2^\pm\}$ , для которой АР (4) справедливо при  $h \rightarrow 0$ ,  $x_0 + \varepsilon \leq x \leq b$ . Вблизи точки  $x_0$  АР (4), вообще говоря, непригодно. Требуется выразить одну из этих ФСР через другую. Это можно сделать, выяснив области применимости АР (4) для различных решений. Данная задача аналогична рассмотренной в гл. III, § 8, п. 7.

4.1. Р е ш е н и е  $u_1^+$ . Пусть  $\delta > 0$  фиксировано. Точка  $z_0$  является наложением двух простых точек поворота, так как  $p_1(z_0) = p_2(z_0) \neq 0$ . Из точки  $z_0$  выходят три ЛС  $l_1, l_2, l_3$ , которые определяются уравнением

$$\operatorname{Im} \int_{z_0}^z (\sqrt{p_1(t)} - \sqrt{p_2(t)}) dt = 0,$$

из точки  $\bar{z}_0$  выходят ЛС  $l_1^*, l_2^*, l_3^*$ .

При малых  $|z - z_0|$  имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{p_1(z)} - \sqrt{p_2(z)} &= \frac{2\sqrt{D(z)}}{\sqrt{\varphi(z) + \sqrt{D(z)} + \sqrt{\varphi(z) - \sqrt{D(z)}}}} \sim \\ &\sim \sqrt{\frac{2i\alpha(x_0)(\varphi_1'(x_0) - \varphi_2'(x_0))}{\varphi(x_0)}} \sqrt{z - z_0}, \end{aligned} \quad (18)$$

так что одна из ЛС (обозначим ее  $l_2$ ) касается мнимой оси в точке  $z_0$ ,  $\text{Im } z > \text{Im } z_0$  при  $z \in l_2$ . Обозначим  $l_1$  ту из ЛС, на которой  $\text{Re } z < \text{Re } z_0$ . Кроме того, существует линия  $l$ , соединяющая точки  $z_0, \bar{z}_0$ ,  $l = l^*$ , на которой

$$\text{Re} \int_{z_0}^z (\sqrt{p_1(t)} - \sqrt{p_2(t)}) dt = 0.$$

Локально ЛС устроены так же, как и для уравнения  $h^2 w'' + D(z)w = 0$ .

Найдем 1-допустимую область  $D_1^+$  (§ 4): для каждой точки  $z \in D_1^+$  существуют канонические пути  $\gamma_{1k}$ ,  $1 \leq k \leq 4$ , соединяющие точки  $z_{1k}$  и  $z$ . Путь  $\gamma_{11}$  произволен, функции

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[ i \int_{z_{12}}^{\zeta} (\sqrt{p_2(t)} - \sqrt{p_1(t)}) dt \right], \quad \text{Re} \left[ -i \int_{z_{13}}^{\zeta} \sqrt{p_1(t)} dt \right], \\ \text{Re} \left[ -i \int_{z_{14}}^{\zeta} (\sqrt{p_1(t)} + \sqrt{p_2(t)}) dt \right] \end{aligned}$$

не возрастают при движении  $\zeta$  вдоль канонического пути  $\gamma_{1k}$  от точки  $z_{1k}$  к точке  $z$ .

Пусть  $D$  — прямоугольник  $a_1 \leq \text{Re } z \leq b_1$ ,  $|\text{Im } z| \leq c$ , содержащий отрезок  $I$  и точки  $z_0, \bar{z}_0$ ,  $c > 0$  достаточно мало, так что коэффициенты системы (1) голоморфны в  $D$ , и положим  $D_1 = D \setminus (l_3 \cup l_2^*)$ . Выберем числа  $a_1, b_1$  близкими к  $a, b$  и положим  $z_{12} = a_1 + ic$ . Тогда для любой точки  $z \in D_1$  существует канонический путь  $\gamma_{12}$ , соединяющий точки  $z_{12}, z$  и лежащий в  $D_1$  (гл. III, § 8, п. 8).

Построим канонический путь  $\gamma_{13}(z)$ . Так как  $p_1(x) > 0$  при  $x \in I$  и  $\delta > 0$  мало, то линии уровня  $\text{Re } S_1(z) = \text{const}$ , лежащие в  $D$  и не проходящие через точки  $z_0, \bar{z}_0$ , являются гладкими кривыми, близкими к отрезкам  $\text{Re } z = \text{const}$ . Функция  $-iS_1(0, z)$  взаимно однозначно отображает область  $D$  на область  $U$  в комплексной плоскости  $z$ , близкую к прямоугольнику  $\Pi$  с осями, параллельными осям координат, с двумя разрезами  $L_3, L_2^*$ . Здесь  $L_3, L_2^*$  — образы разрезов  $l_3, l_2^*$ , которые мало отличаются соответственно от отрезков  $\text{Im } S = \text{const}$ ,  $\text{Re } S = \text{const}$ . Положим

$z_{13} = \bar{z}_{12}$ ,  $A = -iS_1(0, z_{13})$ . Если удалить из области  $U$  точки, в которых  $\operatorname{Re} S_1 < \operatorname{Re} A$ , и, возможно, правую полуокрестность разреза  $L_3$ , то любую точку  $z$  из прообраза  $\bar{D}_1$  этой области можно соединить с точкой  $z_3$  каноническим путем  $\gamma_{13}(z)$ . Точно так же строятся канонические пути  $\gamma_{14}(z)$  с началом в точке  $z_{13}$ .

Таким образом, существует область  $D_1^+ \supset (I \cup z_0 \cup \bar{z}_0)$ , в которой справедливо АР (4), и эта область мало отличается от области  $\bar{D}_1$ .

4.2. Решения  $u_1^-, u_2^+, u_2^-$ . Построим канонические пути  $\gamma_{2j}(z)$ ,  $j = 1, 3, 4$ , вдоль которых функции

$$\operatorname{Re} \left[ i \int_{z_{21}}^{\xi} (\sqrt{p_1(t)} - \sqrt{p_2(t)}) dt \right], \quad \operatorname{Re} \left[ -i \int_{z_{23}}^{\xi} (\sqrt{p_1(t)} + \sqrt{p_2(t)}) dt \right],$$

$$\operatorname{Re} \left[ -i \int_{z_{24}}^{\xi} \sqrt{p_1(t)} dt \right]$$

не возрастают. Пусть  $D$  — та же область, что и в п. 4.1,  $\bar{D}_2 = D \setminus (l_2 \cup l_3^*)$ . Те же рассуждения, что и в п. 2.1, показывают, что АР (4) для решения  $u_2^+$  справедливо в области  $D_2^+ \supset (I \cup z_0 \cup \bar{z}_0)$ , которая мало отличается от области  $D_2$ . Положим

$$u_1^-(z, h) = u_1^+(\bar{z}, h), \quad u_2^-(z, h) = u_2^+(\bar{z}, h);$$

тогда АР решений  $u_1^-, u_2^-$  справедливы соответственно в областях  $(D_1^+)^*$ ,  $(D_2^+)^*$ . В частности, АР всех решений  $u_{1,2}^\pm$  справедливы на отрезке  $[a, x_0 - \varepsilon]$ .

4.3. Решения  $v_j^\pm$ . Пусть  $D$  — та же область, что и в п. 4.1,  $\bar{D} = D \setminus (l_1 \cup l_2^*)$ ,  $z_2 = b_1 + ic$ . Тогда для любой точки  $z \in \bar{D}$  существует канонический путь  $\gamma_{12}(z)$  с началом в точке  $z_2$ , вдоль которого функция  $\operatorname{Re} [i(S_2(0, z) - S_1(0, z))]$  не возрастает. Так же, как и в п. 4.1, доказывается, что АР (4) для решения  $v_1^+$  пригодно в области  $D_1^+$ , которая мало отличается от области  $\bar{D}_1$ . Пусть  $\bar{D}_3 = D \setminus (l_2 \cup l_1^*)$ ; тогда АР (4) для решения  $v_2^+$  пригодно в области  $D_2^+$ , близкой к области  $\bar{D}_2$ . Положим

$$v_1^-(z, h) = v_1^+(\bar{z}, h), \quad v_2^-(z, h) = v_2^+(\bar{z}, h).$$

4.4. Ф о р м у л ы с в я з и. Имеем

$$\begin{aligned} v_1^+ &= A_1^+ u_1^+ + A_2^+ u_2^+ + A_1^- u_1^- + A_2^- u_2^-, \\ v_2^+ &= B_1^+ u_1^+ + B_2^+ u_2^+ + B_1^- u_1^- + B_2^- u_2^-, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $A_j^\pm, B_j^\pm$  зависят только от  $h$ . В силу выбора решений

$$\begin{aligned} v_1^- &= \overline{A_1^+} u_1^+ + \overline{A_2^+} u_2^+ + \overline{A_1^-} u_1^- + \overline{A_2^-} u_2^-, \\ v_2^- &= \overline{B_1^+} u_1^+ + \overline{B_2^+} u_2^+ + \overline{B_1^-} u_1^- + \overline{B_2^-} u_2^-. \end{aligned} \quad (20)$$

Требуется найти асимптотику коэффициентов  $A_j^\pm, B_j^\pm$  при  $h \rightarrow 0$ ,  $0 \leq \delta \leq \delta_0$ , где  $\delta_0 > 0$  достаточно мало, но не зависит от  $h$ .

Из пп. 4.1 — 4.3 следует, что АР вида (4) для решений  $v_1^+$ ,  $u_{1,2}^\pm$  пригодно в точках, лежащих в области, ограниченной ЛС  $l_1, l_2$ . Фиксируем такую точку  $\tilde{z}$  и положим  $z = \tilde{z}$  в тождествах

$$\begin{aligned} v_1^+ &= A_1^+ u_1^+ + A_2^+ u_2^+ + A_1^- u_1^- + A_2^- u_2^-, \\ \frac{d}{dz} v_1^+ &= \frac{d}{dz} (A_1^+ u_1^+ + A_2^+ u_2^+ + A_1^- u_1^- + A_2^- u_2^-); \end{aligned} \quad (21)$$

тогда  $A_1^- = \Delta_1^- / \Delta$ , где  $\Delta$  — определитель системы,  $\Delta_1^-$  — определитель, полученный из  $\Delta$  заменой третьего столбца на столбец  $(v_1^+, (v_1^+)')^T$ . Ветви всех корней, входящих в формулы (4), положительны при  $z \in I$ , и все значения этих ветвей в точке  $\tilde{z}$  для решений  $u_j^\pm$  получены аналитическим продолжением вдоль отрезка  $\gamma_1 = [x_0, \tilde{z}]$ . Поэтому  $\Delta = 16 + O(h)$ .

Ветви корней, входящих в формулу (4) для АР решения  $v_1^+$ , получены аналитическим продолжением вдоль пути  $\gamma_2$ , который соединяет точки  $x_0, \tilde{z}$  и проходит справа от точки поворота. Так как  $\delta > 0$  мало, то

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_{\gamma_1} \sqrt{p_j(z)} dz &> 0, \quad j = 1, 2, \\ \operatorname{Im} \int_{\gamma_2} \sqrt{p_1(z)} dz &> 0, \end{aligned} \quad (22)$$

так что решения  $v_1^+, u_1^+, u_2^+$  экспоненциально убывают, решения  $u_1^-, u_2^-$  экспоненциально возрастают в точке  $\tilde{z}$ ,

$$A_1^- = \exp \left\{ \frac{i}{h} \left( \int_{\gamma_2} \sqrt{p_1(z)} dz + \int_{\gamma_1} \sqrt{p_1(z)} dz \right) \right\} O(1)$$

и потому

$$A_1^- = O(e^{-\xi/h}), \quad \xi > 0, \quad \xi = \operatorname{Im} \int_0^{\tilde{z}} \sqrt{\varphi(t)} dt + O(\delta). \quad (23)$$

Точно так же получаем, что  $A_2^- = O(e^{-\xi/h})$ .

Далее, в силу выбора ветвей корней имеем

$$\int_{\gamma_2} \sqrt{p_1(z)} dz - \int_{\gamma_1} \sqrt{p_1(z)} dz = A, \quad \operatorname{Im} A < 0,$$

так что  $A_1^+ = O(e^{\alpha/h})$ . Правая часть этой формулы экспоненциально возрастает при  $h \rightarrow 0$ , и потому асимптотика коэффициента  $A_1^+$  остается неопределенной. Найдем асимптотику  $A_2^+ =$

$= \Delta_2^+ / \Delta$ , где определитель  $\Delta_2^+$  отличается от определителя  $\Delta$  заменой второго столбца столбцом  $(u_2^+, (u_2^+)' )^T$ . Сделаем разрез вдоль отрезка  $l$ , проходящего через точки  $z_0, \bar{z}$ , до границы области  $D$ . Тогда ветви функции  $\sqrt{D(z)}$  на берегах разреза различаются множителем  $-1$ , так что  $p_1(z)|_{l_+} = p_2(z)|_{l_-}$ , где  $l_{\pm}$  — правый и левый берега разреза. Поэтому

$$\int_0^{\bar{z}} \sqrt{p_1(t)} dt - \int_0^{\bar{z}} \sqrt{p_2(t)} dt = \int_0^{z_0} (\sqrt{p_1(t)} - \sqrt{p_2(t)}) dt = \eta, \quad \text{Im } \eta > 0,$$

где интегралы берутся по путям  $\gamma_1, \gamma_2$  и

$$u_1^+(\bar{z}, h) = e^{i\eta/h} u_1^+(\bar{z}, h) [1 + O(h)].$$

Отсюда находим

$$A_2^+ = e^{i\eta/h} [1 + O(h)]. \quad (24)$$

Таким образом, коэффициенты  $A_1^-, A_2^-$  экспоненциально малы, асимптотика коэффициента  $A_2^+$  дается формулой (24) и коэффициент  $A_1^+$  остается неопределенным. Аналогично доказывается, что

$$B_1^+ = e^{-2i\eta/h} [1 + O(h)], \quad B_{1,2}^- = O(e^{-\xi/h}),$$

коэффициент  $B_2^+$  остается неопределенным. Информацию о коэффициентах  $A_1^+, B_2^+$  можно получить из тождества: если  $u, v$  — решения системы (1), то

$$v^T u' - u^T v' \equiv \text{const.}$$

В частности, справедлива формула

$$|A_1^+|^2 (1 + \varepsilon_1) + |A_2^+|^2 (1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_3 \text{Im} (\overline{A_1^+} A_2^+) = 1 + \varepsilon_4, \\ \varepsilon_j = O(h),$$

и аналогичное тождество справедливо для коэффициентов  $B_1^+, B_2^+$ .

## ЛИТЕРАТУРА

### 1. Книги

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Харьков: ОНТИ, 1939.
2. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.— М.: Наука, 1972.
3. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1954.
4. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1968.
5. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.
6. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.— М.: Л.: Гостехиздат, 1956.
7. Дженкинс Дж. Однолистные функции и конформные отображения.— М.: ИЛ, 1962.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1976.
9. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1958.
10. Костюченко А. Г., Саргсян И. С. Распределение собственных значений.— М.: Наука, 1979.
11. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 3. Квантовая механика.— М.: Наука, 1974.
13. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию.— М.: Наука, 1970.
14. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.— М.: Наука, 1981.
15. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы.— М.: Изд-во МГУ, 1965.
16. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.— М.: Наука, 1976.
17. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики.— М.: Наука, 1981.
18. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы.— М.: Наука, 1969.
19. Найфэ А. Х. Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.
20. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции.— М.: Наука, 1978.
21. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений.— Киев: Изд-во АН УССР, 1954.
22. Справочник по специальным функциям.— М.: Наука, 1979.
23. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих вопросах теории дифференциальных уравнений и о разложении функций в ряды.— Петроград, 1917.

24. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка.— М.: ИЛ, 1959, т. 1; 1960, т. 2.
25. Федорюк М. В. Метод перевала.— М.: Наука, 1977.
26. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев: Наукова думка, 1966.
27. Фрёман Н., Фрёман П. У. ВКБ-приближение.— М.: Мир, 1967.
28. Хартман Ф. Обыкновенные [дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.
29. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ).— М.: Мир, 1965.
30. Эрдейи А. Асимптотические разложения.— М.: Физматгиз, 1962.
31. Hille E. Ordinary differential equations in the complex domain.— N. Y.: Wiley, 1976.
32. Olver F. Asymptotics and special functions.— N. Y.: L.: Academic Press, 1974.
33. Sibuya Y. Global theory of a second order linear differential equation with a polynomial coefficient.— Amsterdam: North-Holland Publ. C., 1975.

## 2. Статьи

34. Абрамов А. А. О граничных условиях в особой точке для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— ЖВМ и МФ, 1971, 11, № 1, с. 275—278.
35. Абрамов А. А., Балла К., Конюхова Н. Б. Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Сообщения по вычислительной математике. М.: ВЦ АН СССР, 1981, с. 1—64.
36. Аленицын А. Г. Волны Рэлея в неоднородном упругом слое.— Прикладная матем. и механ., 1964, 28, № 5, с. 880—888.
37. Арнольд В. И. О матрицах, зависящих от параметров.— УМН, 1971, 62, в. 2, с. 101—114.
38. Булдырев В. С., Славянов С. Ю. Равномерные асимптотические разложения для решений уравнения типа Шредингера с двумя точками перехода. I.— Вестник ЛГУ, 1968, 22, в. 4, с. 70—84.
39. Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Федорюк М. В. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— Итоги науки. Матем. анализ, 1967, ВИНТИ АН СССР. М., 1969, с. 5—73.
40. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— УМН, 1960, 12, в. 5, с. 3—122.
41. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений.— УМН, 1960, 15, в. 3, с. 3—80.
42. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Об асимптотике собственных значений для несамосопряженной краевой задачи.— ЖВМ и МФ, 1964, 4, в. 2, с. 267—277.
43. Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка.— УМН, 1952, 7, в. 6, с. 3—96.
44. Евграфов М. А., Федорюк М. В. Асимптотика решений уравнения  $w''(z) - p(z, \lambda)w(z) = 0$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$  в комплексной плоскости  $z$ .— УМН, 1966, 21, в. 1, с. 3—50.
45. Жданова Г. В. Асимптотика собственных значений самосопряженного сингулярного оператора  $2n$ -го порядка.— Дифференц. уравнения, 1970, 6, № 5, с. 838—851.



46. Жданова Г. В. Формальная асимптотика фундаментальной системы решений одного уравнения теории упругости.— Дифференц. уравнения, 1982, 18, № 9, с. 1820—1821.
47. Жданова Г. В., Федорюк М. В. Асимптотическая теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и задача о рассеянии.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1977, 34, с. 213—242.
48. Конохова Н. Б. О выделении устойчивых многообразий для некоторых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью.— ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 3, с. 609—626.
49. Кучеренко В. В. Асимптотика решения системы  $A(x, -i\hbar\partial/\partial x)u = 0$  при  $\hbar \rightarrow 0$  в случае характеристик переменной кратности.— Известия АН СССР, сер. Матем., 1974, 95, № 23, с. 625—662.
50. Кучеренко В. В., Осипов Ю. В. Асимптотические решения обыкновенных дифференциальных уравнений с вырождающимся символом.— Матем. сборник, 1982, 118, № 1, с. 74—103.
51. Симонян С. Г. Асимптотика ширины лакун в спектре оператора Штурма — Лиувилля с периодическим потенциалом.— Дифференц. уравнения, 1970, 6, № 7, с. 1265—1272.
52. Славянов С. Ю. Асимптотика сингулярных задач Штурма — Лиувилля по большому параметру в случае близких точек поворота.— Дифференц. уравнения, 1969, 5, № 2, с. 313—325.
53. Смирнов В. Г. Асимптотика при  $\lambda \rightarrow \infty$  матриц монодромии уравнения  $w''(x) - \lambda^2 q(x)w(x) = 0$ .— Труды МИЭМ, 1969, в. 5, с. 153—191.
54. Территин Х. Л. Асимптотическое разложение решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр.— Математика, 1957, 1, № 2, с. 29—59.
55. Федорюк М. В. Асимптотика дискретного спектра оператора  $w''(x) - \lambda^2 p(x)w(x)$ .— Матем. сборник, 1965, 68, № 1, с. 81—110.
56. Федорюк М. В. Топология линий Стокса для уравнений второго порядка.— Известия АН СССР, сер. Матем., 1965, 29, № 3, с. 645—656.
57. Федорюк М. В. Одномерная задача о рассеянии в квазиклассическом приближении. I.— Дифференц. уравнения, 1965, 1, № 5, с. 631—646. II.— 1965, 1, № 11, с. 1525—1536.
58. Федорюк М. В. Асимптотика решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка.— Дифференц. уравнения, 1966, 2, № 4, с. 492—507.
59. Федорюк М. В. Асимптотические методы в теории одномерных сингулярных дифференциальных операторов.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1966, 15, с. 296—345.
60. Федорюк М. В. Асимптотика собственных значений и собственных функций одномерных сингулярных дифференциальных операторов.— ДАН СССР, 1966, 169, № 2, с. 288—291.
61. Федорюк М. В. Аналитические свойства амплитуды рассеяния в одномерном случае. I.— Дифференц. уравнения, 1968, 4, № 10, с. 1842—1853. II.— 1969, 5, № 3, с. 507—517.
62. Федорюк М. В. Асимптотические методы в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.— Матем. сборник, 1969, 79, № 4, с. 477—516.
63. Федорюк М. В. Асимптотика собственных значений и собственных функций оператора Штурма — Лиувилля с комплекснозначным потенциалом-полиномом. I.— Дифференц. уравнения, 1972, 8, № 5, с. 811—816. II.— 1974, 10, № 6, с. 1068—1073 (в соавт. с Ждановой Г. В.).
64. Федорюк М. В. Адиабатический инвариант системы линейных осцилляторов и теория рассеяния.— Дифференц. уравнения, 1976, 12, № 6, с. 1012—1018.

65. Ширкияи Р. А. Асимптотические методы в теории одномерных сингулярных дифференциальных операторов нечетного порядка.— Дифференц. уравнения, 1967, 3, № 11, с. 1942—1956.
66. Черри Т. М. Равномерные асимптотические формулы для функции с точками поворота.— Математика, 1965, 9, № 4, с. 87—119.
67. Berk H. L., Nevins W. M., Roberts K. V. New Stokes line in WKB theory.— J. Math. Phys., 1982, 23, № 6, p. 988—1002.
68. Birkhoff J. D. Quantum mechanics and asymptotic series.— Bull. Amer. Math. Soc., 1933, 32, p. 681—700.
69. Braaksma L. J. Asymptotic analysis of a differential equation of Turritin.— SIAM J. Math. Anal., 1974, № 1, p. 1—16.
70. Devinatz A. An asymptotic theorem for systems of linear differential equations.— Trans. Amer. Math. Soc., 1974, 160, № 10, p. 353—363.
71. Devinatz A. The deficiency index of a certain class of ordinary self-adjoint differential operators.— Advances in Math., 1972, 8, p. 434—473.
72. Devinatz A. The deficiency index of certain fourth-order ordinary self-adjoint differential operators.— Quart. J. Math. Oxford, 1972, 23, № 91, p. 267—286.
73. Devinatz A., Kaplan I. M. Asymptotic estimates for solutions of linear systems of ordinary differential equations having multiple characteristic roots.— Indiana Univ. Math. J., 1972, 22, № 4, p. 355—366.
74. Gilbert R. C. The deficiency index of a third order operator.— Pacific J. Math., 1977, 68, № 2, p. 369—392.
75. Ginzold H. Simplification of linear homogeneous differential equations with moving singularities.— Funkcialaj Ekvacioj, 1976, 19, p. 203—225.
76. Gollwitzer H. E. Stokes multipliers for subdominant solutions of second order differential equations with polynomial coefficients.— Univ. Minnesota, Inst. Technology, School Math., Minneapolis, 1967, p. 1—67.
77. Harris W. A., Lutz D. A. On the asymptotic integration of linear differential systems.— J. Math. Anal. and Appl., 1974, 48, p. 1—16.
78. Harris W. A., Lutz D. A. Asymptotic integration of adiabatic oscillators.— J. Math. Anal. and Appl., 1975, 51, p. 76—93.
79. Healing J. Generalized approximate methods for transmission through a barrier governed by a differential equation of order  $2n$ .— Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1979, 85, p. 361—377.
80. Iwano M. Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter.— Funkc. Ekvac., 1963, 5, p. 71—134.
81. Kelly B. J. Admissible domains for higher order differential operators.— Studies in Appl. Math., 1979, 60, p. 211—240.
82. Kohno M., Okohochi S., Kohmoto T. On full uniform simplification of even order linear differential equations with a parameter.— Hiroshima Math. J., 1979, 9, p. 747—767.
83. Langer R. E. The asymptotic solutions of certain linear ordinary differential equations of the second order.— Trans. Amer. Math. Soc., 1934, 36, p. 90—106.
84. Lee K. Turning point problems of almost diagonal systems.— J. Math. Anal. and Appl., 1968, 24.
85. Leung A. Studies on doubly asymptotic series solutions for differential equations in unbounded domains.— J. Math. Anal. and Appl., 1973, 44, p. 238—263.
86. Leung A. A doubly asymptotic existence theorem and application to order reduction.— Proc. London Math. Soc., 1976, 33, p. 151—156.

87. Leung A. Lateral connections for asymptotic solutions for higher order turning points in unbounded domains.— *J. Math. Anal. and Appl.*, 1975, 50, p. 560—578.
88. Nakano M. Second order linear ordinary differential equations with turning points and singularities. I.— *Kodai Math. Sem. Rep.*, 1977, 29, p. 88—102.
89. Nakano M., Nishimoto T. On a secondary turning points problems.— *Kodai Math. Sem. Rep.*, 1970, 22, p. 355—384.
90. Nishimoto T. On the central connection problem at a turning point.— *Kodai Math. Sem. Rep.*, 1970, 22, p. 30—44.
91. Nishimoto T. On an extension theorem and its application for turning point problems of large order.— *Kodai Math. Sem. Rep.*, 1973, 25, p. 458—489.
92. Nishimoto T. Uniform asymptotic properties of the WKB method.— *Kodai Math. J.*, 1981, 4, p. 71—81.
93. Olver F. W. Second-order linear differential equations with two turning points.— *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 1975, Ser. A, 278, p. 137—174.
94. Olver F. W. Improved error bounds for second-order differential equations with two turning points.— *J. Research Nat. Bureau Stand.*, 1976, 80B, № 4, p. 437—440.
95. Olver F. W. Connection formulas for second-order differential equations having an arbitrary number of turning points of arbitrary multiplicities.— *SIAM J. Math. Anal.*, 1977, 8, № 4, p. 673—700.
96. Olver F. W. Second-order differential equations with fractional transition points.— *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1977, 226, p. 227—241.
97. Olver F. W. Connection formulas for second-order differential equations with multiple turning points.— *SIAM J. Math. Anal.*, 1977, 8, № 1, p. 127—154.
98. Olver F. W. General connection formulae for Lionville — Green approximations in the complex plane.— *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A, 1978, 289, p. 501—548.
99. Roos H.-G. Die asymptotische Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zweisegmentigem charakteristischem Polygon.— *Betr. Anal.*, 1975, 7, p. 55—63.
100. Roos H.-G. Die asymptotische Lösung einer linearen Differentialgleichung mit dreisegmentigem charakteristischem Polygon.— *Math. Nachr.*, 1979, 88, p. 93—103.
101. Sibuya Y. Some global properties of matrices of functions of one variable.— *Math. Ann.*, 1965, 161, p. 67—77.
102. Sibuya Y. Uniform simplification in a full neighborhood of a transition point.— *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 1974, № 149.
103. Stengle G. Asymptotic estimates for the adiabatic invariance of a simple oscillator.— *SIAM J. Math. Anal.*, 1977, 8, № 4, p. 640—654.
104. Stueckelberg E. C. Theorie der unelastischen Stösse zwischen Atomen.— *Helv. Phys. Acta*, 1932, 5, p. 370—422.
105. Wasow W. Turning point problems for systems of linear equations. I.— *Comm. Pure Appl. Math.*, 1961, 14, p. 657—673. II.— 1962, 15, p. 173—187.
106. Wasow W. Asymptotic simplification of self-adjoint differential equations with a parameter.— *J. Differ. Equat.*, 1966, 2, № 4, p. 378—390.
107. Wasow W. Simple turning-point problems in unbounded domains.— *SIAM J. Math. Anal.*, 1970, 1, № 2, p. 153—170.
108. Wasow W. The central connection problem at turning points of linear differential equations.— *Comm. Math. Helv.*, 1971, 46, p. 65—86.
109. Wasow W. Calculation of an adiabatic invariant by turning point problem.— *SIAM J. Math. Anal.*, 1974, 5, № 4, p. 673—700.
110. Wasow W. Asymptotic simplification of linear Hamiltonian differential equations with a parameter.— *Funk. Ekv.*, 1975, 18, p. 257—270.

111. W a s o w W. Some recent results in the theory of adiabatic invariants.— Intern. Conference on Diff. Equat. N. Y.: Academic Press, 1975, p. 747—764.
112. W a s o w W. Arnold's canonical matrices and the asymptotic simplification of ordinary differential equations.— Linear algebra Appl., 1977, 18, p. 163—170.

**Добавлено при корректуре**

113. А л е н и ц ы н А. Г. Расщепление спектра, порожденное потенциальным барьером в задачах с симметрическим потенциалом.— Дифф. уравн., 1982, 18, № 11, с. 1974—1975.
114. П о в з п е р А. Я. Константы Стокса для уравнения Шредингера с полиномиальными коэффициентами.— Теор. и матем. фвз., 1982, 51, № 1, с. 54—72.
115. Ф е д о р ю к М. В. Задача Штурма — Лиувилля с регулярными особыми точками. I.— Дифф. уравн.. 1982, 18, № 12, с. 2166—2173; II.— 1983, 19, № 2, с. 278—286.
116. L e u n g A., M e y e r K. Adiabatic invariants of Hamiltonian systems.— J. of Diff. Equat., 1975, 17, p. 32—43.



- Задача на собственные значения для системы уравнений на полуоси 326—330  
 — о надбарьерном отражении 77, 143, 145  
 — — наиболее полном прохождении сквозь барьер 154—157  
 — об отражении от барьера 142, 144, 146—150  
 — о прохождении сквозь барьер 143, 147  
 — — рассеянии 75, 77, 143, 145, 147, 154—157  
 — — — при наличии поглощения 78—80  
 — Редже 73
- Излучения условия 93  
 Интегральные уравнения 35, 36, 192, 279—281, 310, 313  
 Иррегулярные особые точки 10, 21—24, 86, 89, 111, 306
- Каноническая область 95, 96, 98—105, 109, 121—124, 222  
 Канонический оператор Маслова 306  
 — путь 89—93, 97, 114, 137, 205, 206, 283, 339, 340  
 Квазиклассическое приближение 30, 39  
 — — в задачах рассеяния 75, 77, 143, 145, 147, 154—157  
 Квазистационарные уровни 157  
 Контрпримеры 67—69  
 Коши теорема 8  
 Коэффициент отражения 76, 147, 149, 154, 155  
 — прохождения 76, 147, 149, 154—156, 159
- Лагуна 160  
 —, асимптотика ширины 161, 165, 166
- Ландау — Лифшица формула 125  
 Левинсона теорема 52, 281  
 Лежандра уравнение 134  
 Линия Стокса 82—89, 97—108, 114, 117, 123, 125, 127, 128, 130, 132, 136, 139, 144—146, 148—151, 154, 158, 162—164, 171, 185, 221, 286—288, 327, 334  
 — уровня 82, 83, 87  
 Лиувилля преобразование 31, 32  
 Льюиса инвариант 80
- Майера функция 318  
 Макдональда функция 187, 202  
 Матрица антиэрмитова 309, 311  
 — косесимметрическая 272  
 — симметричная 241, 272, 324, 325
- Матрица симплектическая 272  
 — унитарная 76, 309, 311, 324  
 — эрмитова 241, 311, 312, 324  
 — перехода 94, 100—106, 122, 138, 139, 146, 152
- Многообразия ограниченных решений 18—21, 25—29  
 Моводромии группа 17, 110, 111, 125  
 — матрица 163, 166  
 Мультипликатор 160, 161
- Неймана функция 194, 203  
 Нерлунда теорема 46  
 Нули решений 98, 129  
 Ньютона диаграмма 194, 203
- Область допустимая 284, 286—288, 339, 340  
 — каноническая 95, 96, 98—105, 109, 121—124, 222  
 — применимости ВКБ-асимптотики 97, 98  
 — типа кольца 88  
 — — круга 89  
 — — полосы 88, 95, 112, 123, 221  
 — — подуплоскости 89, 95, 123, 221  
 Олвера форма асимптотического разложения 167  
 Определяющее уравнение 11, 12  
 Особые точки дифференциальных уравнений, второго рода 15, 16  
 — — —, иррегулярные 10, 21—24, 86, 89, 111, 306  
 — — —, —, краевые условия в них 18  
 — — —, —, критерий 10, 21—24  
 — — —, на бесконечности 9, 15, 16  
 — — —, первого рода 15  
 — — —, подвижные 304—306  
 — — —, ранг 15  
 — — —, регулярные 10, 11, 111, 112, 133, 186, 306  
 — — —, —, критерий 11  
 — — —, — типа  $R_1$  86, 186  
 — — —, — —  $R_2$  86, 111, 112
- Отгонка граничного условия 19—21, 25—29
- Параболического цилиндра функции 194, 212, 213  
 Перевала метод 80  
 Перрона пример 51  
 — теорема 51  
 Полюс коэффициента 84—88  
 Преобразования дифференциальных уравнений второго порядка 30—34



- |   |   |
|---|---|
| Эйлера уравнение 15, 318                                | Эйри функции, нули 170  |
| Эйри обобщенное уравнение 314,<br>318, 322, 323         | — — связь с функциями Бесселя<br>169  |
| — обобщенные функции 314                                | Элементарные фундаментальные си-<br>стемы решений 99—105, 110, 122,<br>125, 146, 150, 151 |
| — уравнение 167, 169, 176, 186,<br>318                  | Эренфеста адиабатический инва-<br>риант 80  |
| — функции 167, 169—173, 177, 186,<br>187, 196, 292, 294 | Эталонные уравнения 186—190,<br>193—197   |
| — —, асимптотические разложения<br>170, 171             |   |
| — —, интегральные представления<br>170                  |   |

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- AP — асимптотический ряд, асимптотическое разложение  
 ЛС — линия Стокса  
 ФАР — формальное асимптотическое решение  
 ФМ — фундаментальная матрица  
 ФСР — фундаментальные системы решений